

Metody numeryczne

Wykład 7



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://m.lanczont.pollub.pl>

Plan wykładu

- Metody rozwiązywania równań różniczkowych
 - Metoda Taylora
 - Metoda Eulera
 - Metoda Rungego-Kutty
- Rozwiązywanie równań różniczkowych I rzędu
- Rozwiązywanie równań różniczkowych II rzędu
- Rozwiązywanie układów równań różniczkowych
- Funkcja Ode

Równanie różniczkowe

Wiele zjawisk fizycznych określanych jako dynamiczne:

- ruch,
- rozkład sił,
- stany nieustalone w obwodach elektrycznych,

opisane są równaniami różniczkowymi. Rozwiązanie takich problemów w sposób analityczny często jest bardzo trudne i czasochłonne. Z tego powodu poszukując rozwiązania korzysta się z metod przybliżonych.

Równania różniczkowe

Rozwiązanie układu równań różniczkowych sprowadza się do znalezienia funkcji $y_i = y_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$ spełniających w zadanym przedziale $\langle x_0, b \rangle$ zadany układ równań różniczkowych.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \\ \dots \\ \frac{dy_m}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

Z warunkiem brzegowym: $y_i(x_0) = y_{i,0}, i = 1, 2, \dots, m$

Równania różniczkowe

Dla $m=1$ układ równań sprowadza się do najprostszej postaci, równania różniczkowego pierwszego rzędu jednej zmiennej.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Równania różniczkowe

Do dalszych rozważań konieczne jest przyjęcie następujących założeń:

- Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w przedziale $x_0 \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$
- Funkcja $f(x, y)$ na określonym przedziale spełnia warunek Lipschitza

Istnieje skończona liczba L (stała Lipschitza) taka że dla każdego $x \in \langle x_0, b \rangle$ i dowolnych y_1 i y_2 spełniona jest zależność

$$|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Równania różniczkowe

Równania różniczkowe wyższych rzędów zazwyczaj można sprowadzić do układu równań różniczkowych I rzędu.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - (y^2 - y) = \cos(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \rightarrow f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \cos(x) - \frac{dy}{dx} + (y^2 - y)$$

„przyjmując: $y_1 = y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2$

otrzymujemy układ równań I rzędu:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \cos(x) - y_2 + (y_1^2 - y_1) \end{cases}$$

Równania różniczkowe

Rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego metodami jednokrokowymi wymaga zdefiniowania warunków brzegowych, a więc podania wartości początkowych x_0 i y_0 .

Wyznaczane są kolejne wartości x_i i y_i , uzyskując tabelę kolejnych wartości funkcji stanowiącej rozwiązanie równania różniczkowego.

Równania różniczkowe

Stosując metody interpolacyjne i aproksymacyjne można określić równanie poszukiwanej funkcji oraz wykreślić jej przybliżony przebieg w zadanym przedziale obliczeń.

Stosując równanie **Taylora** można w sposób przybliżony rozwiązać równanie różniczkowe.

Wzór Taylora

- Analizowane równanie musi posiadać pochodne cząstkowe wyższych rzędów.
- Obliczenia wykonywane są dla określonego stałego kroku obliczeń Δx
- Im wyższy stopień przybliżenia będzie rozpatrywany tym wyższego rzędu pochodną równania trzeba będzie wyznaczyć.

Wzór Taylora

Postać ogólna wzoru Taylora:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} (\Delta x)^n y^{(n)}(x)$$

gdzie:

m jest rzędem przybliżenia

$y^{(n)}$ jest pochodną n -tego rzędu

Przykład 1

Rozwiązać podane poniżej równanie stosując wzór Taylora:

$$y' = \cos(x) - \sin(y) + x^2$$

$$y(-1) = 3$$

Zadany przedział obliczeń to $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Przykład 1

Konieczne jest określenie pochodnych wyższych rzędów zadanego równania:

$$y' = \cos(x) - \sin(y) + x^2$$

$$y'' = -\sin(x) - y' \cos(y) + 2x$$

$$y^{(3)} = -\cos(x) - y'' \cos(y) + (y')^2 \sin(y) + 2$$

$$y^{(4)} = \sin(x) - y^{(3)} \cos(y) + 3y' y'' \sin(y) + (y')^3 \cos(y)$$

W zadaniu przykładowym przyjęto przybliżenie czwartego rzędu.

