

Metody numeryczne

Wykład 6



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://m.lanczont.pollub.pl>

Plan wykładu

Rozwiązywanie równań algebraicznych nieliniowych:

- metoda Bisekcji
- metoda Regula Falsi
- metoda Siecznych
- metoda Newtona-Raphsona
- metoda iteracji prostej

Równania nieliniowe

- Pierwiastki równania nieliniowego

$$f(x)=0$$

na ogół nie można wyrazić za pomocą wzoru analitycznego.

- Rozwiązanie może zostać wyznaczone w sposób przybliżony, z żądaną dokładnością za pomocą metod iteracyjnych.

Równania nieliniowe

- W przypadku większości metod konieczne jest podanie pierwszego przybliżenia rozwiązania x_0 (w niektórych dwóch pierwszych x_0 i x_1)
- Zadanie uznawane jest za zakończone gdy uzyskano przybliżenie z żadaną dokładnością i można oszacować błąd
- Dla większości metod możliwe jest przybliżenie rozwiązania tylko wtedy gdy analizowany jest przedział z jednym pierwiastkiem

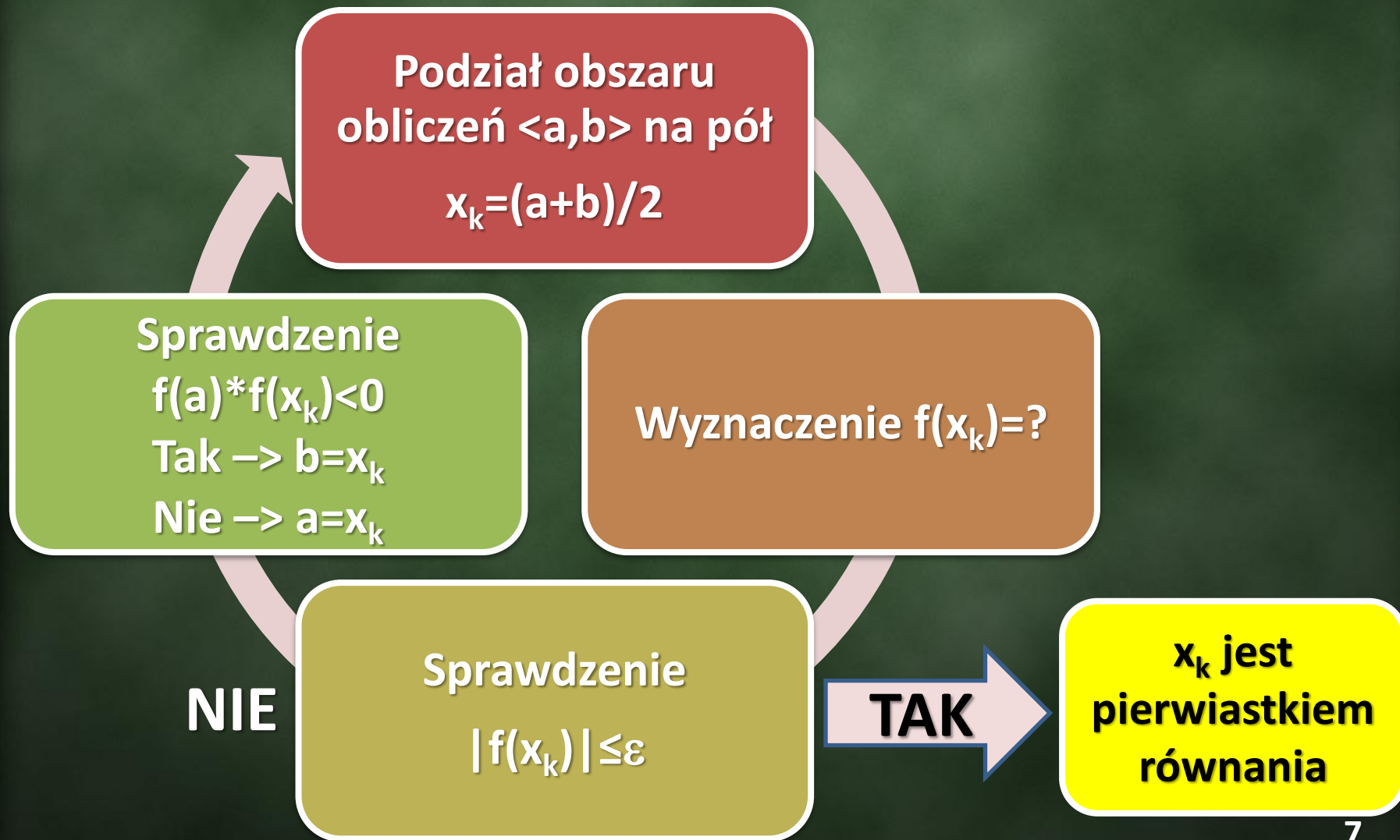
Metoda Bisekcji

- Funkcja rozwiązywana metodą Bisekcji (połowienia) musi spełniać warunki:
 - Ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$
 - Na krańcach przedziału funkcja przyjmuje wartości o przeciwnych znakach
- Metoda potrafi znaleźć tylko jeden pierwiastek - nawet jeśli w zadanym przedziale jest ich więcej

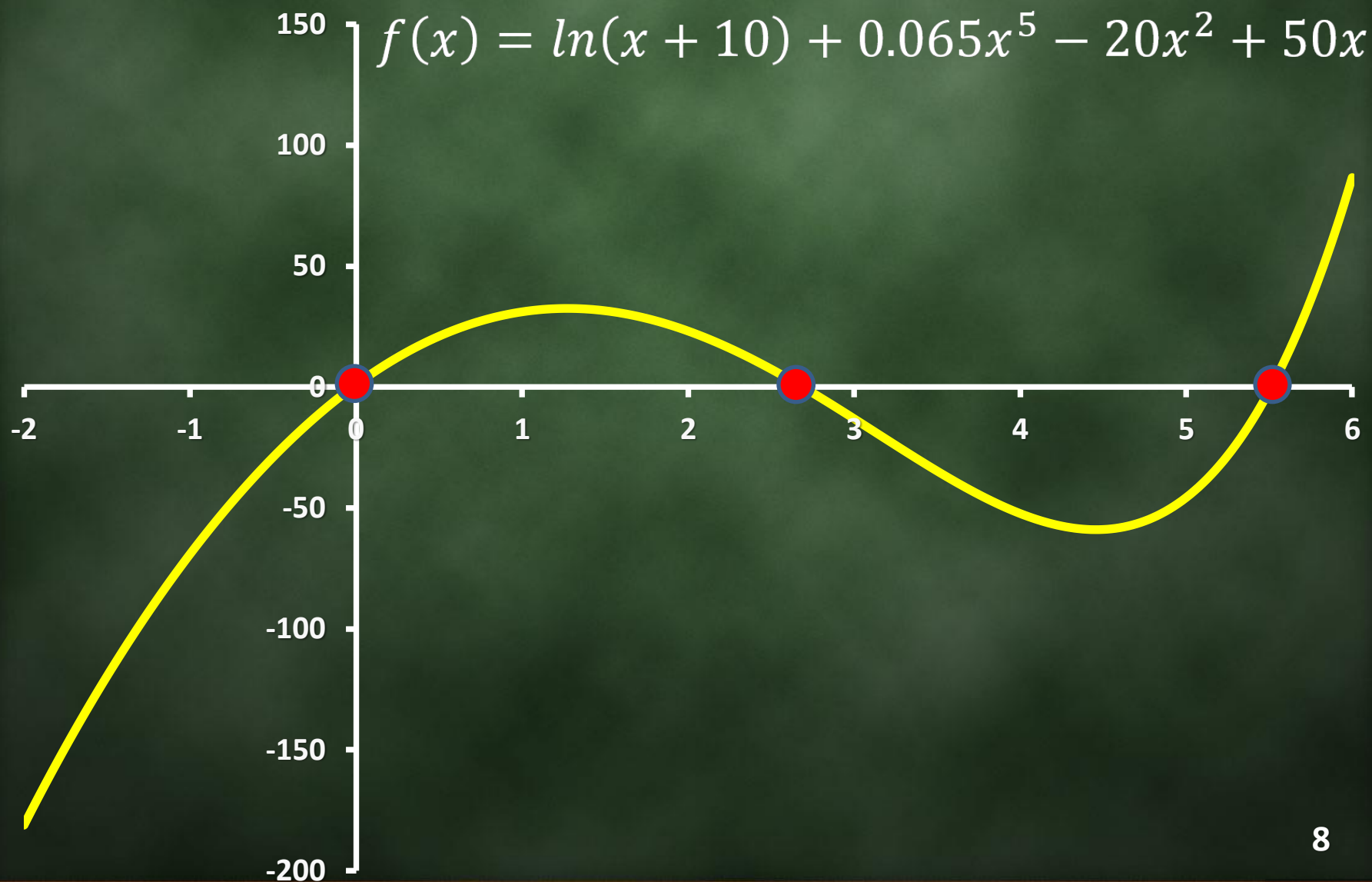
Metoda Bisekcji

- Metoda nie korzysta własności funkcji i jej przebiegu wewnątrz przedziału, wyłącznie z znaku wartości na jej końcach
- Metoda wyznacza pierwiastek z żądaną dokładnością ε

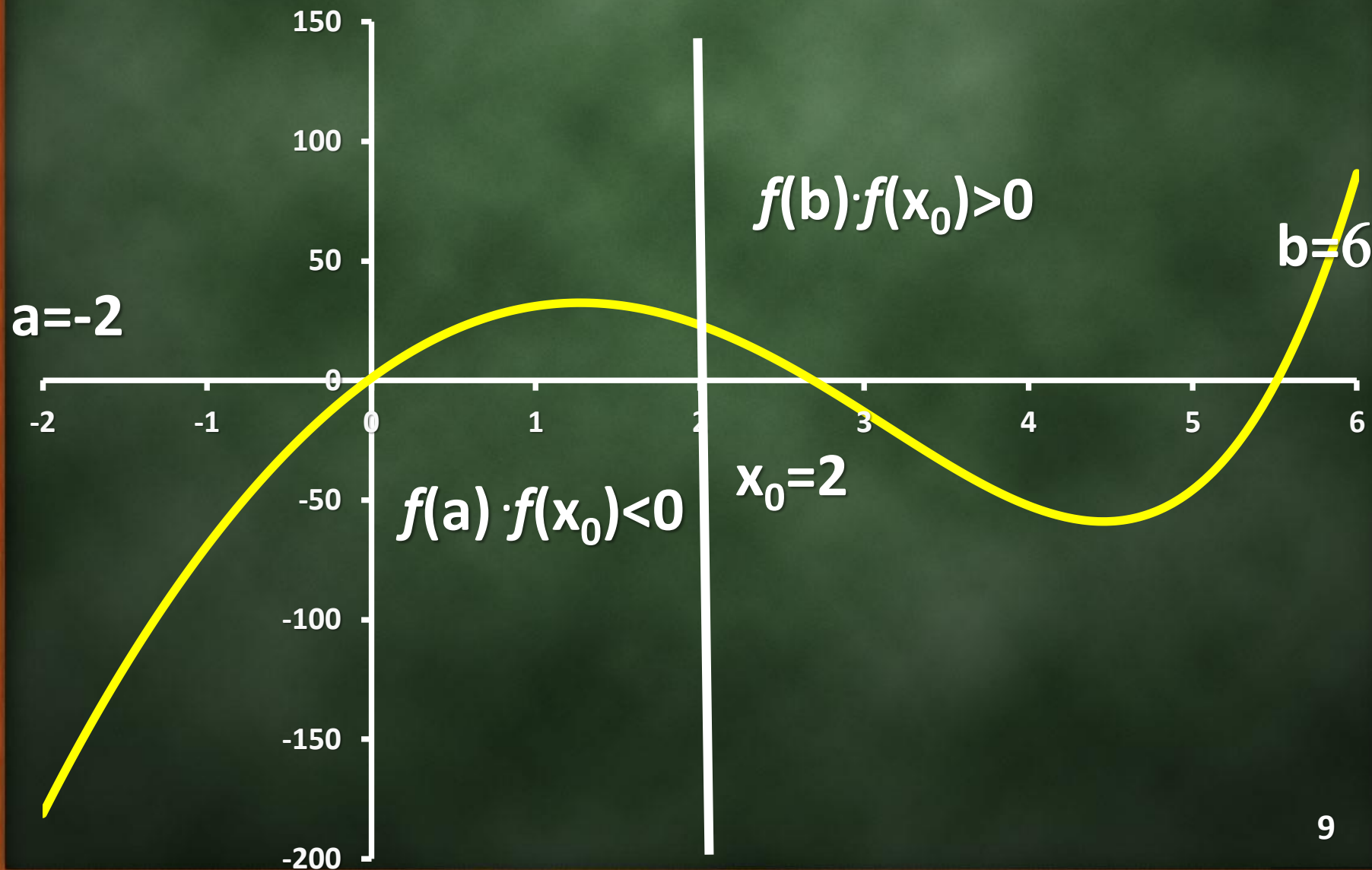
Metoda Bisekcja



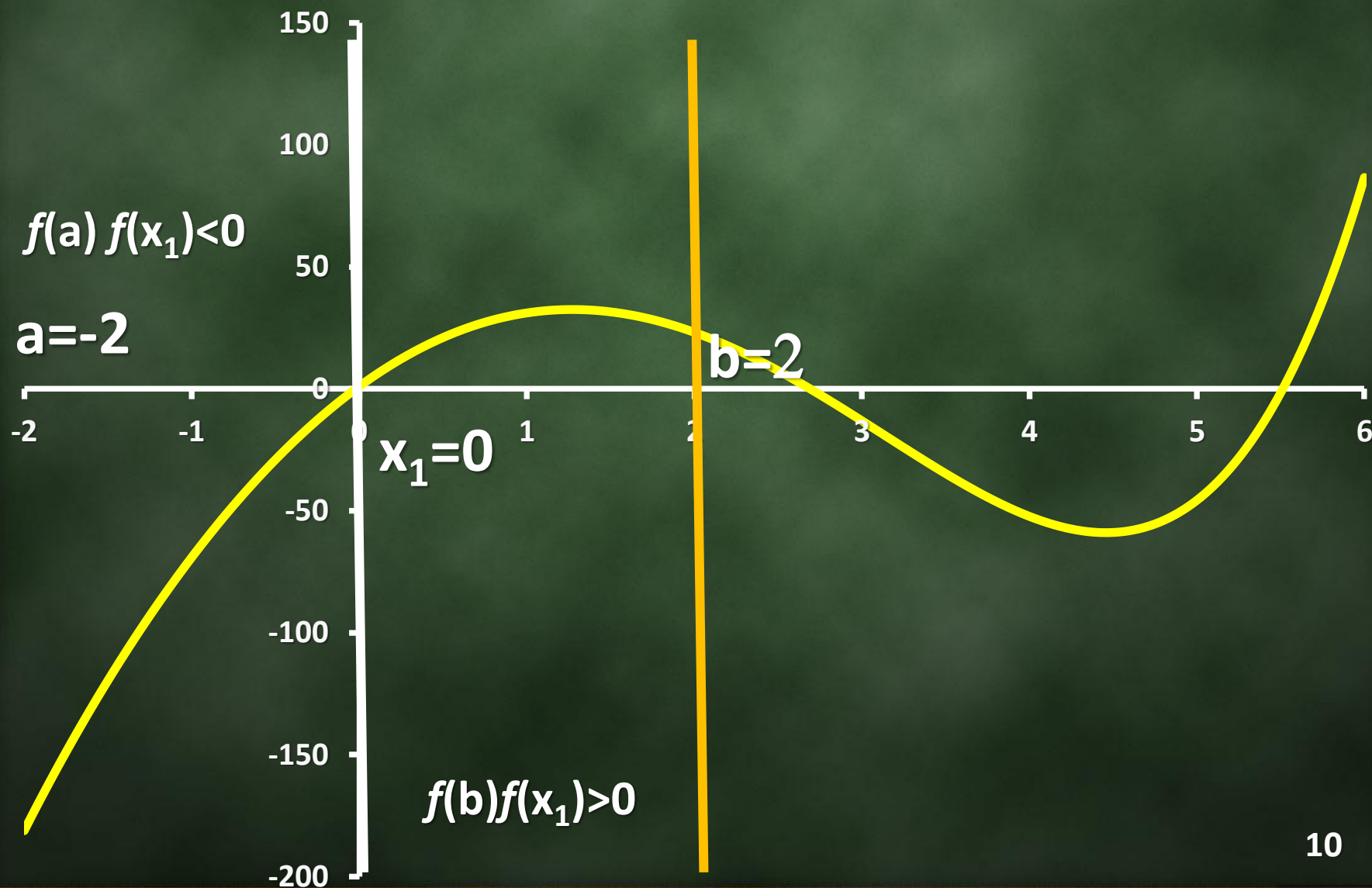
Przykład 1



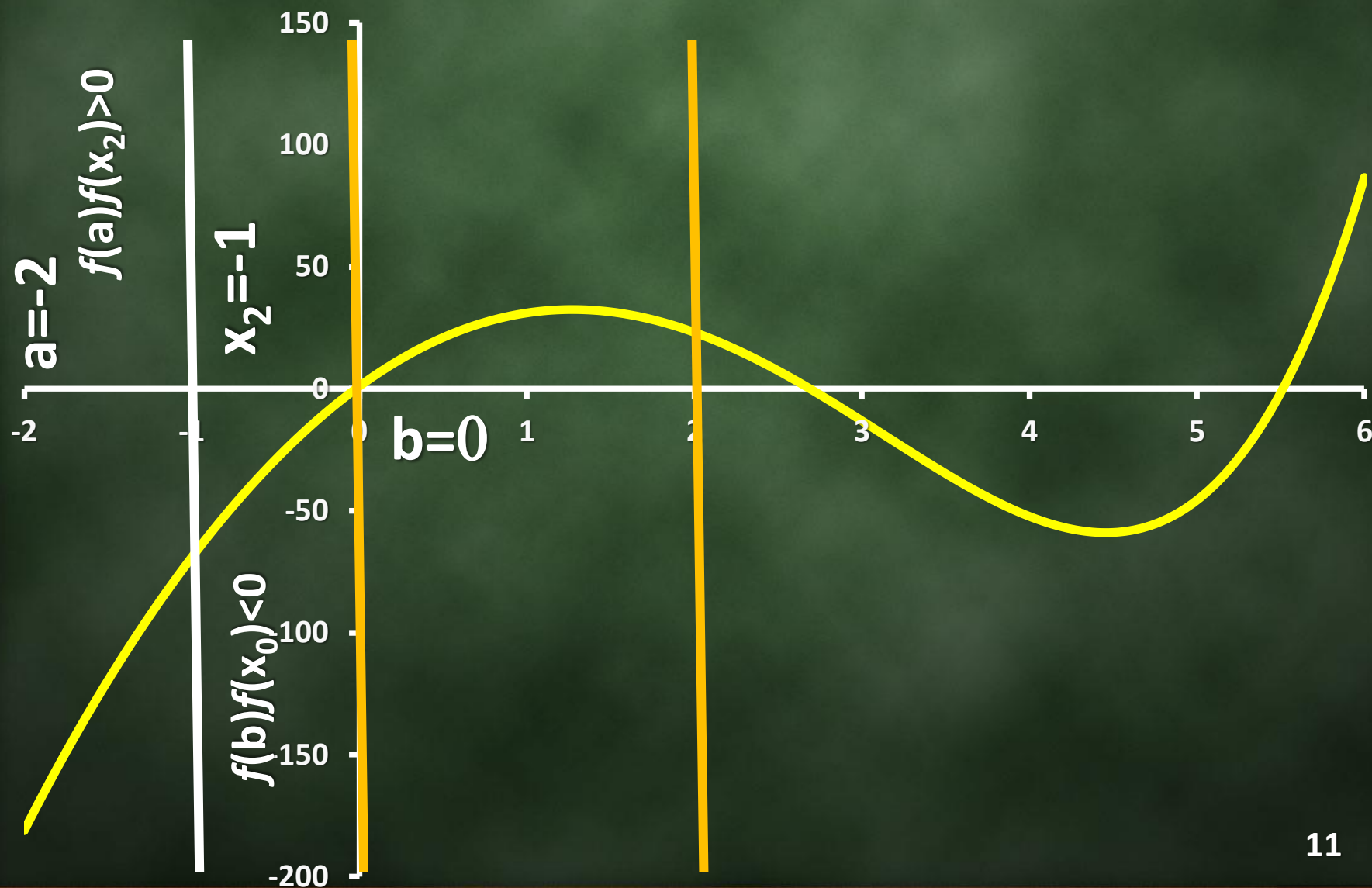
Przykład 1



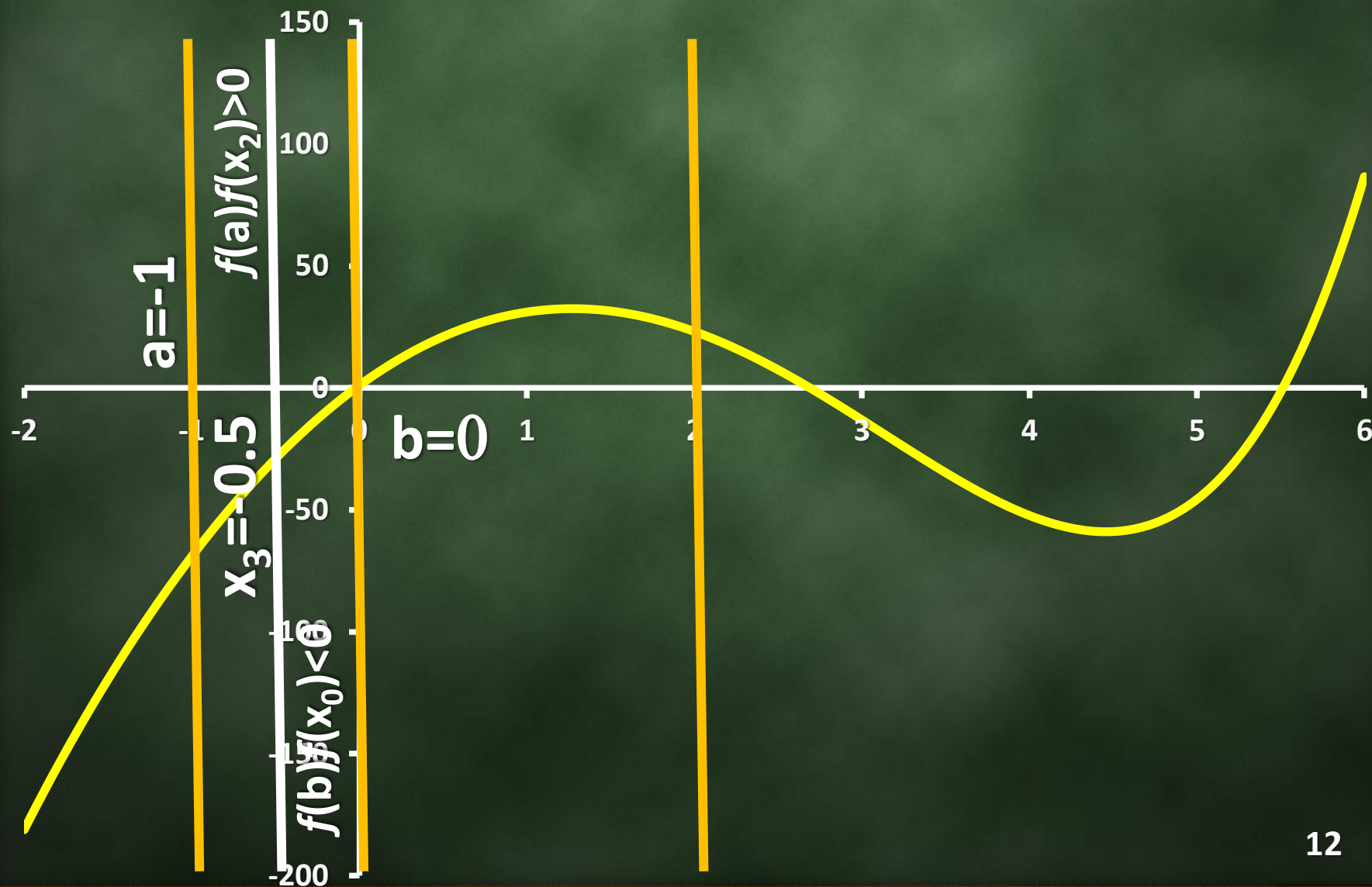
Przykład 1



Przykład 1

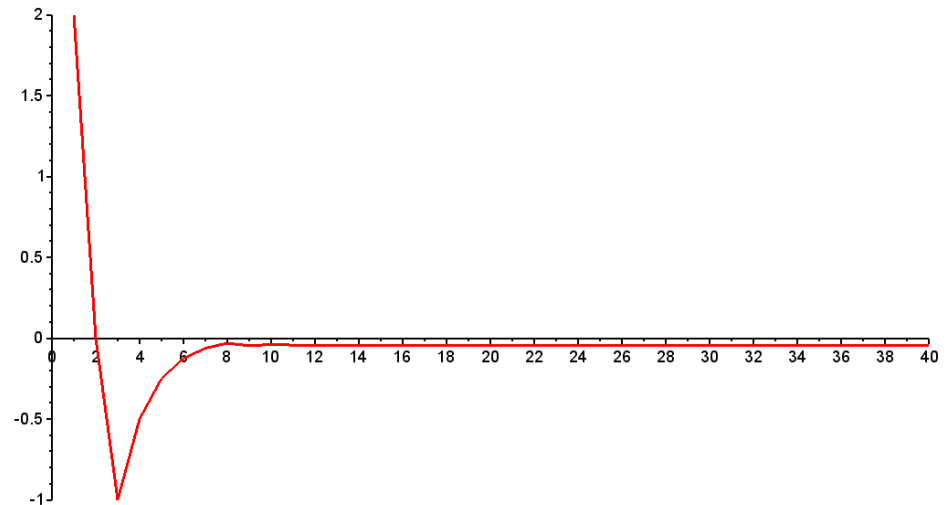


Przykład 1

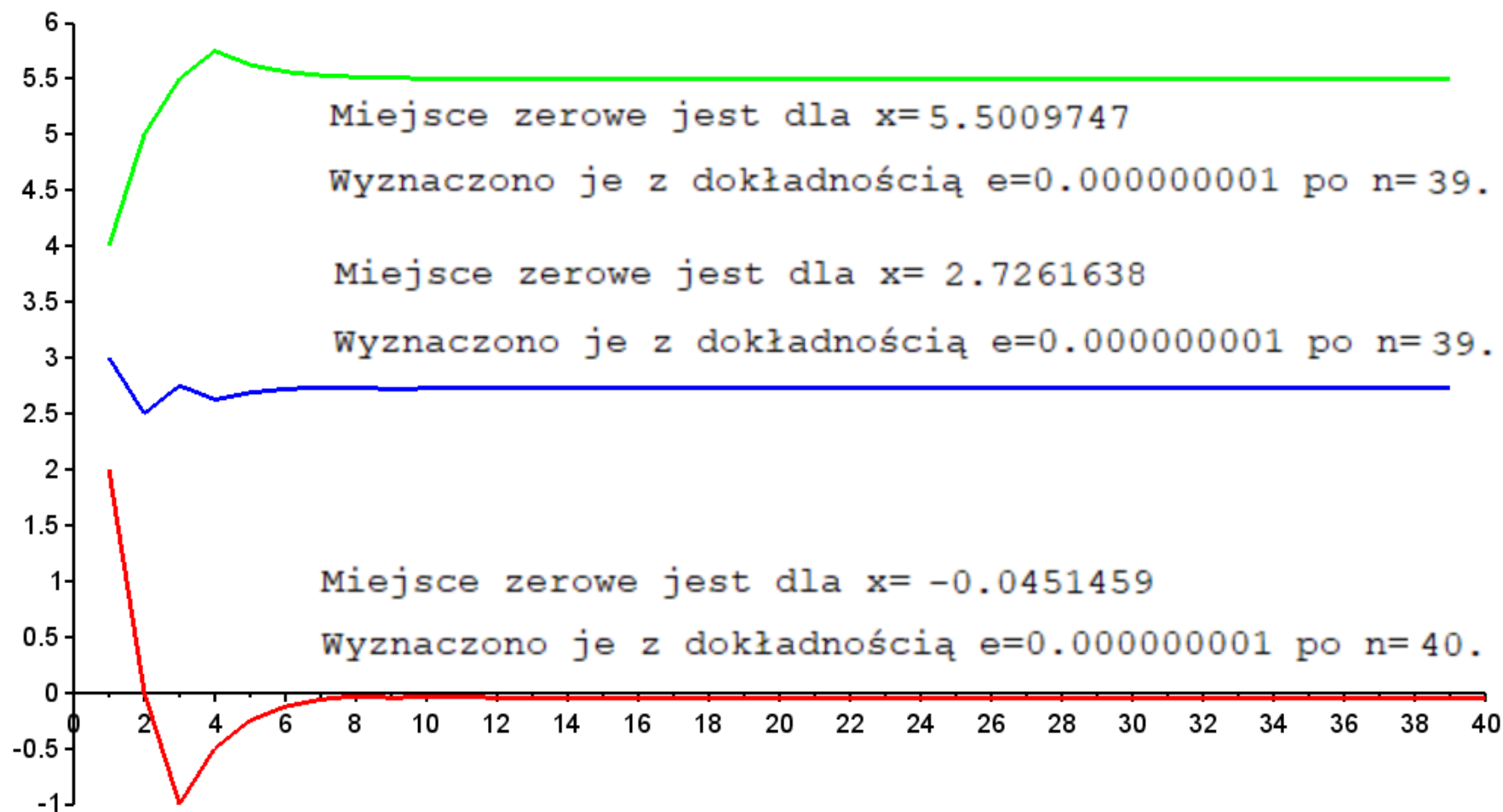


Przykład 1

```
1  clc;clear;
1  function y=fun(x)
2  ... y=log(x+10)+0.065*x^5-20*x^2+50*x;
3  endfunction
5  y=zeros(1,100);
6  a=-2;b=6;e=0.0000000001;
7  x=zeros(1,100);
8  i=1;
9  x(i)=(a+b)/2;
10 y(i)=fun(x(i));
11 while abs(y(i))>e do
12 ... if (fun(b)*fun(x(i)))<0 then
13 ...     a=x(i);
14 ... else
15 ...     b=x(i);
16 ... end
17 ... i=i+1;
18 ... x(i)=(a+b)/2;
19 ... y(i)=fun(x(i));
20 end
```



Przykład 1



Metoda Regula Falsi

- Nazwa metody pochodzi od złożenia dwóch słów łacińskich regula – linia i falsus – fałszywy i oznacza metodę założenia fałszywej liniowości funkcji
- Działanie metody wynika z założenia że każdą funkcję na dostatecznie krótkim przedziale można aproksymować prostą

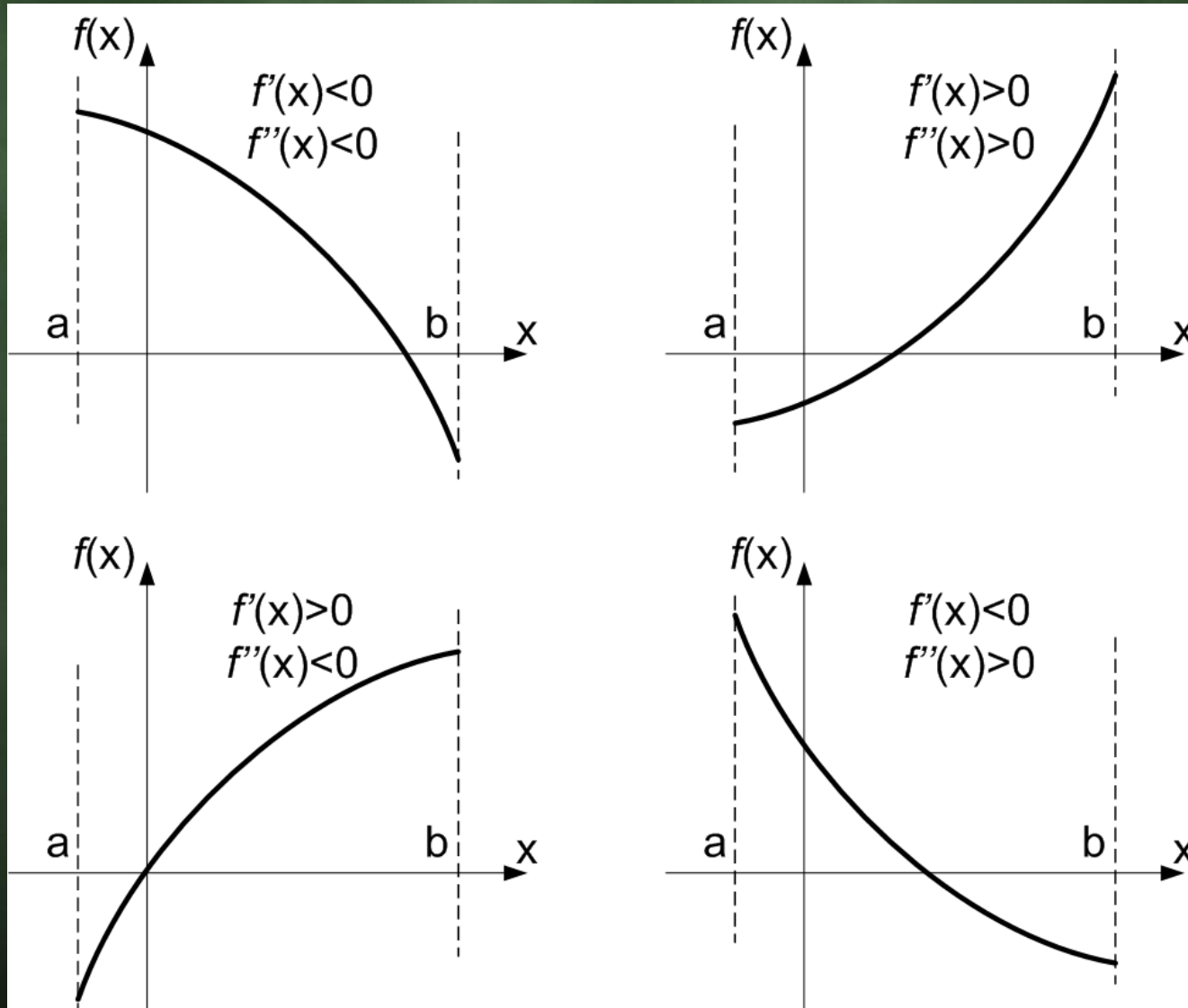
Metoda Regula Falsi

- Funkcja rozwiązywana metodą Regula Falsi musi spełniać warunki:
 - Jest funkcją klasy C^2 w przedziale $\langle a, b \rangle$
 - W punktach a i b funkcja przyjmuje wartości o przeciwnych znakach – $f(a)f(b) < 0$
 - Pierwsza i druga pochodna funkcji w przedziale $\langle a, b \rangle$ mają stały znaki i są różne od 0