Przykład 1

Algorytm obliczeń dla zadanego przypadku będzie następujący

$$x=x_0, y=y_0$$

for k=1:m

$$y'=\cos(x)-\sin(y)+x^2$$

$$y''=-\sin(x)-y'\cos(y)+2x$$

$$y^{(3)}=-\cos(x)-y''\cos(y)+(y')^2\sin(y)+2$$

$$y^{(4)}=\sin(x)+((y')^3-y^{(3)})\cos(y)+3y'y''\sin(y)$$

$$x=x+\Delta x(y'+(1/2!) \Delta x(y''+(1/3!) \Delta x(y^{(3)}+(1/4!) \Delta x^{(4)})))$$

Przykład 1

```

9 dx=0.1;
10 a=-1; b=1;
11 m=(b-a)/dx;
12 x0=-1; y0=3;
13 x=zeros(1,m+1);
14 y=zeros(1,m+1);
15 x(1)=x0; y(1)=y0;
16 for k=2:(m+1)
17     y1=cos(x(k-1))-sin(y(k-1))+(x(k-1))^2;
18     y2=-sin(x(k-1))-y1*cos(y(k-1))+2*x(k-1);
19     y3=-cos(x(k-1))-y2*cos(y(k-1))+(y1)^2*sin(y(k-1))+2;
20     y4=sin(x(k-1))+((y1)^3-y3)*cos(y(k-1))+3*y1*y2*sin(y(k-1));
21     y(k)=y(k-1)+dx*(y1+(1/silnia(2))*dx*(y2+(1/silnia(3))*
22     .....dx*(y3+(1/silnia(4))*dx*y4)));
23     x(k)=x(k-1)+dx;
24 end
25 plot2d(x,y);

```

```

1 function[y]=silnia(n)
2 if n==0
3     y=1
4 else
5     y=n*silnia(n-1)
6 end
7 endfunction

```

Przykład 1

Dla założonej dokładności $\Delta x=0.2$ otrzymano rozwiązanie w postaci tabelarycznego zestawienia kolejnych wartości y .

3.0

3.285668167992286

3.594399114352079

3.935921424677338

4.3112887784242835

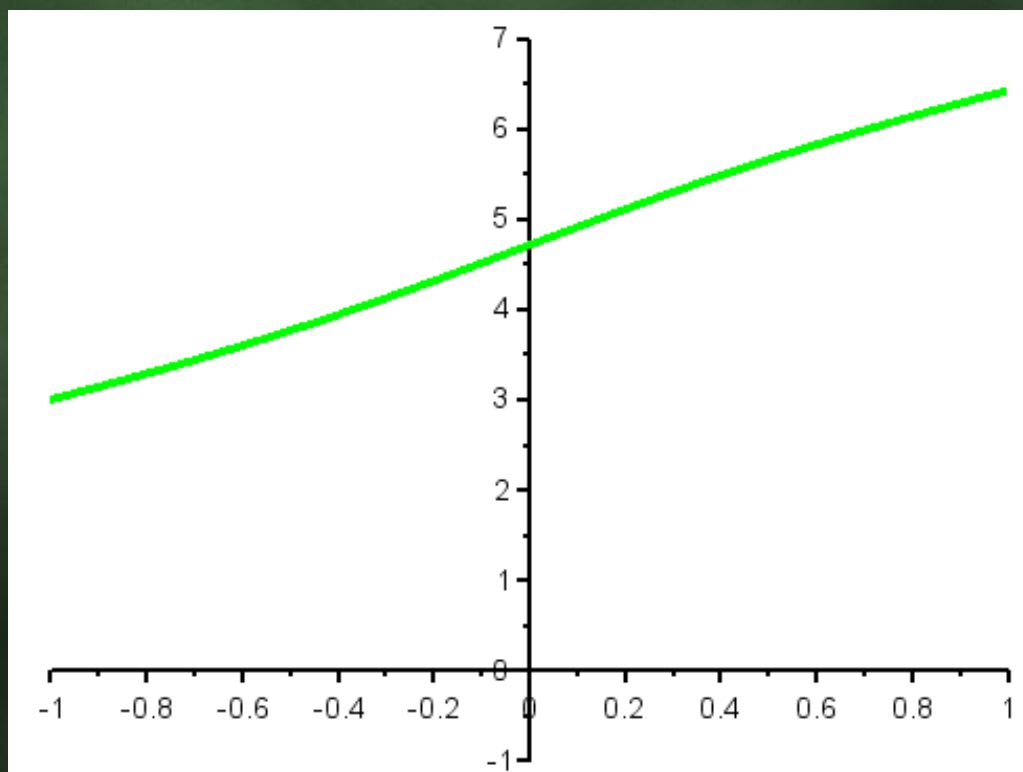
4.7090308957597085

5.107163706865357

5.483407832878951

5.8258187899088

6.13524405942802



Przykład 2

Wyznaczyć przebieg prądu i napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym dla zadanego obwodu.

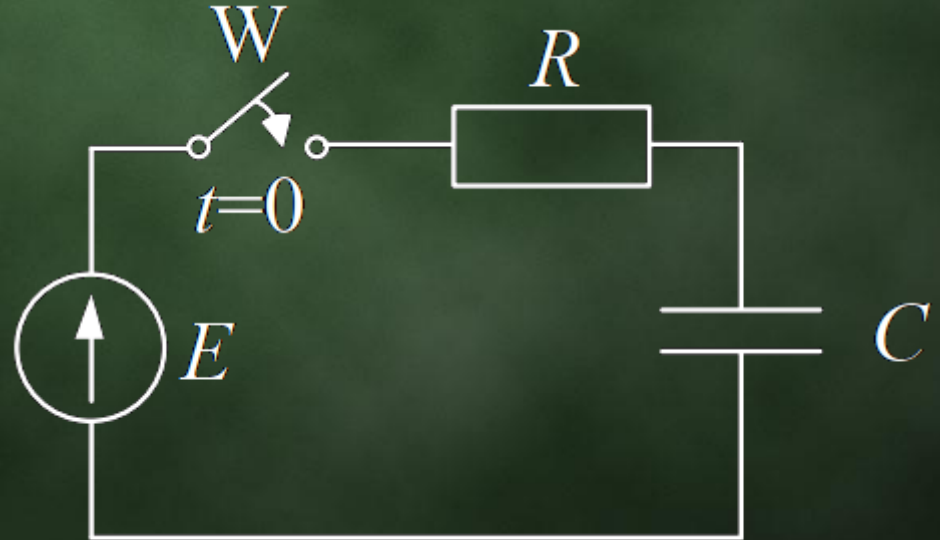
$$E=10V$$

$$R=2k\Omega$$

$$C=25\mu F$$

$$t=0.5s$$

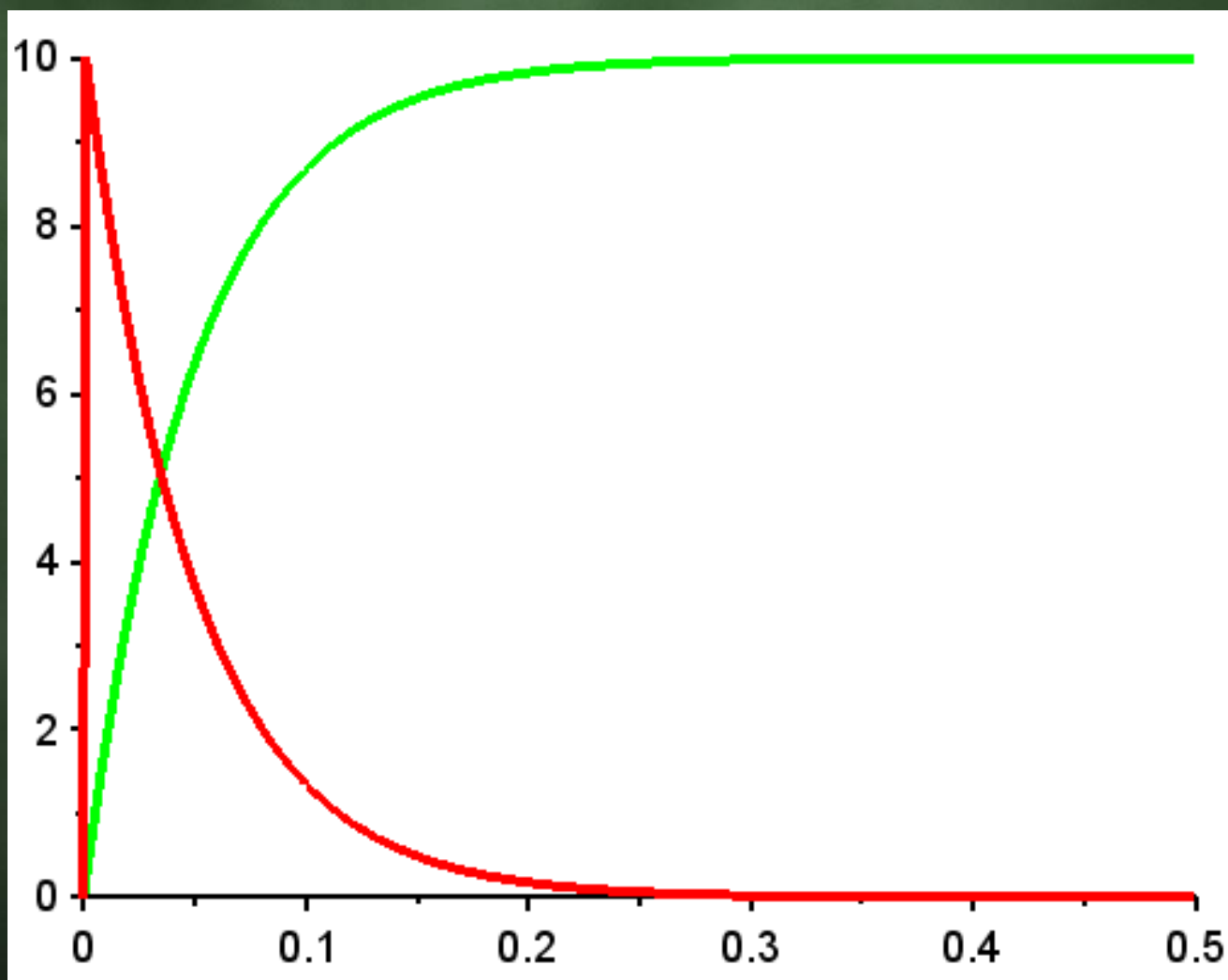
$$\Delta t=0.01s$$



Przykład 2

```
9  R=2e3;E=10;C=25e-6;
10 dx=0.001;
11 a=0; b=0.5;
12 m=(b-a)/dx;
13 x0=0; y0=0;
14 x=zeros(1,m+1);
15 y=zeros(1,m+1);
16 i=zeros(1,m+1);
17 x(1)=x0; y(1)=y0;
18 for k=2:(m+1)
19     y1=-y(k-1)/(R*C)+E/(R*C);
20     y2=-1/(R*C);
21     y(k)=y(k-1)+dx*y1+(1/silnia(2))*dx^2*y2;
22     x(k)=x(k-1)+dx;
23     i(k)=C*y1;
24 end
```

Przykład 2



Metoda Eulera

Metoda Eulera jest najprostszą z metod opartych na wzorze Taylora.

- Wykorzystuje tylko pochodną I rzędu.
- Aby uzyskać dokładne wyniki konieczne jest dobranie odpowiednio małego kroku obliczeń.
- Im mniejsze Δx tym dokładniejsze wyniki.

Metoda Eulera

Metodę można opisać równaniem ogólnym w postaci:

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + \Delta x f(x, y)$$

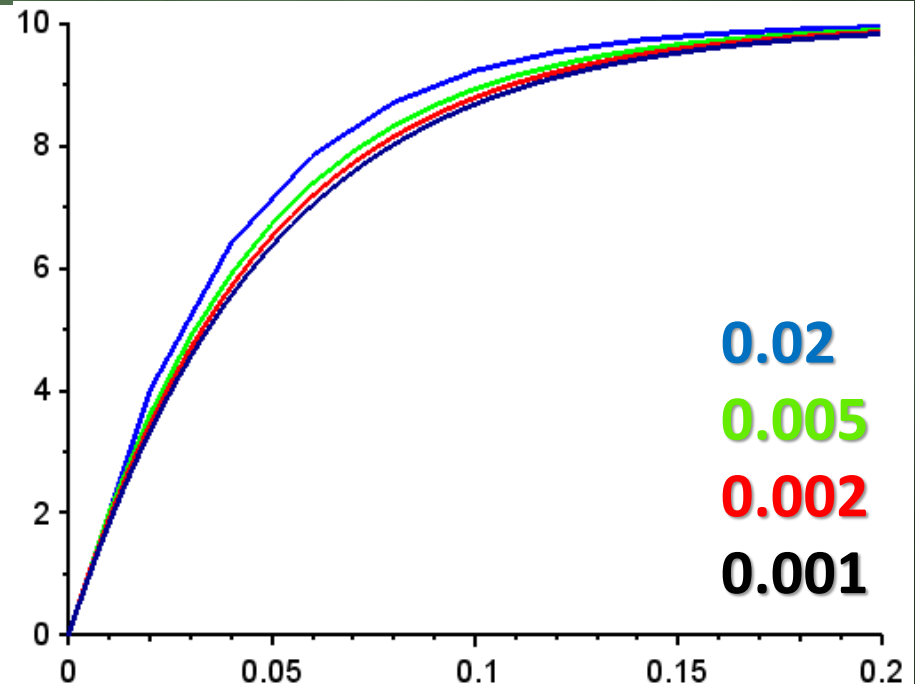
gdzie:

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n + \Delta x, y_n)$$

Przykład 3

```
9  R=2e3;E=10;C=25e-6;  
10 dx=0.001;  
11 a=0; b=0.4;  
12 m=(b-a)/dx;  
13 x0=0; y0=0;  
14 x=zeros(1,m+1);  
15 y=zeros(1,m+1);  
16 x(1)=x0; y(1)=y0;  
17 for k=2:(m+1)  
18     y1=-y(k-1)/(R*C)+E/(R*C);  
19     y(k)=y(k-1)+dx*y1;  
20     x(k)=x(k-1)+dx;  
21 end  
22 plot2d(x,y);
```



Metoda Eulera

Dokładność uzyskanych wyników związana jest z występowaniem dwóch rodzajów błędów obliczeniowych;

- błędem metody – związanej z przyjętymi ograniczeniami – rzędem pochodnej równania różniczkowego,
- błędem zaokrągleń – związanym z ograniczeniami maszyny obliczeniowej.

Powyższe błędy można podzielić na lokalne i globalne.