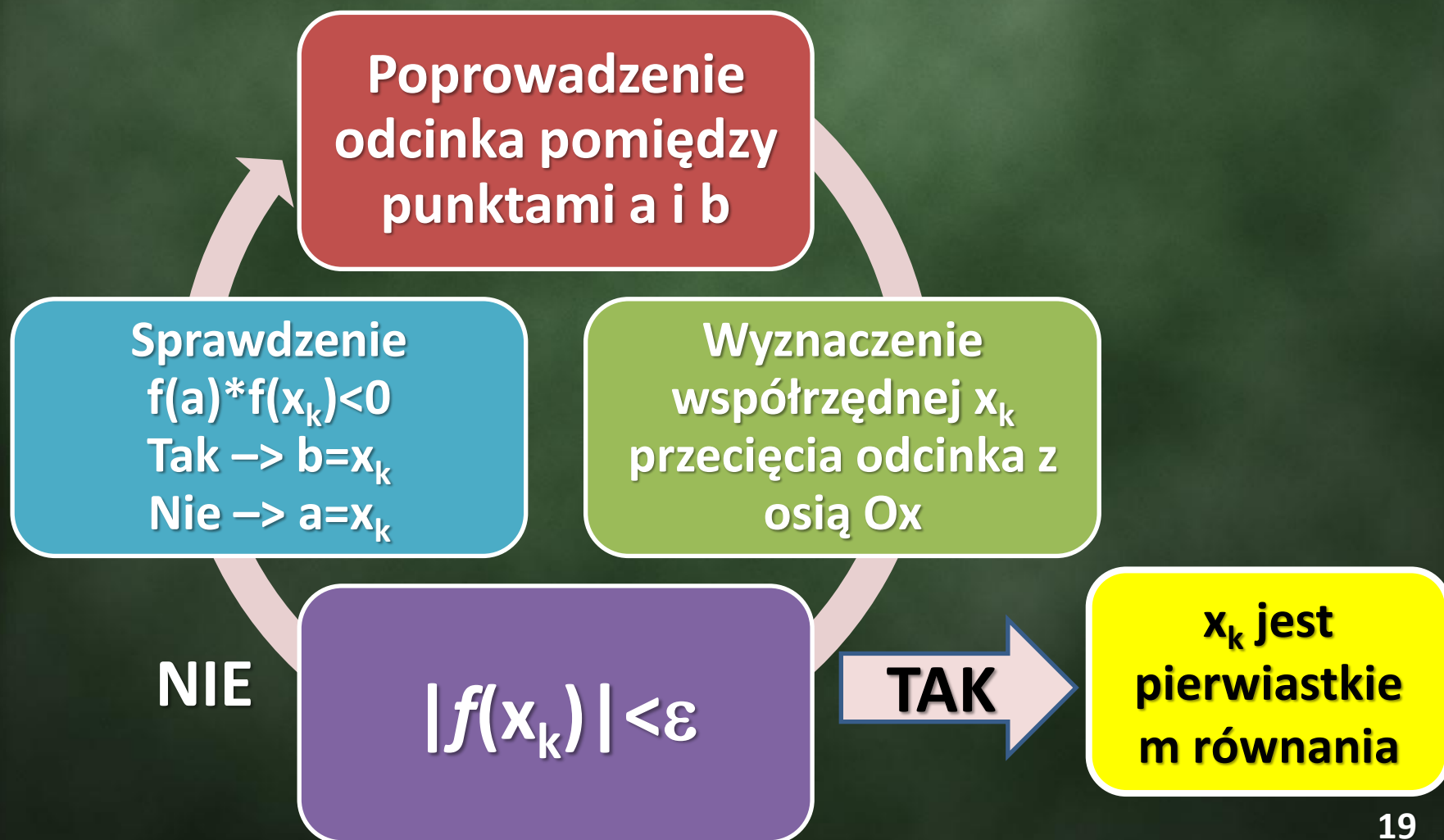
Metoda Regula Falsi

- Metoda będzie zbieżna jeżeli w analizowanym przedziale będzie jedno rozwiązanie
- Spełnienie warunków pochodnych oznacza że funkcja może przyjmować jedno z kształtów

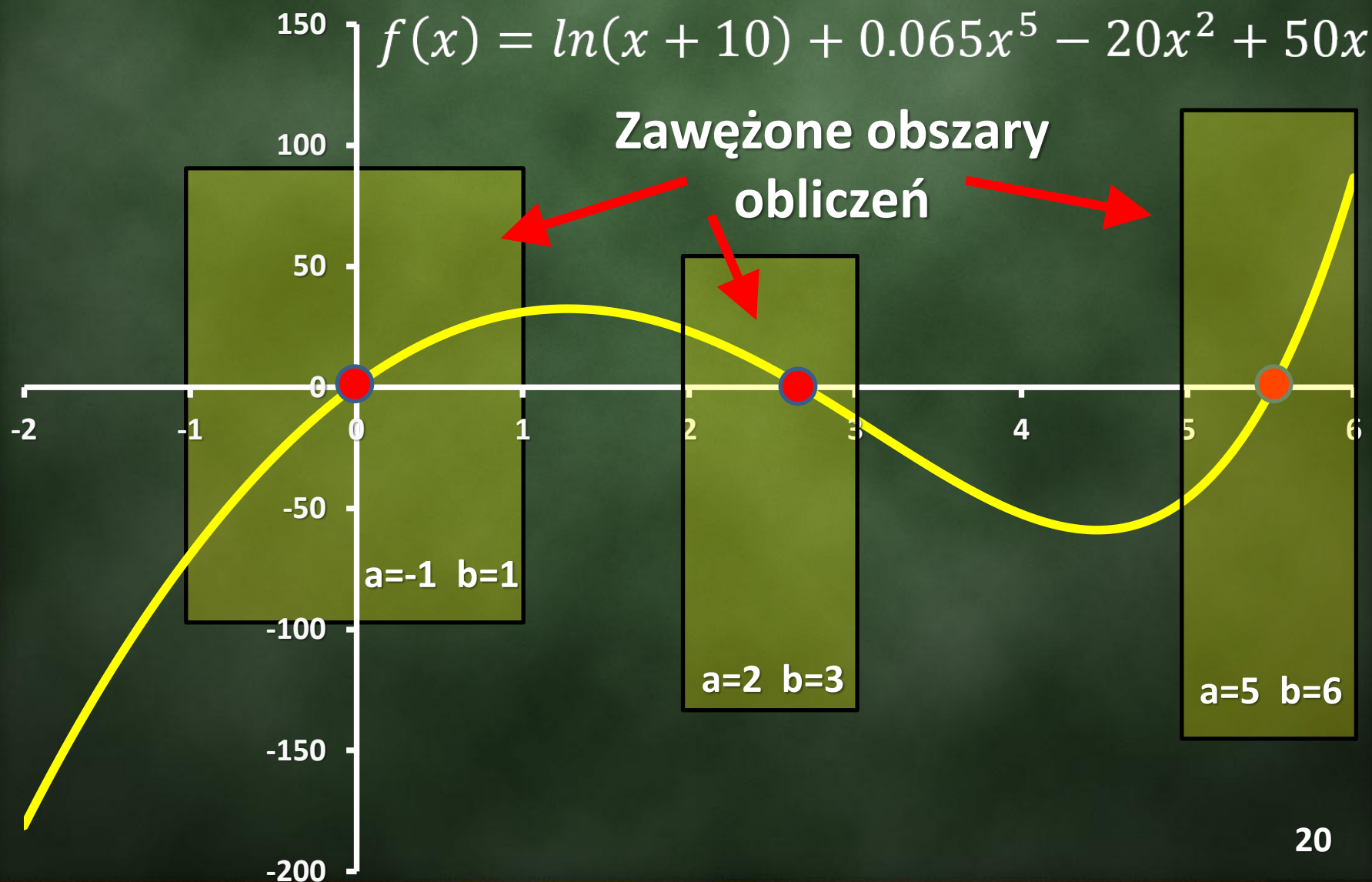
Metoda Regula Falsi



Metoda Regula Falsi

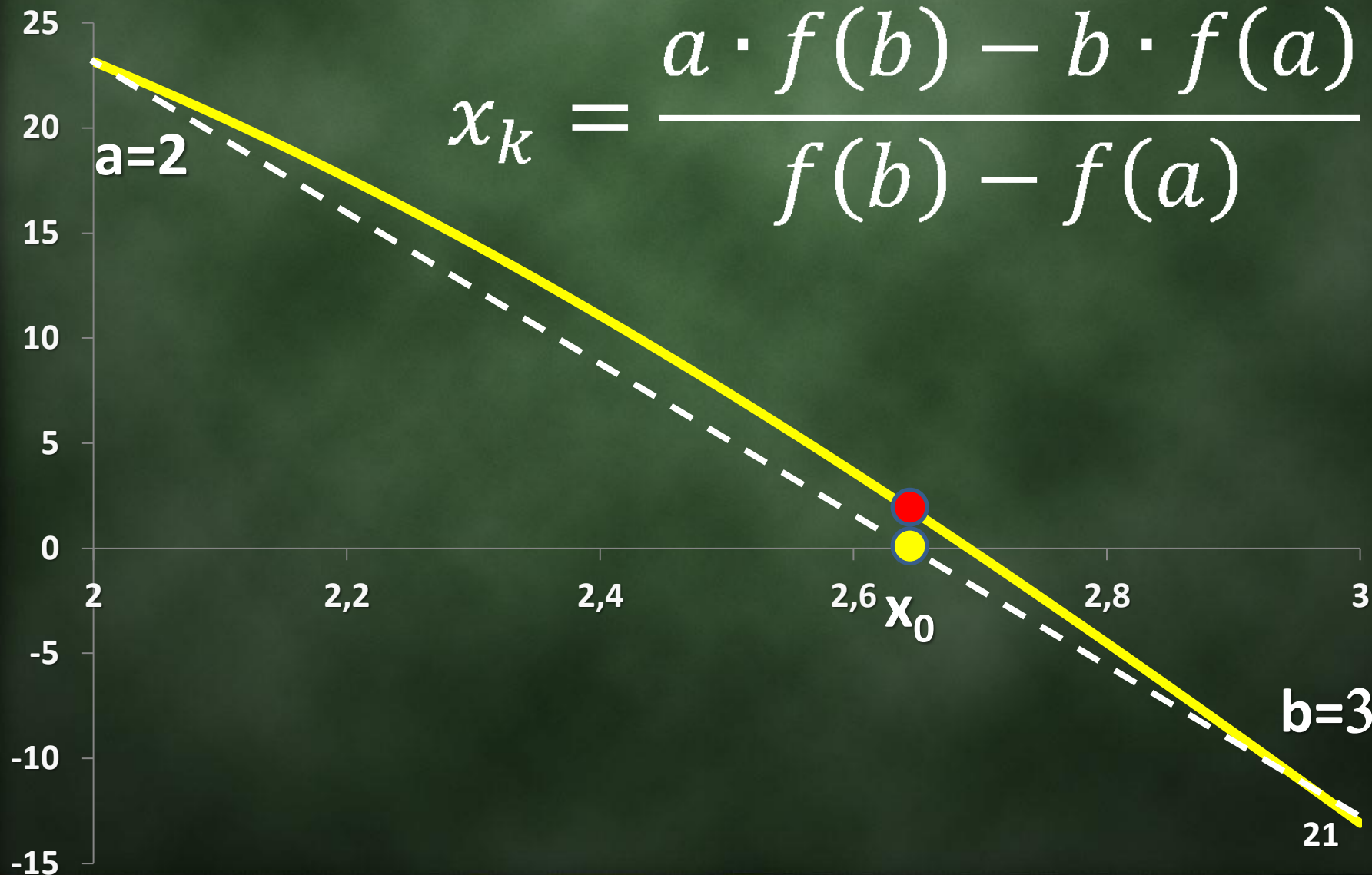


Przykład 2

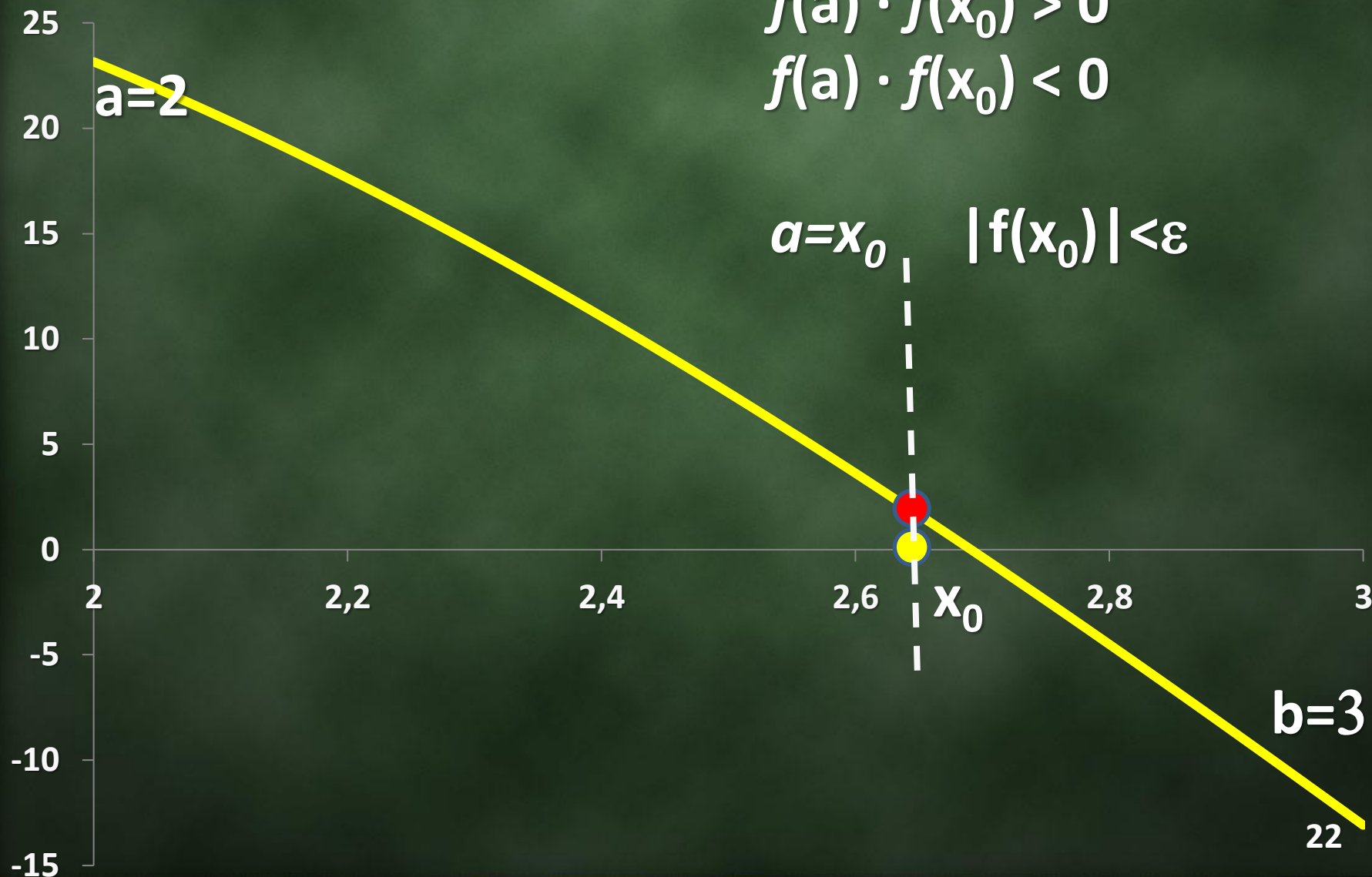


Przykład 2

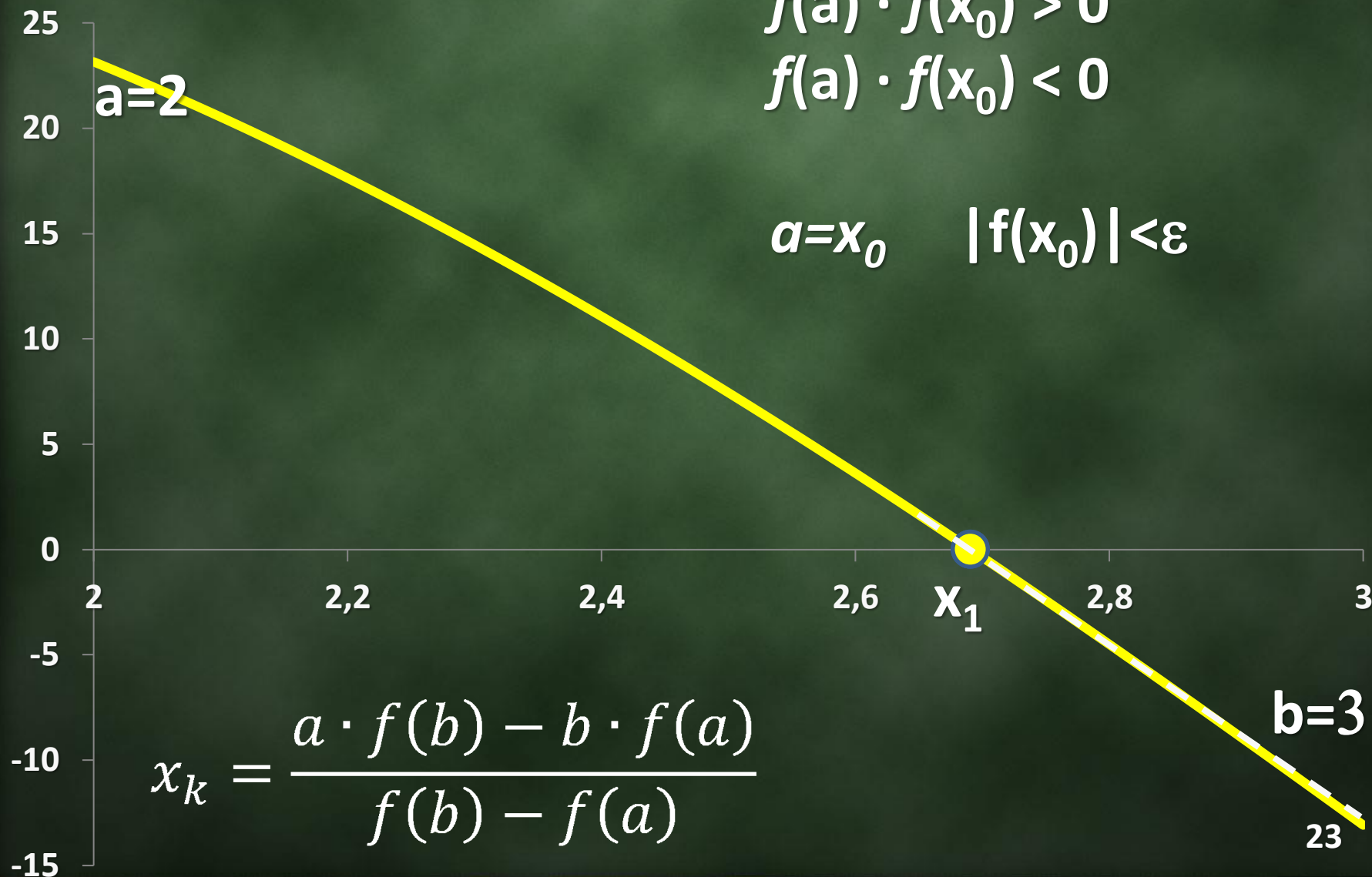
$$x_k = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$



Przykład 2

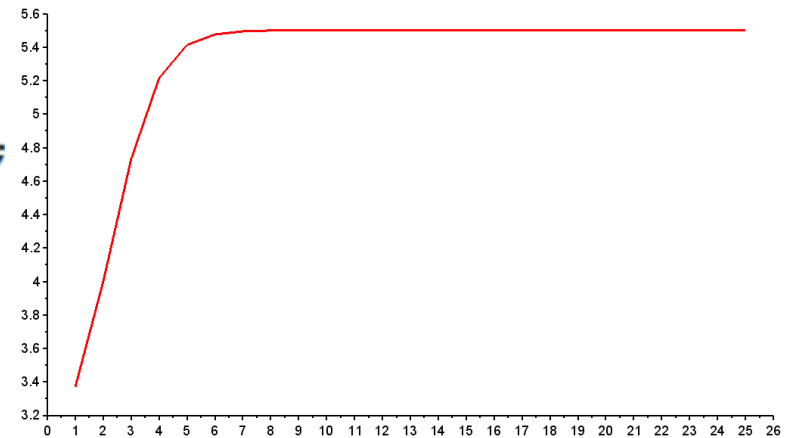


Przykład 2



Przykład 2

```
1 clc;clear;
1 function y=fun(x)
2     y=log(x+10)+0.065*x^5-20*x^2+50*x;
3 endfunction
5 y=zeros(1,100);
6 a=-2;b=6;e=0.0000000001;
7 x=zeros(1,100);
8 i=1;
9 x(i)=(a*fun(b)-b*fun(a))/(fun(b)-fun(a));
10 y(i)=fun(x(i));
11 while abs(y(i))>e-do
12     if (fun(a)*fun(x(i)))<0-then
13         b=x(i);
14     else
15         a=x(i);
16     end
17     i=i+1;
18 x(i)=(a*fun(b)-b*fun(a))/(fun(b)-fun(a));
19     y(i)=fun(x(i));
20     disp(y(i));
21 end
```



Przykład 2

Miejsce zerowe jest dla $x = 5.5009747$

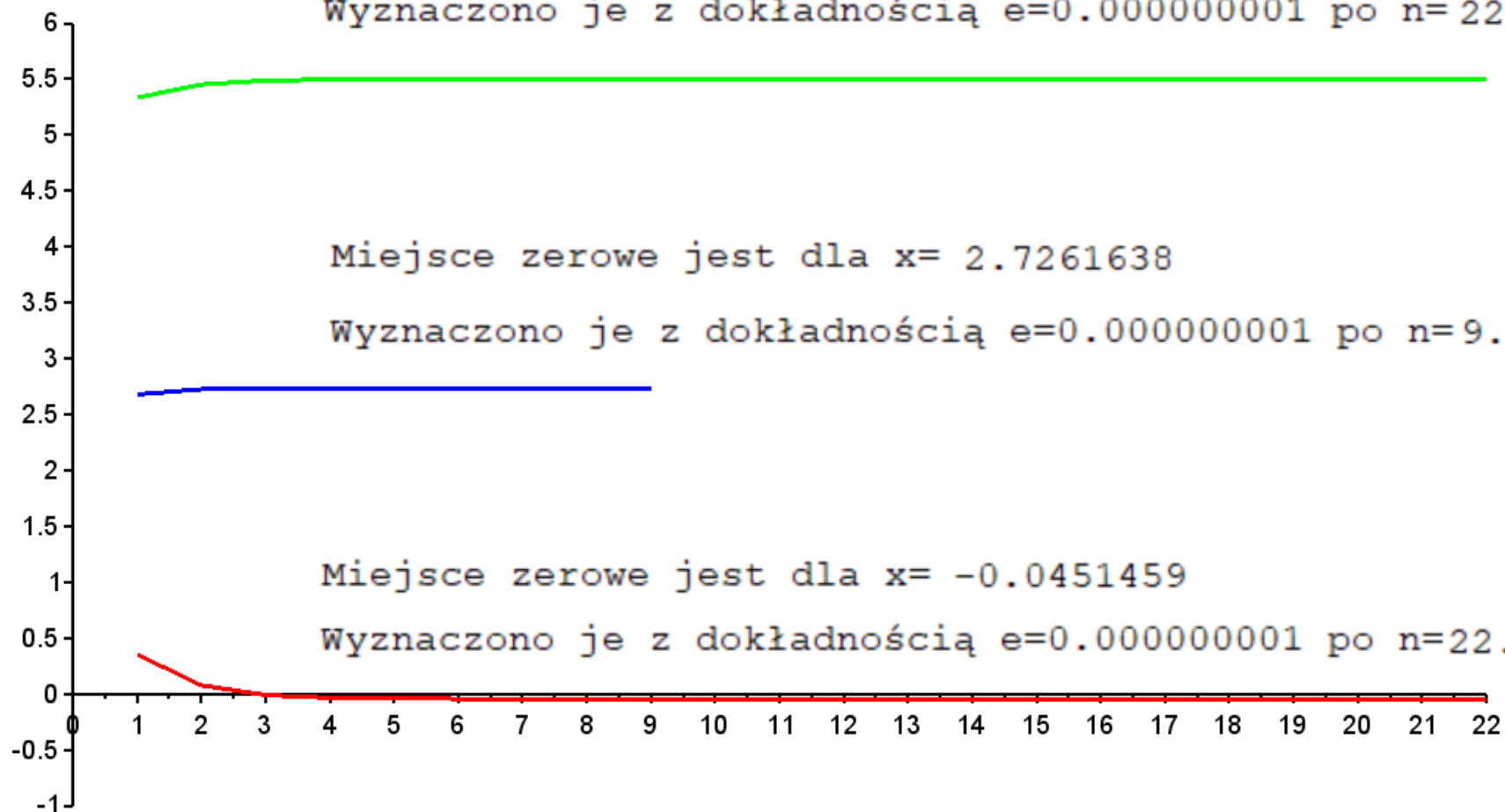
Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 22$.

Miejsce zerowe jest dla $x = 2.7261638$

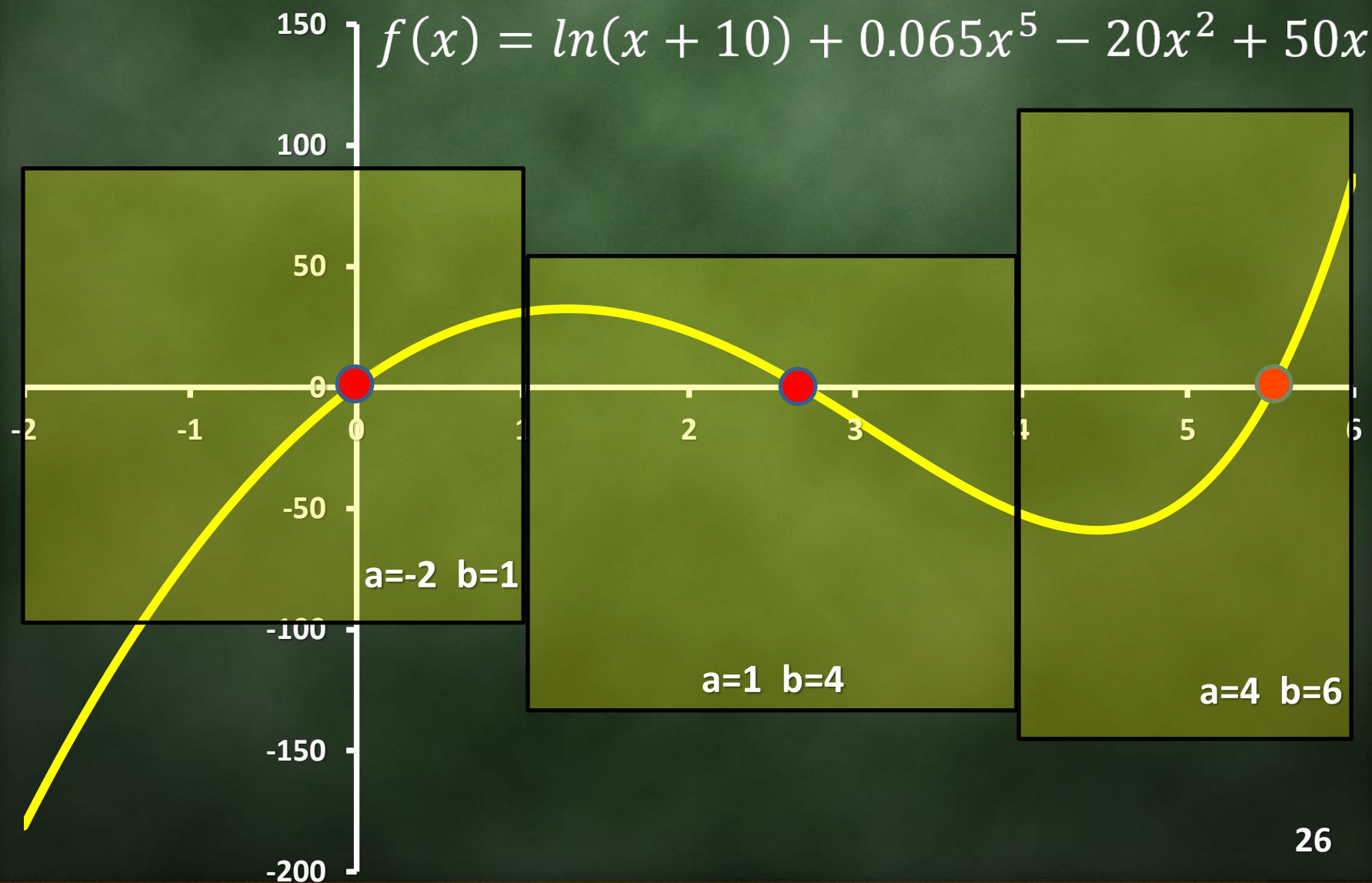
Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 9$.

Miejsce zerowe jest dla $x = -0.0451459$

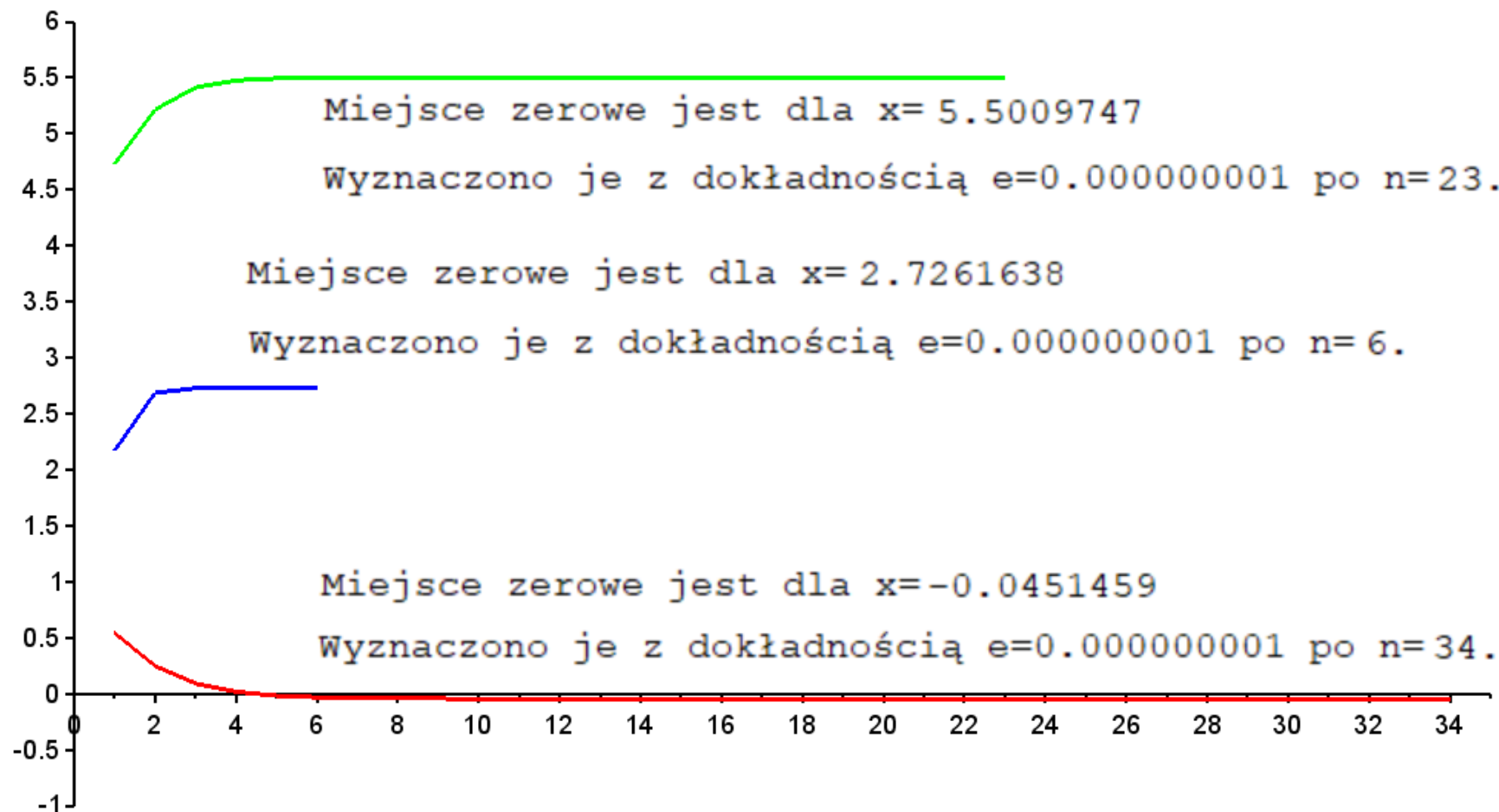
Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 22$.



Przykład 2



Przykład 2



Metoda siecznych

- Metoda stanowi rozwinięcie metody Reguli Falsi
- Kolejne przybliżenia wyznaczane są na podstawie wcześniejszych przybliżeń

Metoda siecznych

- Za wartości początkowe przyjmuje się granice przedziału obliczeń
- Metoda nie wymaga spełnienia warunku $f(a)f(b) < 0$, jednakże przy jego niespełnieniu wyznaczone miejsce zerowe może znajdować się poza początkowym przedziałem obliczeń

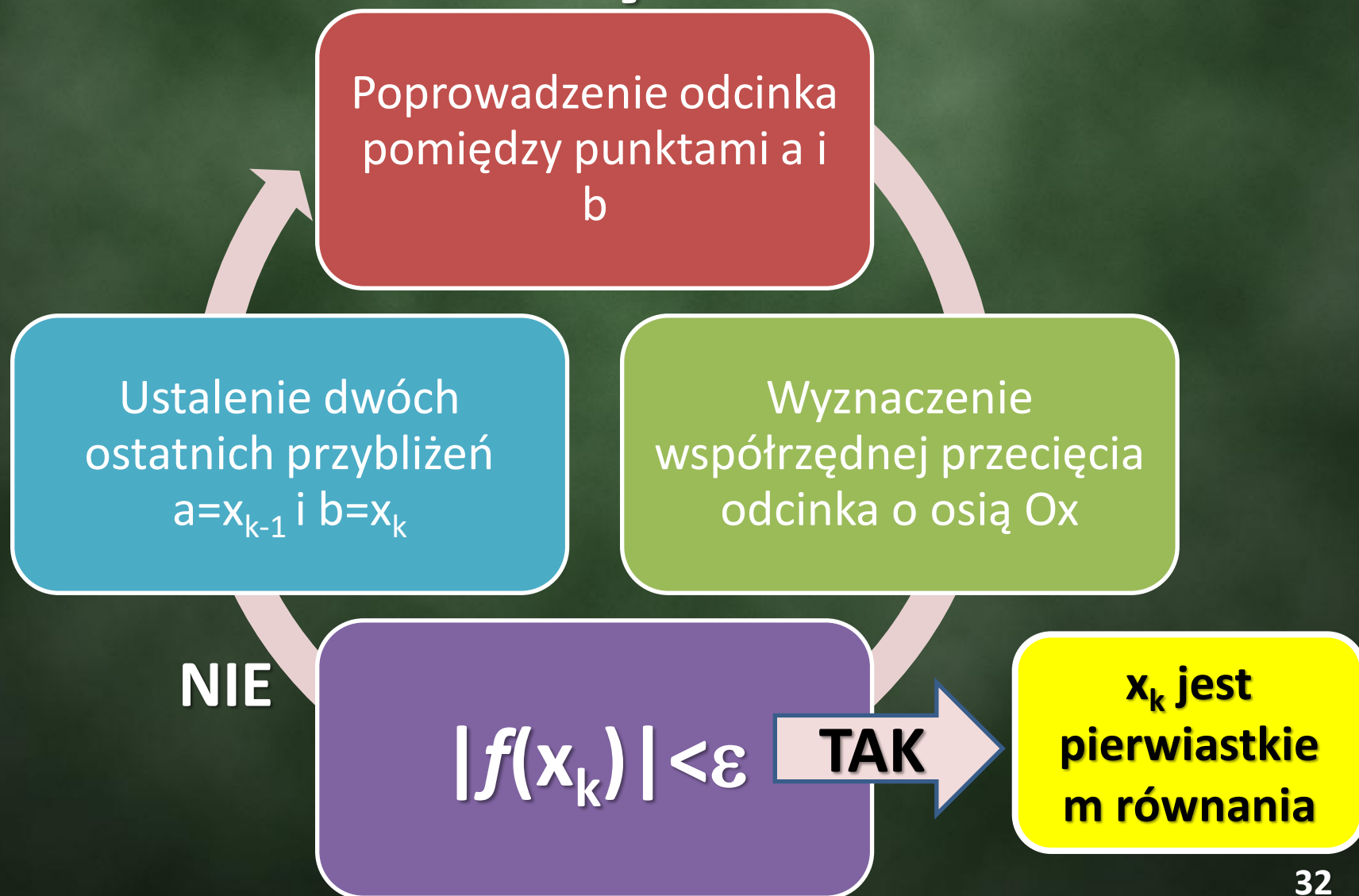
Metoda siecznych

- Metoda może nie dawać wyniku zbieżnego jeżeli początkowe przybliżenie, definiowane przez granice przedziału $\langle a, b \rangle$, jest zbyt duże
- Jeżeli różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami będzie podobna do granicznej dokładności e , może spowodować że kolejne przybliżenie będzie błędne, utraczona zostanie zbieżność

Metoda siecznych

- Konieczne jest więc dołożenie dodatkowego warunku sprawdzającego czy $x_{n+1} - x_n$ jest malejące, jeżeli zacznie rosnać należy przerwać obliczenia.