Metody Rungego-Kutty

W odróżnieniu od metody równań Taylora, metody Rungego-Kutty nie wymagają wyznaczania wyższych rzędów zadanego równania różniczkowego.

W zależności o przyjętego rzędu metody konieczne jest zastosowanie odpowiedniej kombinacji zapisu równania różniczkowego.

Wraz ze wzrostem rzędu metody rośnie dokładność otrzymywanych wyników.

Metody Rungego-Kutty

Ogólna postać algorytmu metod:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m w_i k_i$$

$$\text{dla } i = 1 \rightarrow k_i = \Delta x f(x_n, y_n)$$

$$\text{dla } i > 1 \rightarrow k_i = \Delta x f \left(x_n + a_i \Delta x, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j \right)$$

gdzie:

m – rząd metody

w, a, b – stałe zależne od rzędu metody

Metody Rungego-Kutty

Rząd metody	Stałe w_i	Współczynniki k_i	Nazwa metody
1	$w_1=1$	$k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$	Eulera
2	$w_1=w_2=1/2$	$k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$ $k_2=\Delta x f(x_n+\Delta x, y_n+k_1)$	Heuna (ulepszona Eulera)
3	$w_1=w_3=1/6$ $w_2=2/3$	$k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$ $k_2=\Delta x f(x_n+\frac{1}{2}\Delta x, y_n+\frac{1}{2}k_1)$ $k_3=\Delta x f(x_n+\Delta x, y_n-k_1+2k_2)$	Simpsona
4	$w_1=w_4=1/6$ $w_2=w_3=1/3$	$k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$ $k_2=\Delta x f(x_n+\frac{1}{2}\Delta x, y_n+\frac{1}{2}k_1)$ $k_3=\Delta x f(x_n+\frac{1}{2}\Delta x, y_n+\frac{1}{2}k_2)$ $k_4=\Delta x f(x_n+\Delta x, y_n+k_3)$	Rungego-Kutty

Przykład 4

Zadanie z przykładu 2 rozwiązać metodą Rungego-Kutty rzędów 1-4.

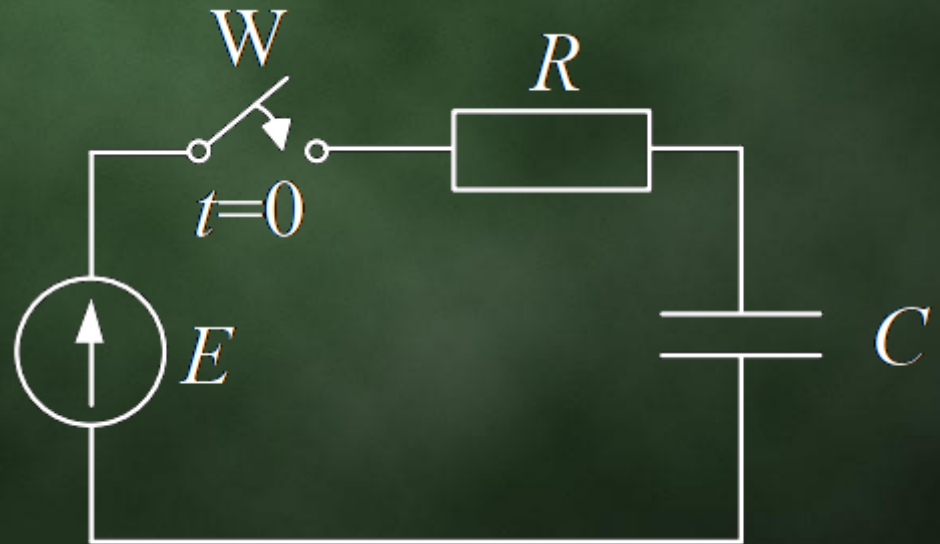
$$E=10V$$

$$R=2k\Omega$$

$$C=25\mu F$$

$$t=0.5s$$

$$\Delta t=0.035s$$



Przykład 4

```
1  clc;clear;
1  function [y]=rownanie(x)
2  y=-x/(R*C)+E/(R*C)
3  endfunction
1  function w=wzorcowa(t)
2  w=E*(1-exp(-t/(R*C)));
3  endfunction
8  R=2e3;E=10;C=25e-6;
9  dx=0.035;
10 a=0; b=0.5;
11 m=(b-a)/dx;
12 x0=0; y0=0;
13 x=zeros(1,m+1);
14 y=zeros(1,m+1);
15 x(1)=x0; y(1)=y0;
```