Metoda siecznych

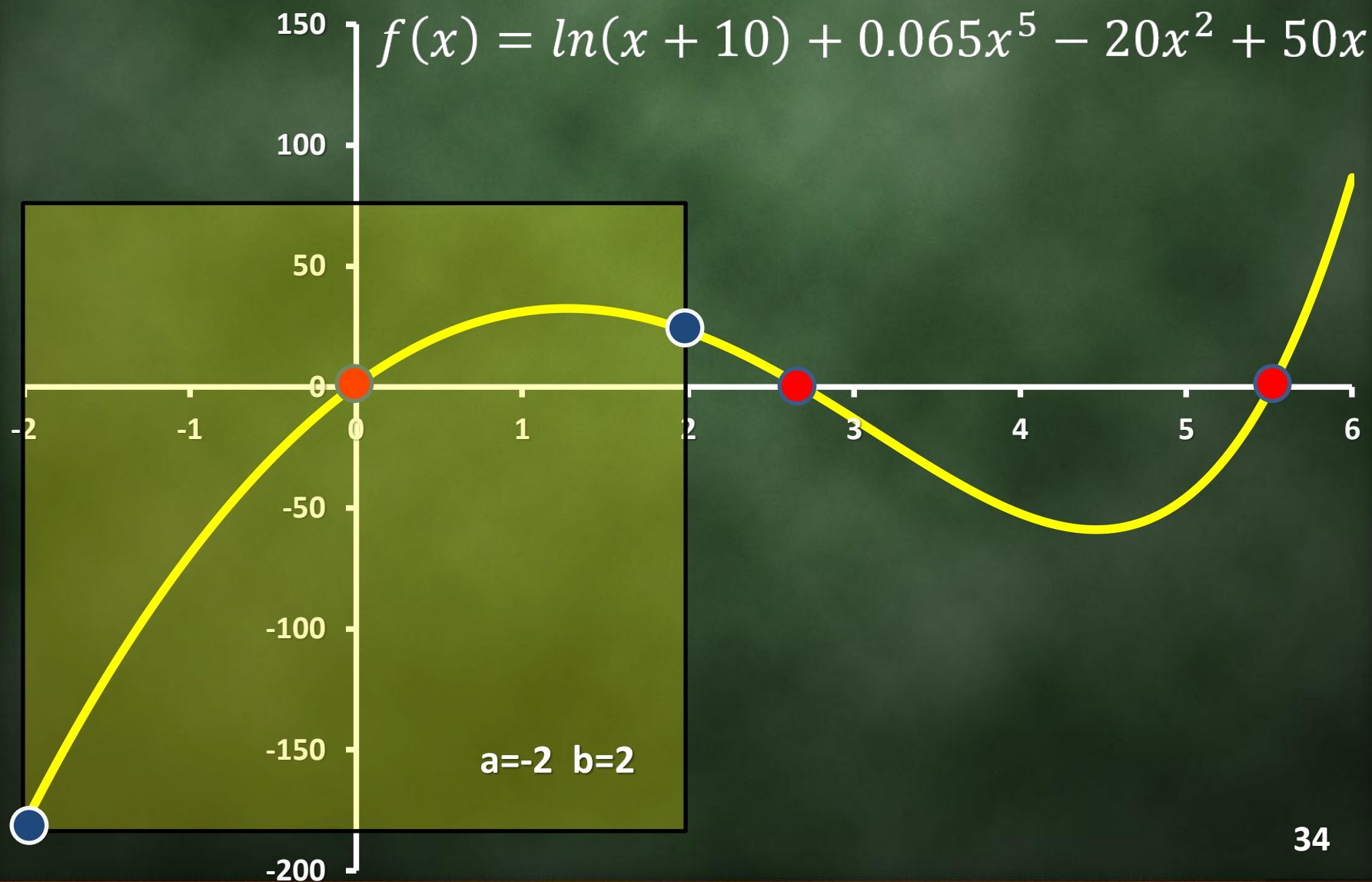


Metoda siecznych

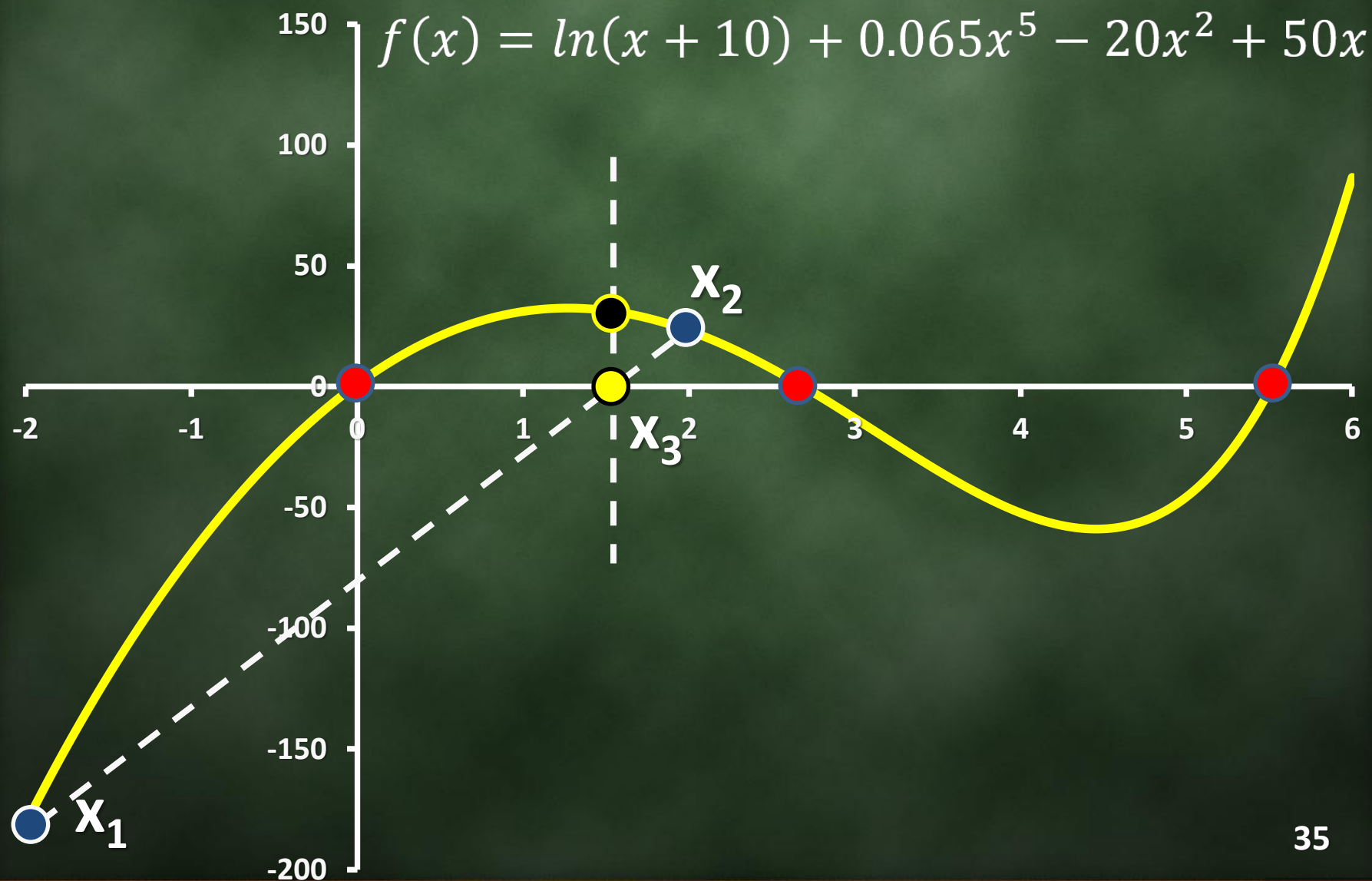
- Kolejne przybliżenia wyznaczane są na podstawie poniższej zależności
- Wartości początkowe $x_k=b$, $x_{k-1}=a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