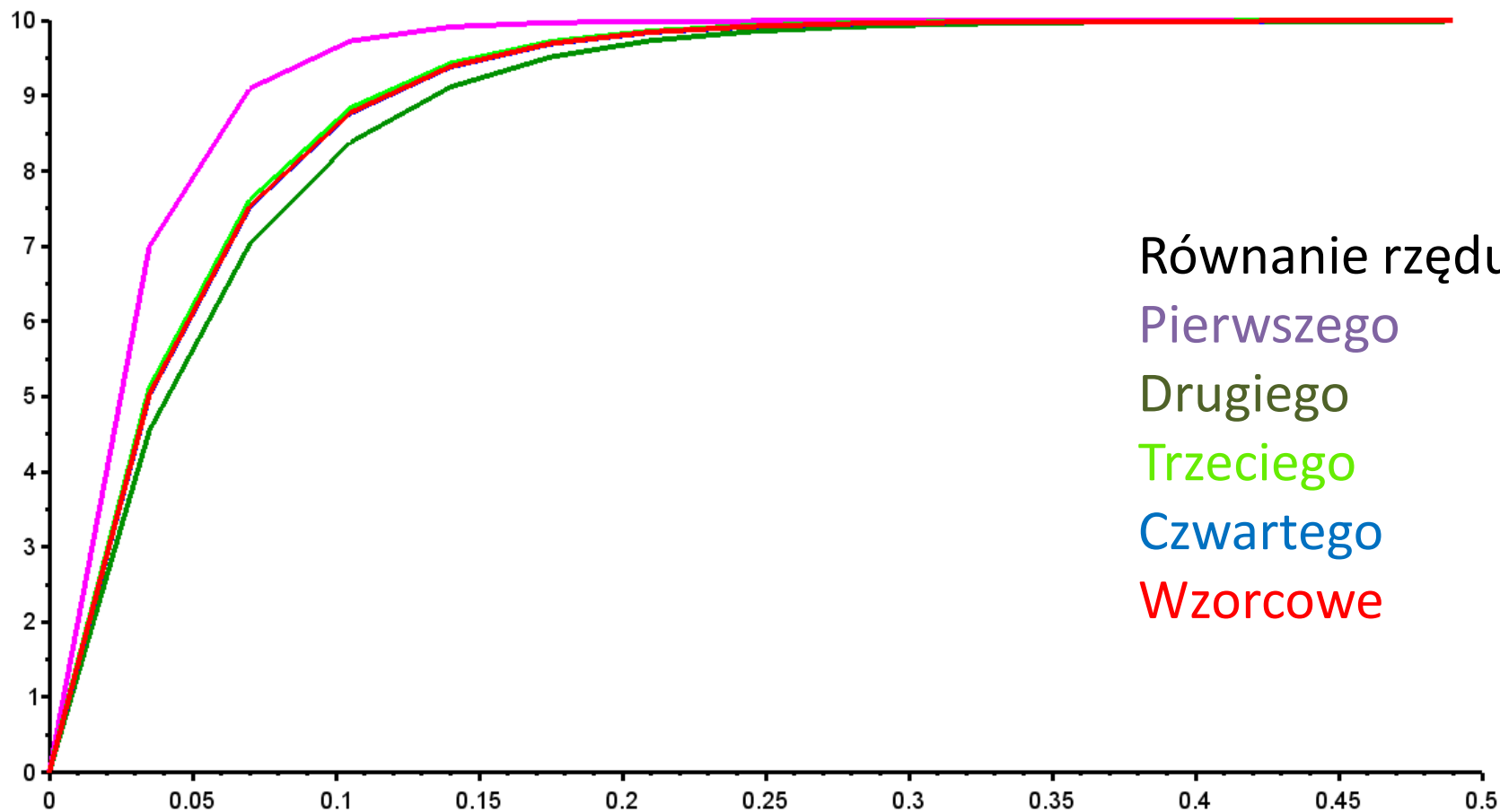
Przykład 4

```
16 //pierwszego rzędu
17 for k=2:(m+1)
18     k1=dx*rownanie(y(k-1));
19     y(k)=y(k-1)+k1;
20     x(k)=x(k-1)+dx;
21 end
22 plot2d(x,y);
23 //drugiego rzędu
24 for k=2:(m+1)
25     k1=dx*rownanie(y(k-1));
26     k2=dx*rownanie(y(k-1)+k1);
27     y(k)=y(k-1)+0.5*k1+0.5*k2;
28     x(k)=x(k-1)+dx;
29 end
30 plot2d(x,y);
```


Przykład 4

```
31 //trzeciego rzędu
32 for k=2:(m+1)
33     k1=dx*rownanie(y(k-1));
34     k2=dx*rownanie(y(k-1)+0.5*k1);
35     k3=rownanie(y(k-1)-k1+2*k2);
36     y(k)=y(k-1)+(1/6)*k1+(2/3)*k2+(1/6)*dx*k3;
37     x(k)=x(k-1)+dx;
38 end
39 plot2d(x,y);
40 //Czwartego rzędu
41 for k=2:(m+1)
42     k1=dx*rownanie(y(k-1));
43     k2=dx*rownanie(y(k-1)+0.5*k1);
44     k3=dx*rownanie(y(k-1)+0.5*k2);
45     k4=dx*rownanie(y(k-1)+k3);
46     y(k)=y(k-1)+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
47     x(k)=x(k-1)+dx;
48 end
49 plot2d(x,y);
```

Przykład 4



Metody wielokrokowe (różnicowe)

Metodę Eulera czy Rungego-Kutty określa się jako jednokrokowe, ponieważ do wyznaczenia kolejnego kroku konieczna jest znajomość tylko jednego poprzedzającego.