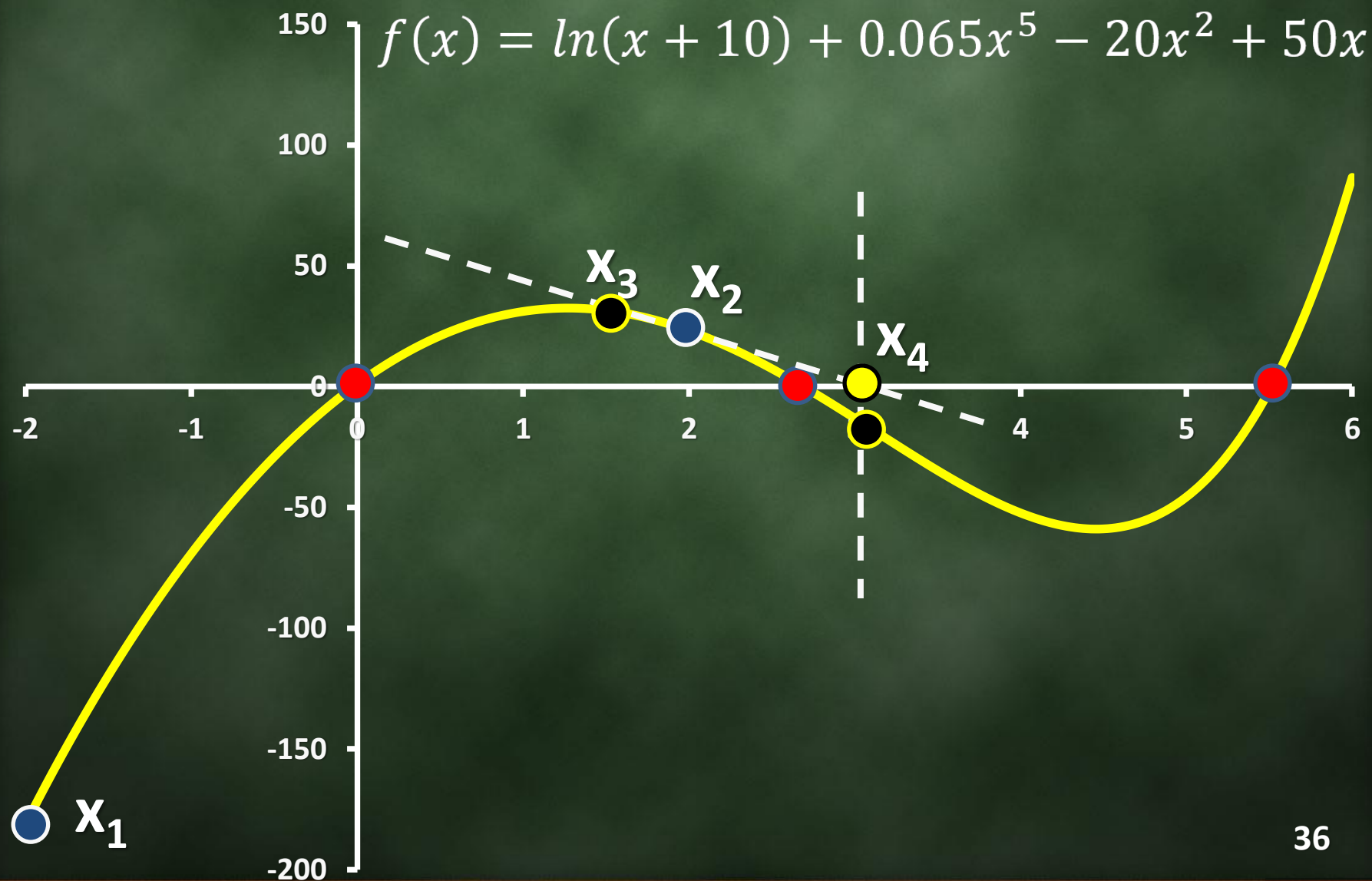
Przykład 3



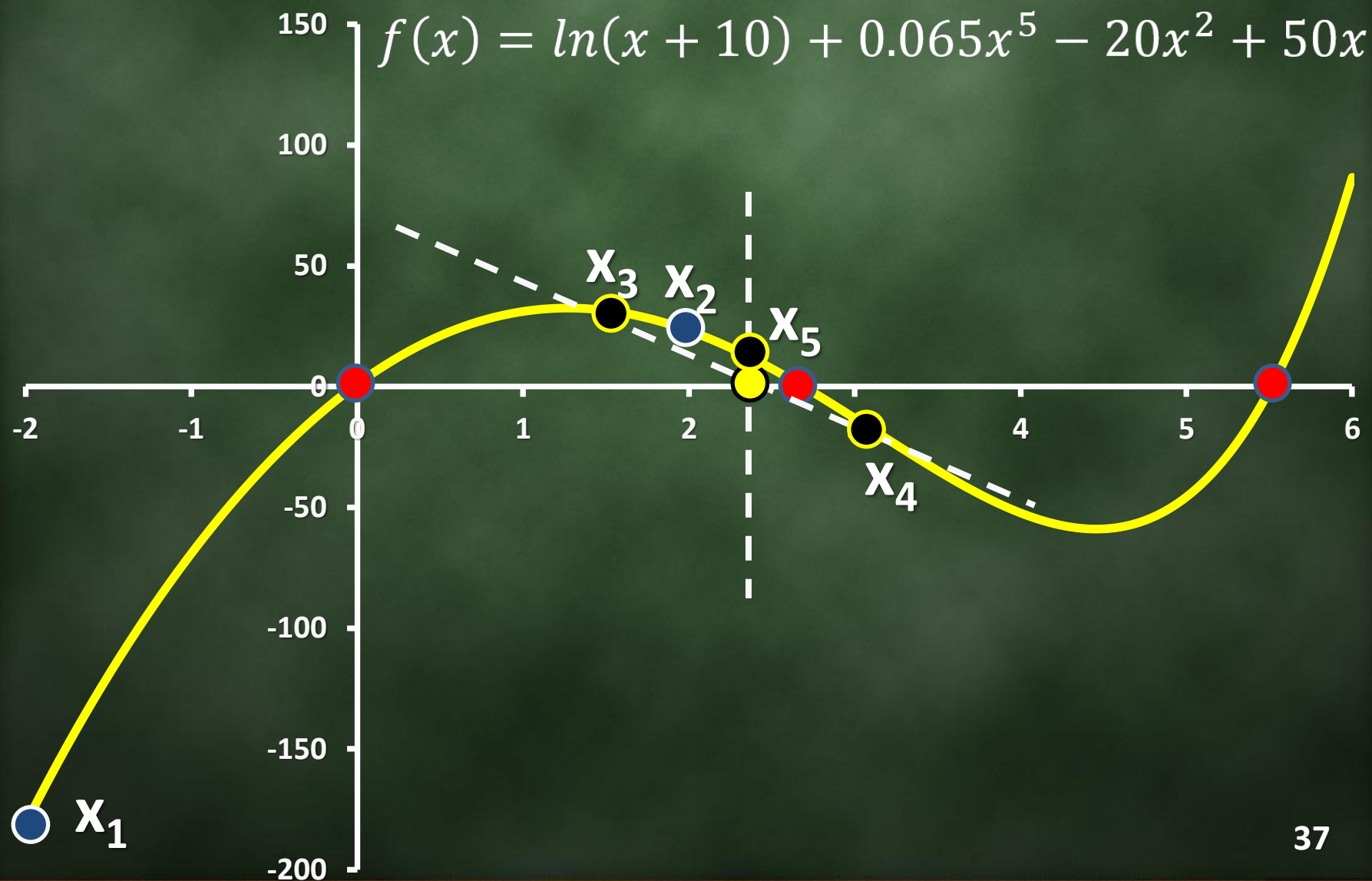
Przykład 3



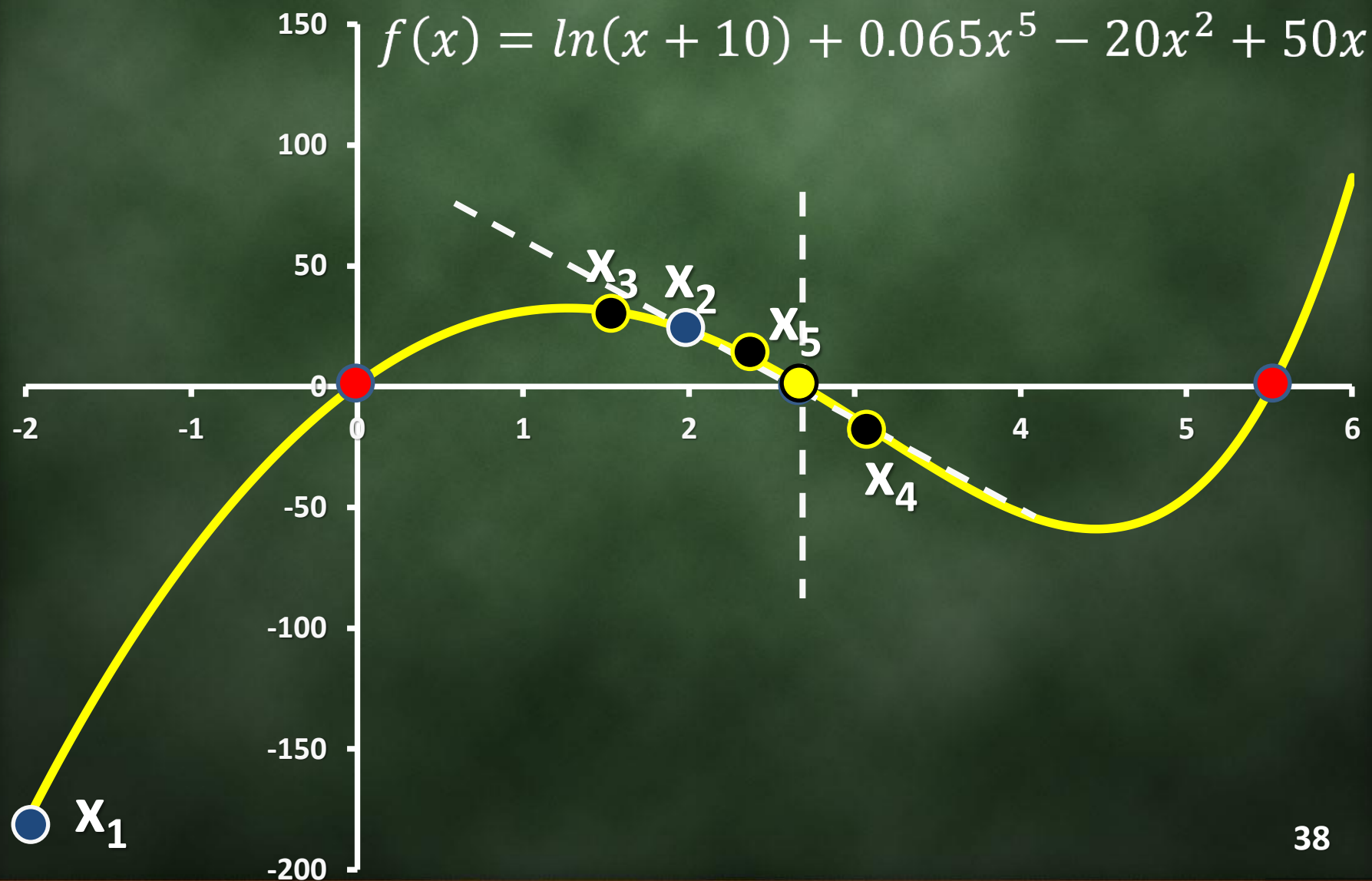
Przykład 3



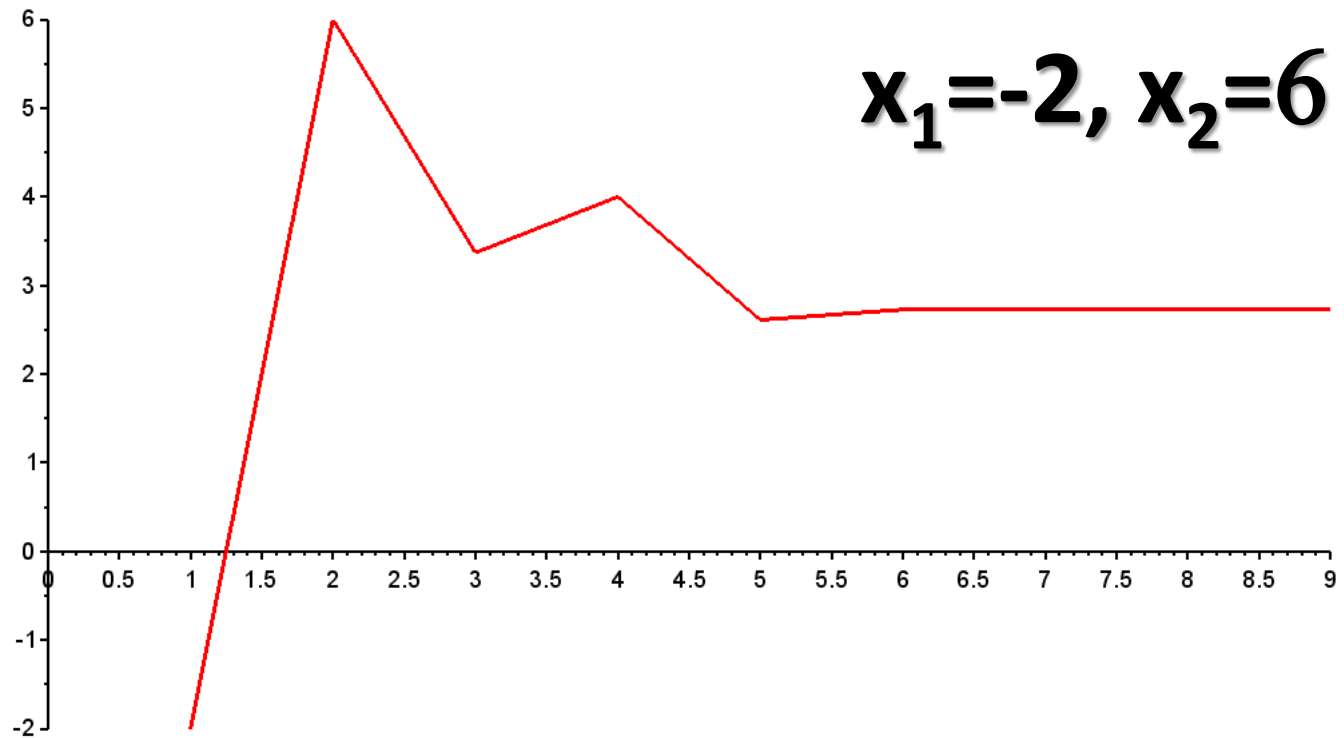
Przykład 3



Przykład 3



Przykład 3



```

9  x(1)=a;
10 x(2)=b;
11 x(i)=x(i-1)-(fun(x(i-1))*(x(i-1)-x(i-2)))/(fun(x(i-1))-fun(x(i-2)));
12 y(i)=fun(x(i));
13 while abs(y(i))>e do
14     i=i+1;
15 x(i)=x(i-1)-(fun(x(i-1))*(x(i-1)-x(i-2)))/(fun(x(i-1))-fun(x(i-2)));
16     y(i)=fun(x(i));
17 end

```

Przykład 3

Przeprowadzono symulacje dla kilku wartości początkowych:

1. $x_1=-2, x_2=2$
2. $x_1=1, x_2=5$
3. $x_1=3, x_2=6$

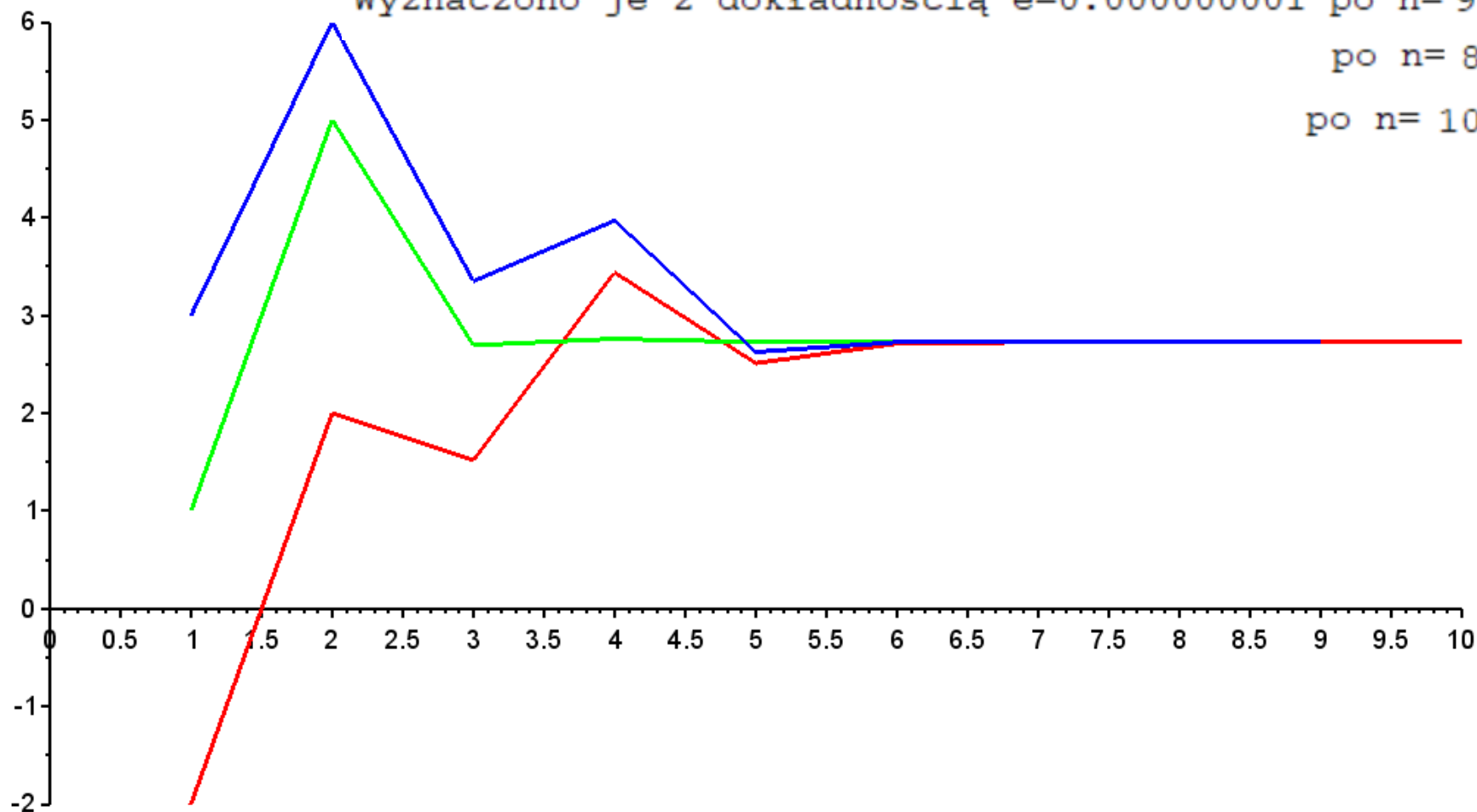
Przykład 3

Miejsce zerowe jest dla $x = 2.7261638$

Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 9$.

po $n = 8$.

po $n = 10$.



Przykład 3

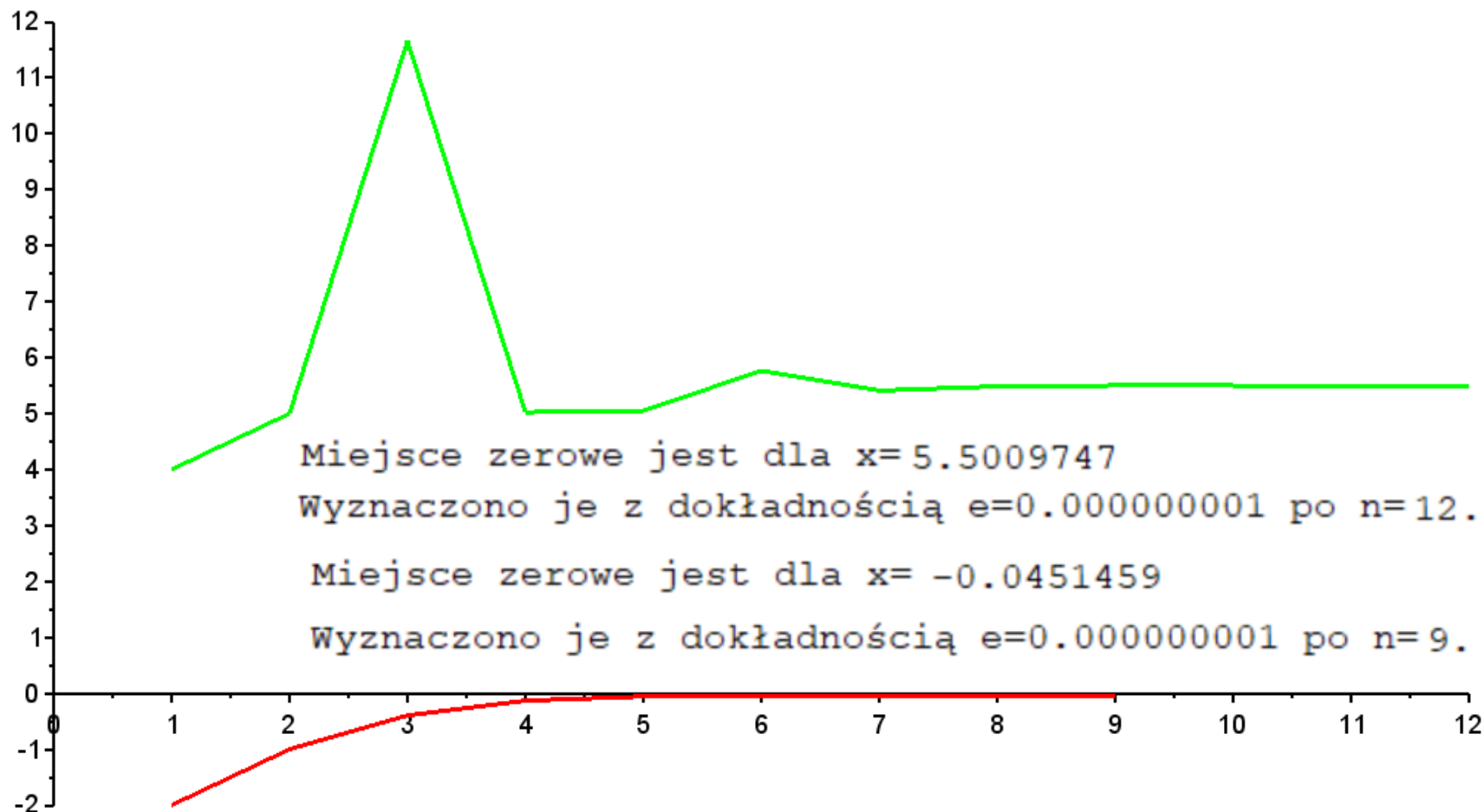
- Konieczna jest optymalizacja doboru punktów startowych

1. $x_1 = -2, x_2 = -1$

2. $x_1 = 4, x_2 = 5$

- W przypadku funkcji okresowych możliwe jest znalezienie miejsc zerowych poza przedziałem

Przykład 3



Metoda Newtona-Raphsona

- Metoda określana często jako metoda stycznych
- Metoda charakteryzuje się zbieżnością kwadratową

Metoda Newtona-Raphsona

- Analizowana funkcja musi spełniać warunki:
 - W analizowanym przedziale posiadać tylko jedno miejsce zerowe
 - Posiadać różne znaki na krańcach analizowanego przedziału $f(a)f(b) < 0$
 - Pierwsza i druga pochodna w analizowanym przedziale mają stały znak

Metoda Newtona-Raphsona

- Metoda polega na aproksymacji funkcji prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $P(x_k, f(x_k))$
- Punkt x_{k+1} przecięcia stycznej z osią Ox jest kolejnym przybliżeniem rozwiązania

Metoda Newtona-Raphsona

- Wzór rekurencyjny realizujący obliczenie kolejnego przybliżenia rozwiązania wymaga znajomości wartości pierwszej pochodnej w punkcie styczności
- Metoda wymaga podania punktu startowego x_0 , właściwy jego dobór ma decydujące znaczenie dla zbieżności rozwiązania

Metoda Newtona-Raphsona

Określenie punktu
startowego –
pierwszego przybliżenia
 $x_k = x_0$

Określenie wartości
funkcji i I pochodnej
funkcji w punkcie x_k

NIE

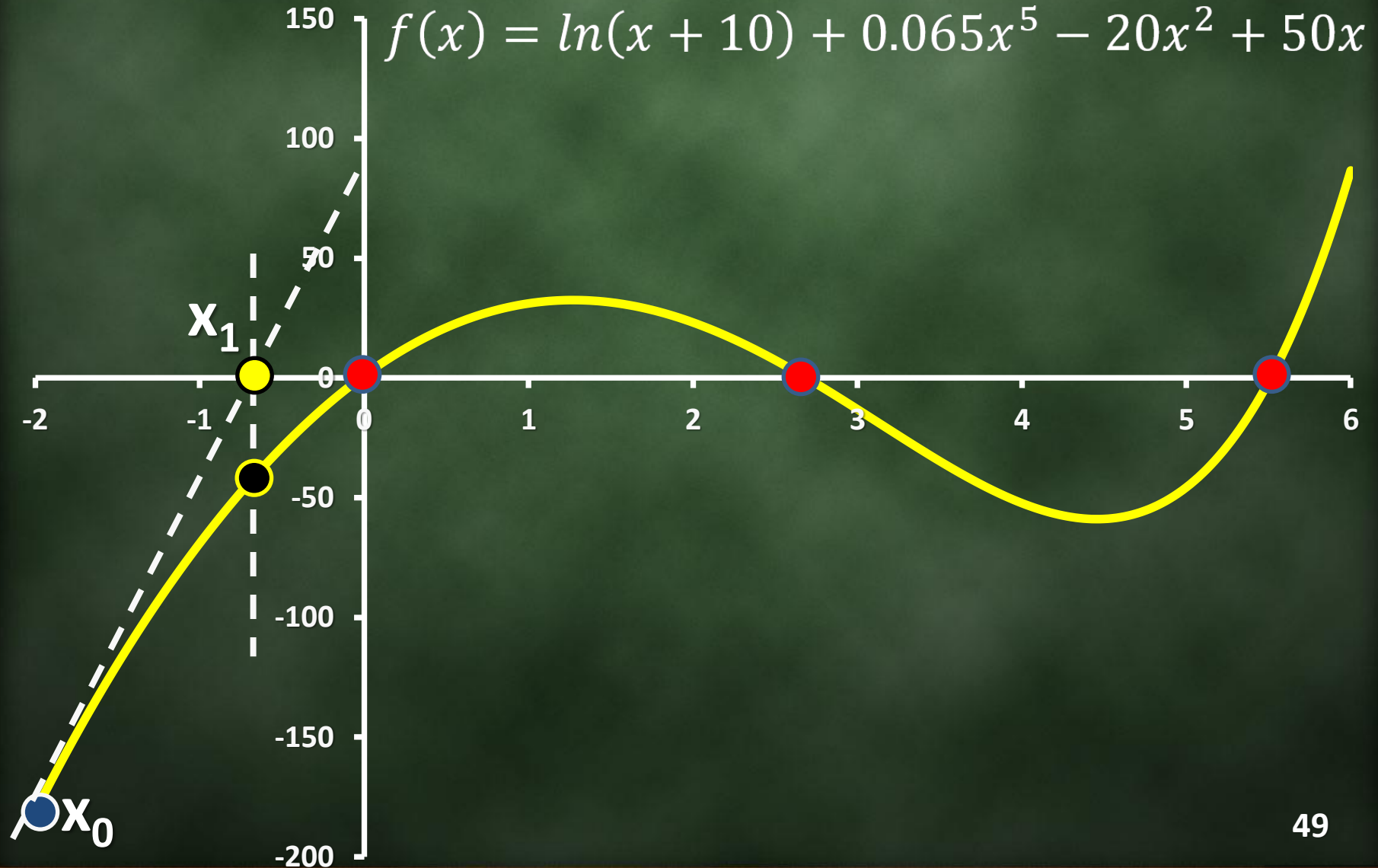
$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

TAK

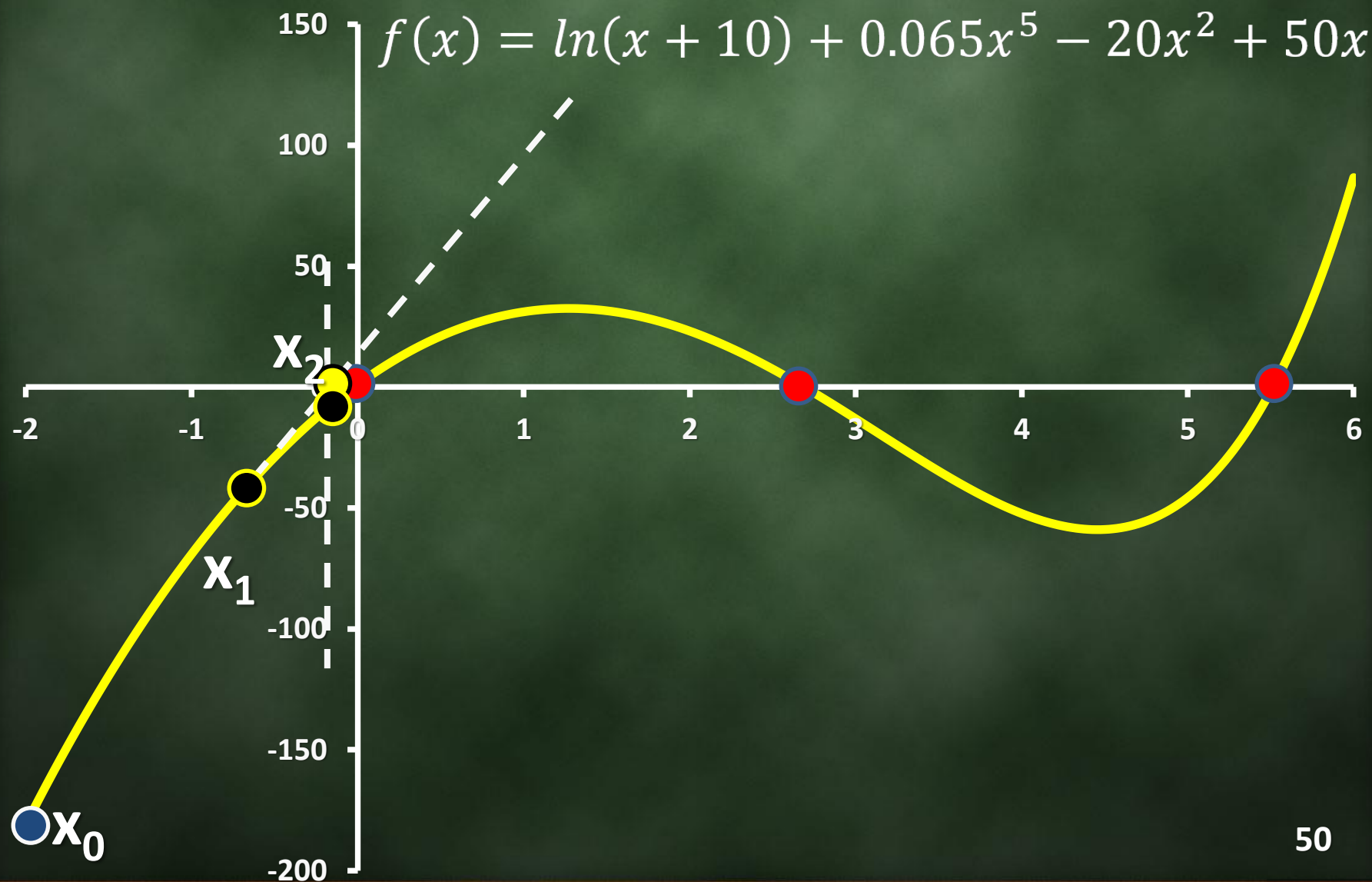
x_k jest
pierwiastkiem
m równania

Wyznaczenie
współrzędnej x_k
przecięcia odcinka z
osią Ox

Metoda Newtona-Raphsona



Metoda Newtona-Raphsona



Metoda Newtona-Raphsona

- Kolejne przybliżenia są wyznaczane ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Wartość pierwszej pochodnej może zostać wprowadzona jako równanie, lub jeżeli program obliczeniowy pozwala liczona w trakcie iteracji

Przykład 4

Pochodna dla analizowanej funkcji:

$$f(x) = \ln(x + 10) + 0.065x^5 - 20x^2 + 50x$$

wynosi:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x + 10} + 0.325x^4 - 40x + 50$$

Przykład 4

- Pochodną funkcji można wyznaczyć za pomocą funkcji scilaba **y=diff(x)** która wyznacza wektor przyrostów dla wektora wejściowego x
- Wyznaczenie pochodnej funkcji po czasie realizuje się:

$$\frac{df(x_k)}{dx_k} = \text{diff}(f(x))./\text{diff}(x)$$

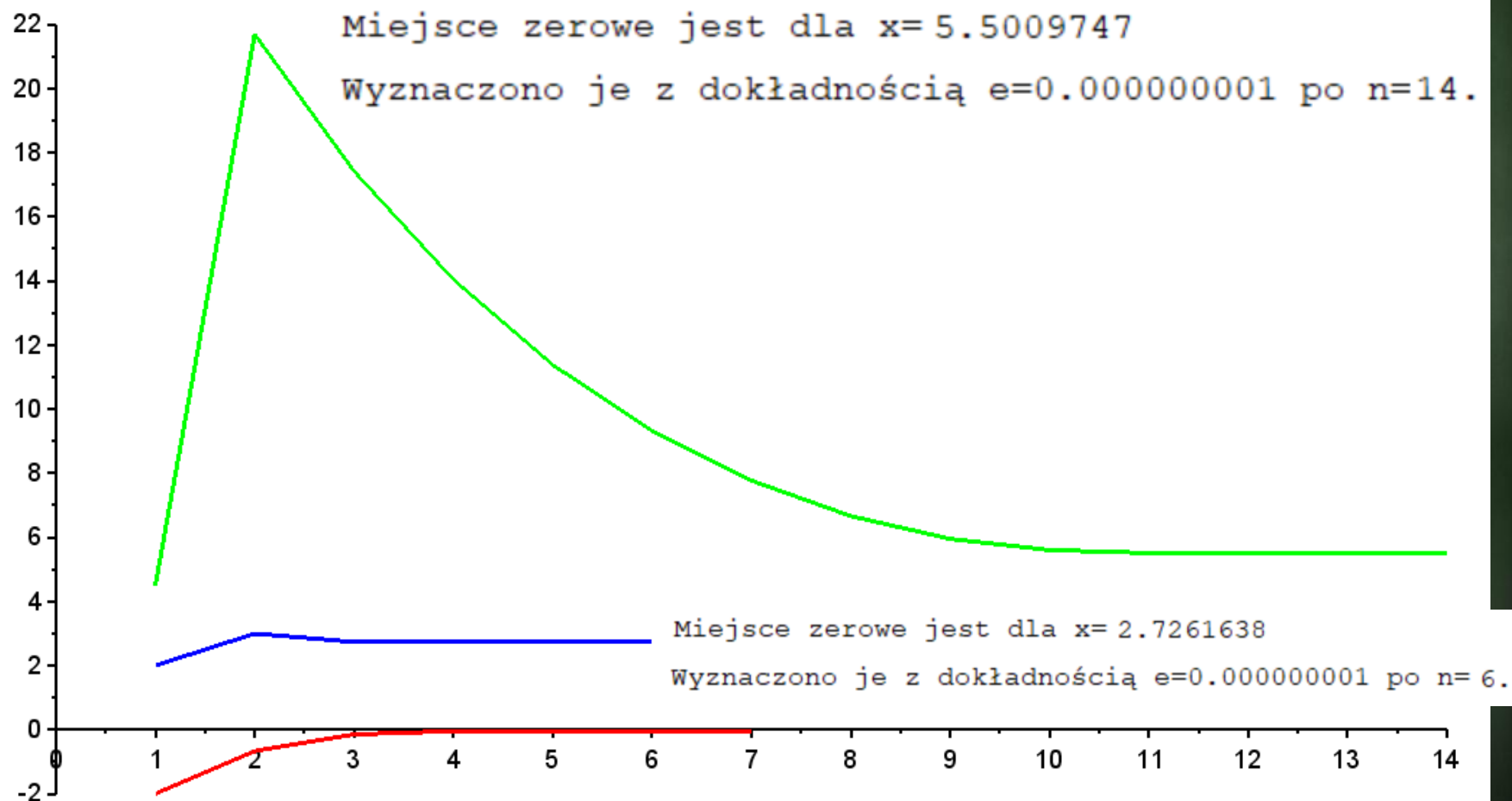
Przykład 4

```
1 clc;clear;
1 function y=fun(x)
2     y=log(x+10)+0.065*x^5-20*x^2+50*x;
3 endfunction
1 function y=fun_prim(x)
2     y=(1/(x+10))+0.325*x^4-40*x+50;
3 endfunction
8 e=0.0000000001;
9 n=1000;
10 x=zeros(1,n);
11 y=zeros(1,n);
12 i=1;
13 a=-2;
14 b=6;
15 x(i)=-2;
16 i=i+1;
17 x(i)=x(i-1)-fun(x(i-1))/fun_prim(x(i-1));
18 y(i)=fun(x(i));
19 while (abs(y(i))>e)
20     i=i+1;
21     x(i)=x(i-1)-fun(x(i-1))/fun_prim(x(i-1));
22     y(i)=fun(x(i));
23 end
```

Przykład 4

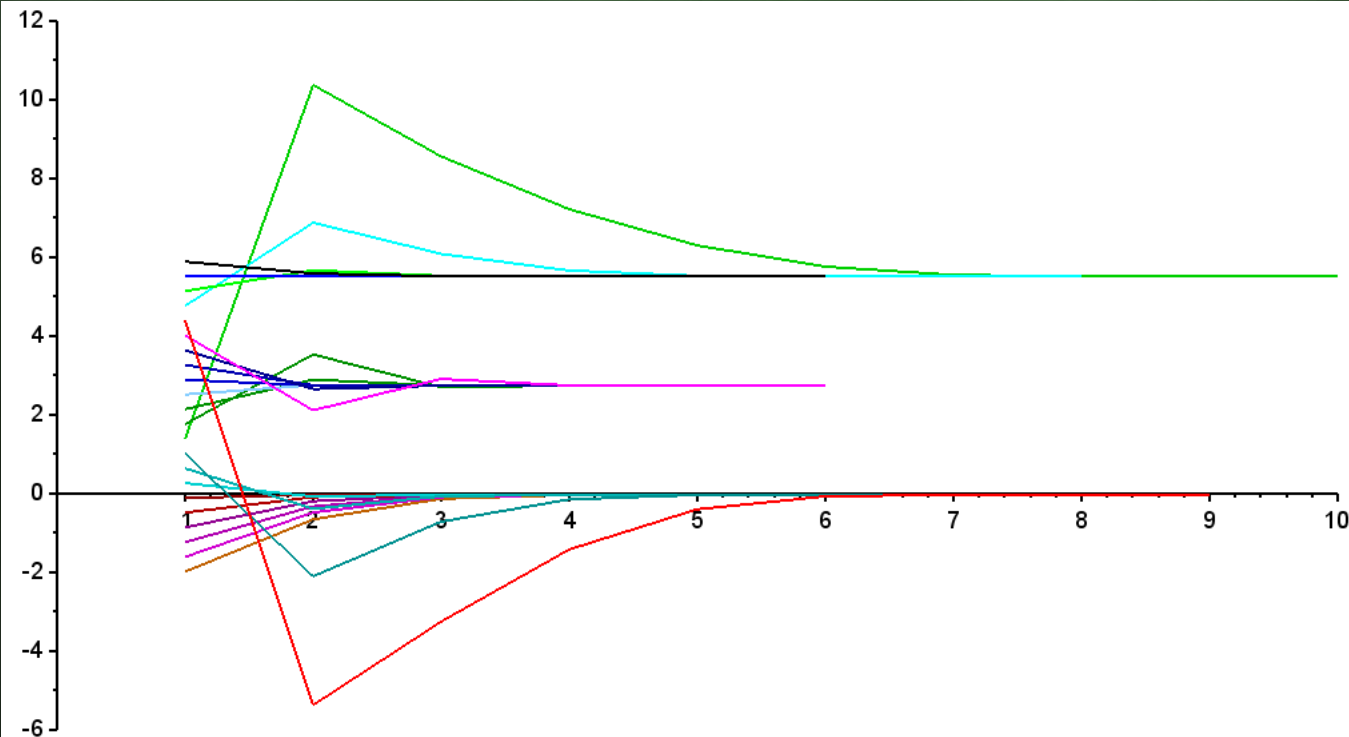
- Przeprowadzono symulację dla następujących wartości startowych:
 1. $x_0 = -2$
 2. $x_0 = 2$
 3. $x_0 = 4.5$
- W przypadku funkcji okresowych możliwe wyznaczenie pierwiastków poza analizowanym przedziałem

Przykład 4



Przykład 4

Przeprowadzono analizę wpływu punktu startowego na wyznaczenie miejsca zerowego



-2.	7.
-1.625	6.
-1.25	6.
-0.875	6.
-0.5	5.
-0.125	4.
0.25	5.
0.625	6.
1.	8.
1.375	10.
1.75	6.
2.125	5.
2.5	5.
2.875	4.
3.25	5.
3.625	5.
4.	6.
4.375	9.
4.75	8.
5.125	6.
5.5	3.
5.875	6.

Przykład 4

Miejsce zerowe wyznaczono dla punktów startowych:

column 1 to 10

-2. -1.625 -1.25 -0.875 -0.5 -0.125 0.25 0.625 1. 1.375

column 11 to 20

1.75 2.125 2.5 2.875 3.25 3.625 4. 4.375 4.75 5.125

column 21 to 22

5.5 5.875

Wyznaczono je odpowiednio po n krokach

column 1 to 14

7. 6. 6. 6. 5. 4. 5. 6. 8. 10. 6. 5. 5. 4.

column 15 to 22

5. 5. 6. 9. 8. 6. 3. 6.