W metodzie wielokrokowej wykorzystuje się k obliczonych wcześniej wartości $y_{n+1-k}, \dots, y_n$ ($k > 1$)

Metody wielokrokowe

Metoda określona jest wzorem

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^k a_i y_{n+1-i} + \Delta x \sum_{i=0}^k b_i f_i(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}), \text{ dla } n \geq k - 1$$

gdzie a_i i b_i są liczbami rzeczywistymi.

Wymagane początkowe wartości
wyznacza się zazwyczaj metodami
jednokrokowymi (Rungego-Kutty) dla
ujemnego Δx .

Metody wielokrokowe

Dla $b_0=0$ wzór określa się jako wzór **ekstrapolacyjny (jawny)**. Szukana wartość y_{n+1} jest liniową kombinacją wcześniej wyznaczonych wartości.

Jeżeli $b_0 \neq 0$ to wzór określa się jako wzór **interpolacyjny (uwikłany)**, otrzymujemy wówczas równanie z zmienną y_{n+1} występującą po obu stronach równania. Wyznaczenie jej wymaga zastosowania metod iteracyjnych.

Metody wielokrokowe

W tabeli zestawiono najczęściej stosowane wzory metod wielokrokowych.

Dla uzyskania maksymalnej efektywności algorytmu rozwiązywania równania różniczkowego wskazane jest zastosowanie optymalnego dobór rzędu algorytmu oraz kroku obliczeniowego.

Przy ich doborze należy mieć na względzie zarówno stabilność algorytmu, jak i dopuszczalny błąd obliczeń.

Metody wielokrokowe

Lp.	Wzór	Rząd metody
1	$y_{n+1} = y_n + \Delta x y'_n$ (ekstrapolacyjny Eulera)	1
2	$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} (3y'_n - y'_{n-1})$	2
3	$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{12} (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$	3
4	$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$	4
5	$y_{n+1} = y_n + \frac{4}{3} \Delta x (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$	4
6	$y_{n+1} = y_n + \Delta x y'_{n+1}$ (interpolacyjny Eulera)	1
7	$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} (y'_{n+1} + y'_n)$	1
8	$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} (5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1})$	3
9	$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24} (9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})$	4
10	$y_{n+1} = \frac{1}{8} (9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8} \Delta x (y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})$	4

Układy równań różniczkowych

Układy równań różniczkowych I rzędu można rozwiązywać metodami Eulera, Rungego-Kutty lub wzorem Taylora.

Algorytm postępowania jest analogiczny jak przy rozwiązywaniu jednego równia różniczkowego.

Układy równań różniczkowych^{11:24}

Wzór Taylora – przykład 5

Rozwiązać układ równań
różniczkowych: $\Delta t = -0.02$, $x_0(1) = 3$, $y_0(1) = 1$

$$x' = x + y^2 - t^3$$

$$y' = y + x^3 + \cos(t)$$

Przykład 5

Konieczne jest zapisanie wyższych pochodnych rozpatrywanego układu równań.