Metoda iteracji prostej

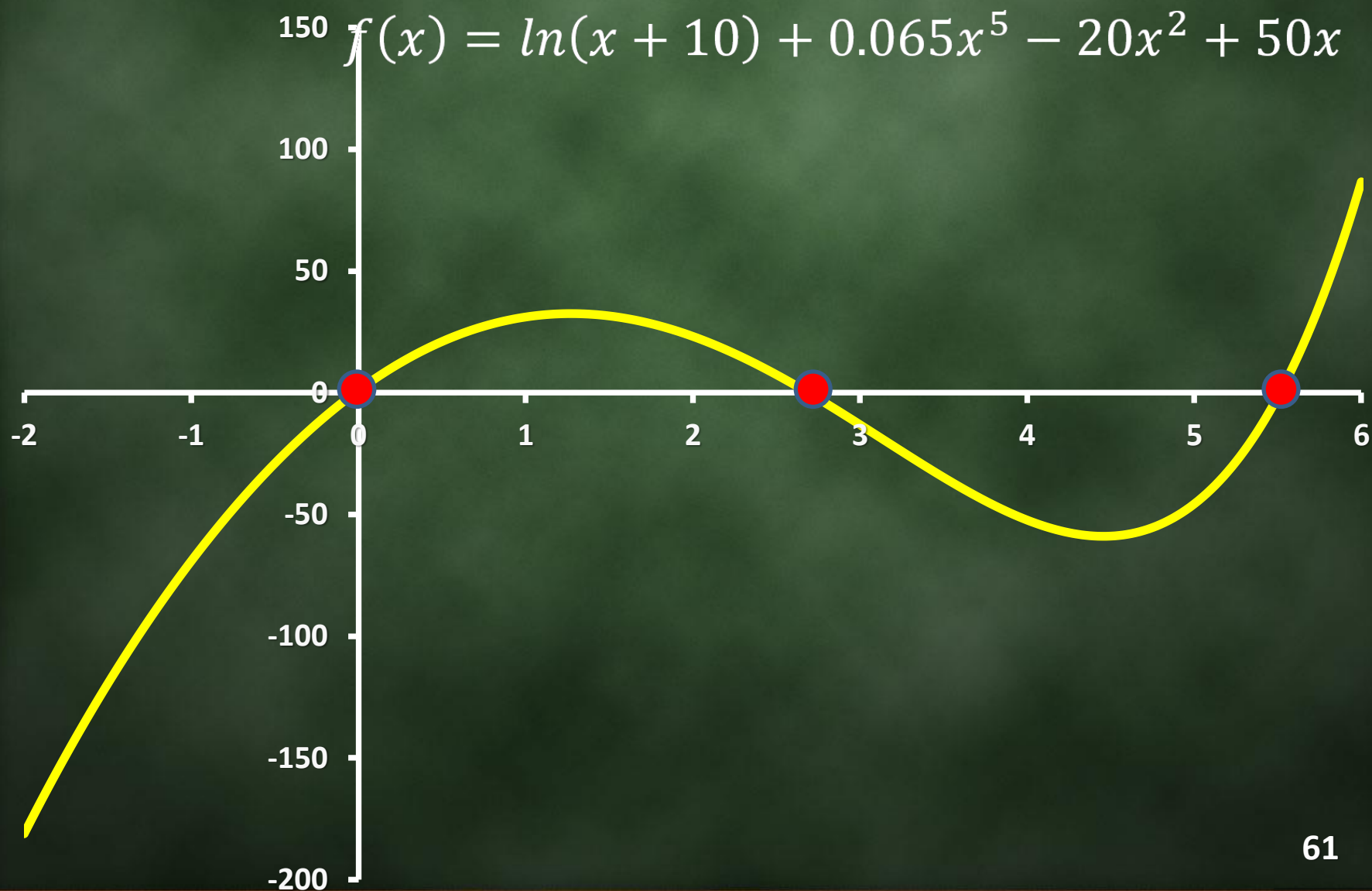
- Metoda polega na uściślaniu przybliżonej wartości pierwiastka.
- Zadanie to realizuje się poprzez przekształcenie funkcji $y=f(x)$ do postaci $x=\phi(x)$
- Zazwyczaj możliwe jest wykonanie kilku postaci takiego przekształcenia
- Aby rozwiązanie było zbieżne w otoczeniu miejsca zerowego funkcja $\phi(x)$ powinna spełniać warunek

$$0 < |\phi'(x)| < 1$$

Metoda iteracji prostej

- Kolejne przybliżenia wyznaczone są na podstawie spełniającego warunek równania $x = \phi(x)$
- Dobór punktu startowego zależy od przebiegu funkcji

Przykład 5



Przykład 5

$$\ln(x + 10) + 0.065x^5 - 20x^2 + 50x = 0$$

$$1. \varphi(x) = \frac{20x^2 - \ln(x + 10) - 0.065x^5}{50}$$

$$2. \varphi(x) = \sqrt{\frac{\ln(x + 10) + 0.065x^5 + 50x}{20}}$$

$$3. \varphi(x) = \sqrt[5]{\frac{20x^2 - \ln(x + 10) - 50x}{0.065}}$$

$$4. \varphi(x) = e^{0.065x^5 - 20x^2 + 50x} - 10$$

Przykład 5

- Należy policzyć pochodną każdej funkcji przekształconej
- Sprawdzić które z nich spełniają warunek w zadanym przedziale obliczeń

$$0 < |\phi'(x)| < 1$$

- Lub odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami powinna być coraz mniejsza
- $|\phi'(x_{k+1}) - \phi'(x_k)| < |\phi'(x_k) - \phi'(x_{k-1})|$

Przykład 5

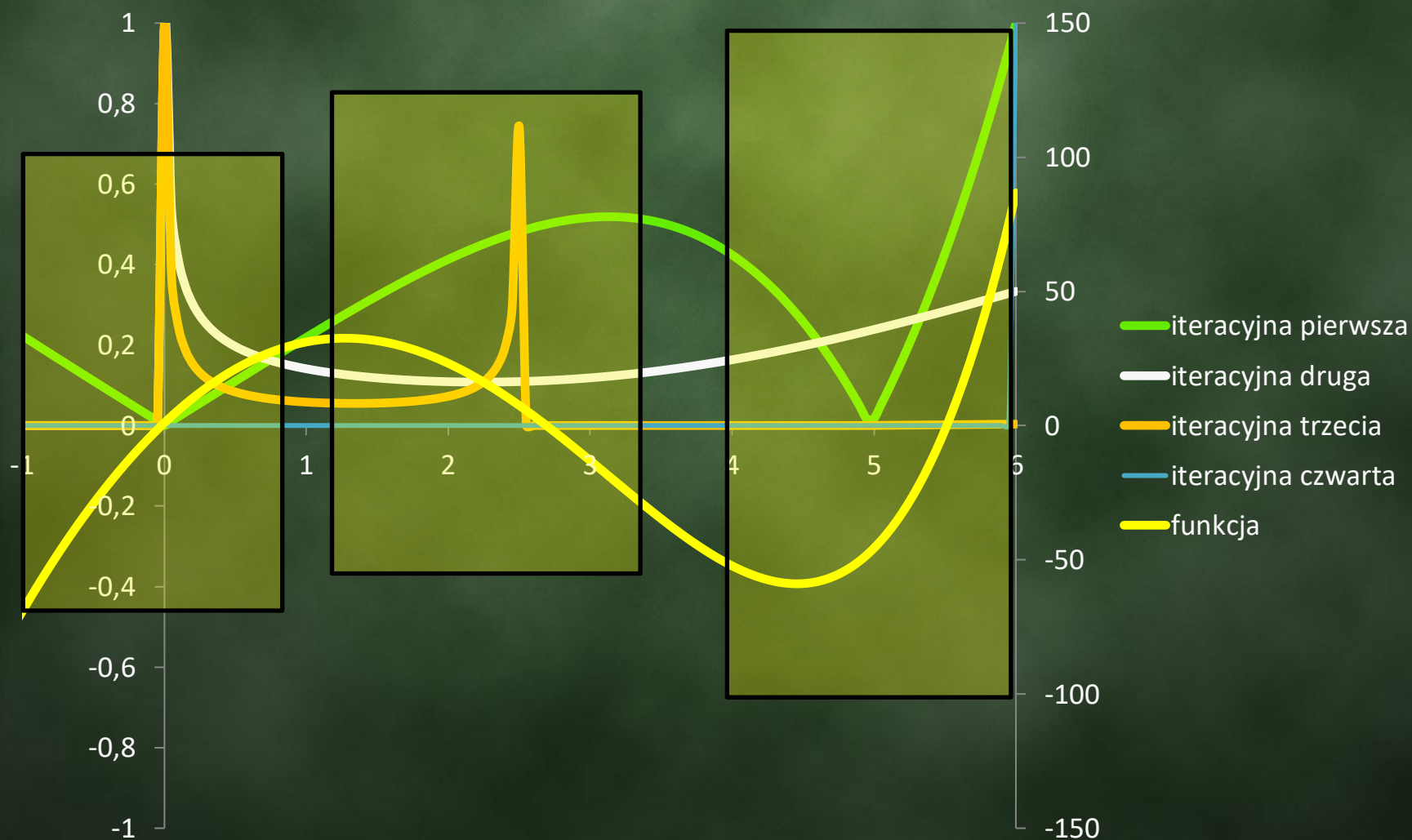
$$1. \varphi'(x) = -\frac{1}{50(x+10)} - 0.065x(x^3 - 123.077)$$

$$2. \varphi'(x) = \frac{0.036336(x^5 + 10x^4 + 153.846x + 1531.54)}{(x+10)\sqrt{\ln(x+10) + 0.065x(x^4 + 769.231)}}$$

$$3. \varphi'(x) = \frac{0.345499(40x^2 + 350x - 501)}{(x+10)(\ln(x+10) - 10x(2x-5))^{\frac{4}{5}}}$$

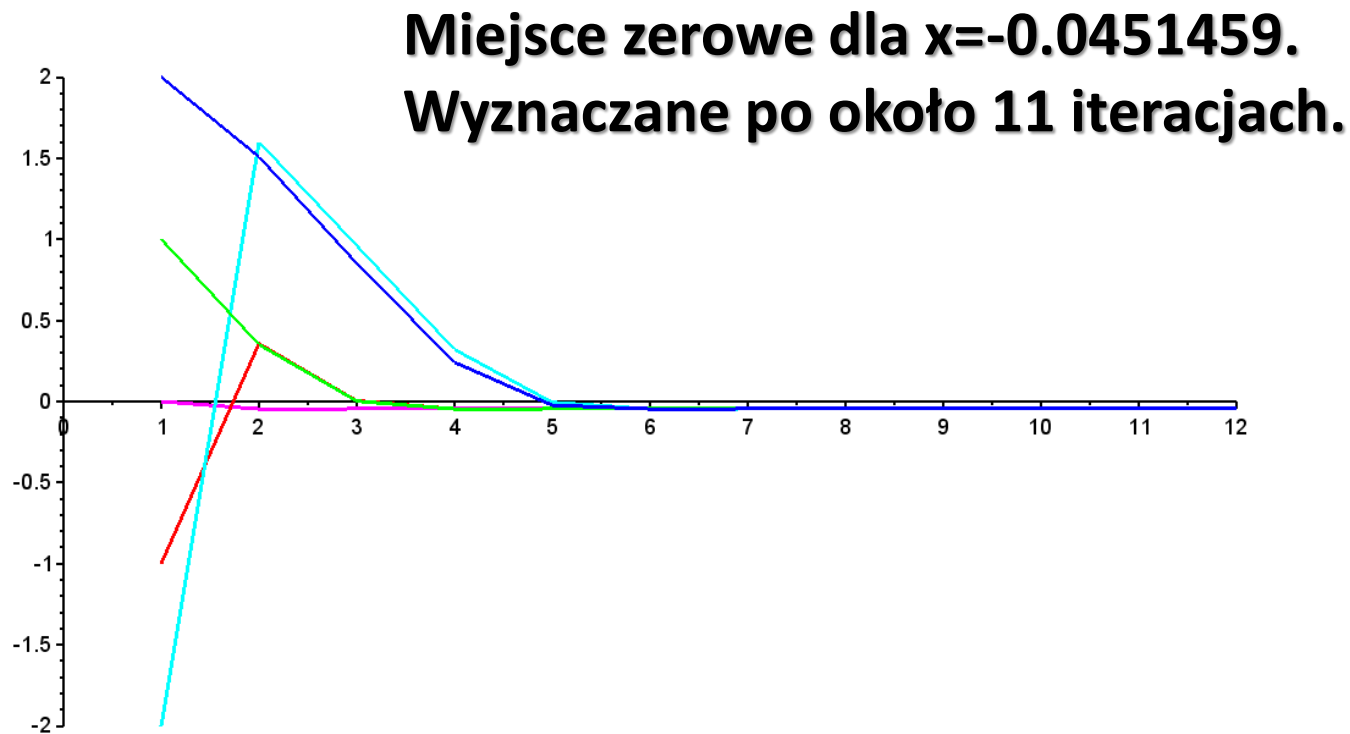
$$4. \varphi'(x) = (0.325x^4 - 40x + 50)e^{0.065x^5 - 20x^2 + 50x}$$

Przykład 5



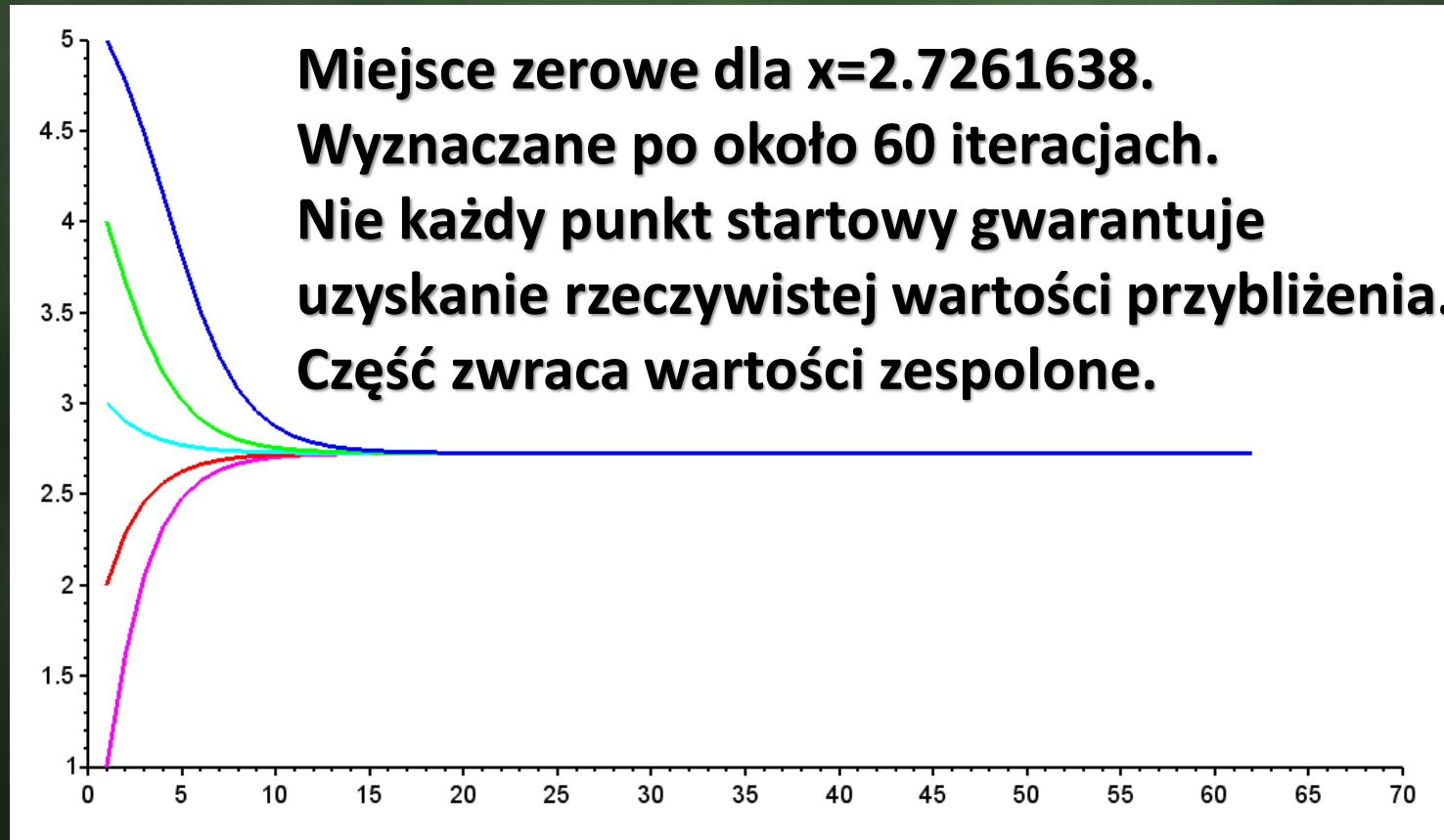
Przykład 5

- Pierwsza funkcja jest zbieżna tylko dla pierwszego miejsca zerowego



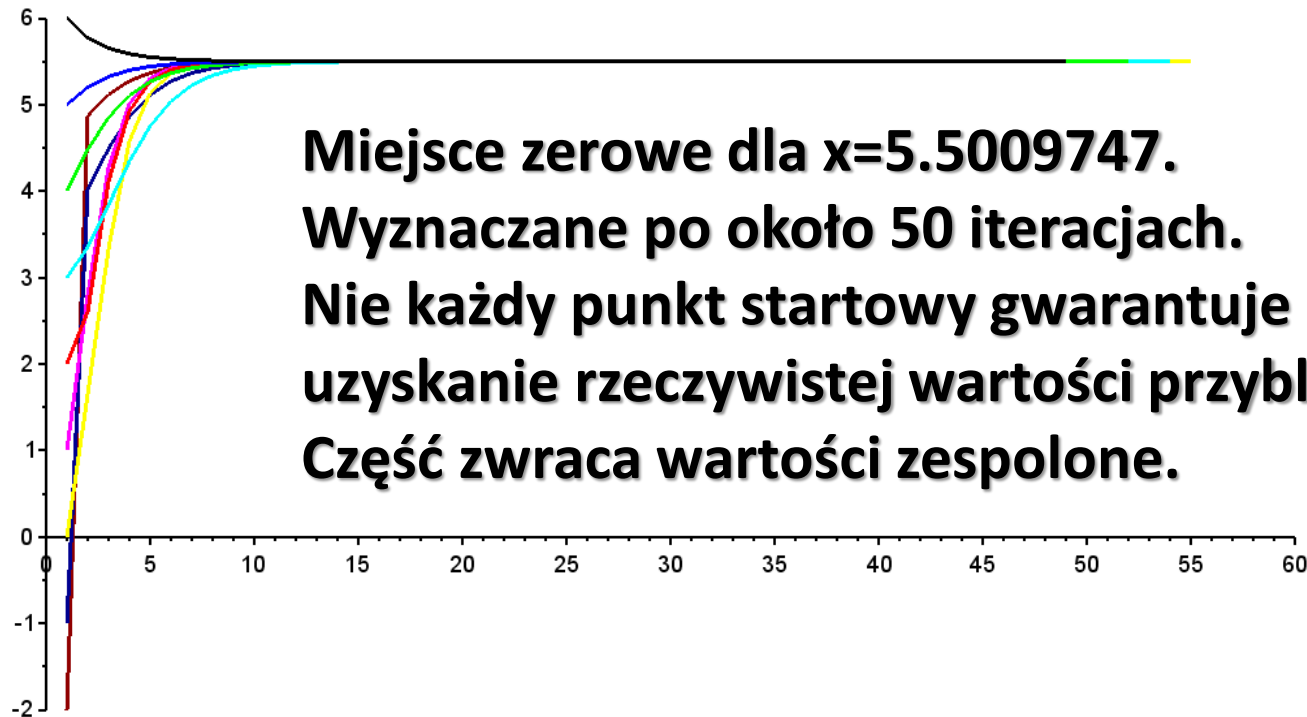
Przykład 5

- Druga funkcja jest zbieżna tylko dla drugiego miejsca zerowego



Przykład 5

- Trzecia funkcja jest zbieżna tylko do trzeciego miejsca zerowego



**Miejsce zerowe dla $x=5.5009747$.
Wyznaczane po około 50 iteracjach.
Nie każdy punkt startowy gwarantuje
uzyskanie rzeczywistej wartości przybliżenia.
Część zwraca wartości zespolone.**