$$x'' = x' + 2yy' - 3t^2$$

$$y'' = y' + 3x^2x' - \sin(t)$$

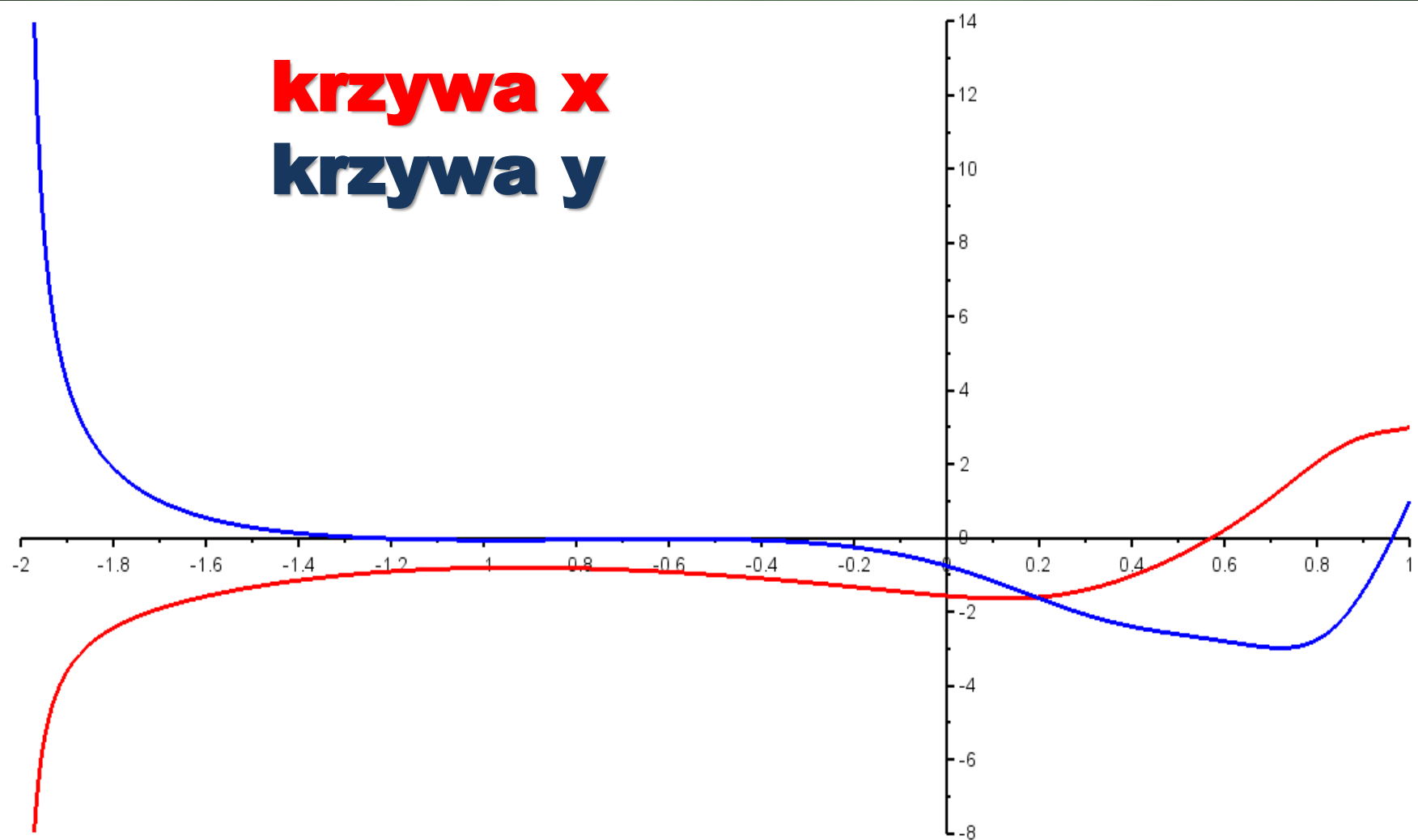
$$x''' = x'' + 2yy'' + 2(y')^2 - 6t$$

$$y''' = y'' + 6x(x')^2 + 3x^2x'' - \cos(t)$$

Przykład 5

```
1  clc;clear;
2  dt=-0.05;
3  a=-2; b=1;
4  m=abs((b-a)/dt);
5  t0=1;x0=3; y0=1;
6  t=zeros(1,m+1);x=zeros(1,m+1);y=zeros(1,m+1);
7  t(1)=t0;x(1)=x0; y(1)=y0;
8  for k=2:(m+1)
9      x1=x(k-1)+(y(k-1))^2-(t(k-1))^3;
10     y1=y(k-1)+(x(k-1))^3+cos(t(k-1));
11     x2=x1+2*y(k-1)*y1-3*(t(k-1))^2;
12     y2=y1+3*(x(k-1))^2*x1-sin(t(k-1));
13     x3=x2+2*y(k-1)*y2+2*y1^2-6*t(k-1);
14     y3=y2+6*x(k-1)*x1^2+3*(x(k-1))^2*x2-cos(t(k-1));
15     x(k)=x(k-1)+dt*(x1+0.5*dt*(x2+(1/3)*dt*x3));
16     y(k)=y(k-1)+dt*(y1+0.5*dt*(y2+(1/3)*dt*y3));
17     t(k)=t(k-1)+dt;
18 end
19 plot2d(t,[x',y']);
```

Przykład 5



Przykład 6

Rozwiązanie zadanego układu równań metodą Runkgego-Kutty rzędu 1 i 4.

$$\Delta t = -0.02, x_0(1) = 3, y_0(1) = 1$$

$$x' = x + y^2 - t^3$$

$$y' = y + x^3 + \cos(t)$$

Przykład 6

```
1  clc;clear;
1  function[z]=r_1(t,x,y)
2  z=x+y^2-t^3;
3  endfunction
1  function[z]=r_2(t,x,y)
2  z=y+x^3+cos(t);
3  endfunction
8  dt=-0.02;
9  a=-2; · b=1;
10 m=abs((b-a)/dt);
11 t0=1; · x0=3; · y0=1;
12 t=zeros(1,m+1);
13 x=zeros(1,m+1);
14 y=zeros(1,m+1);
15 t(1)=t0;x(1)=x0; · y(1)=y0;
```

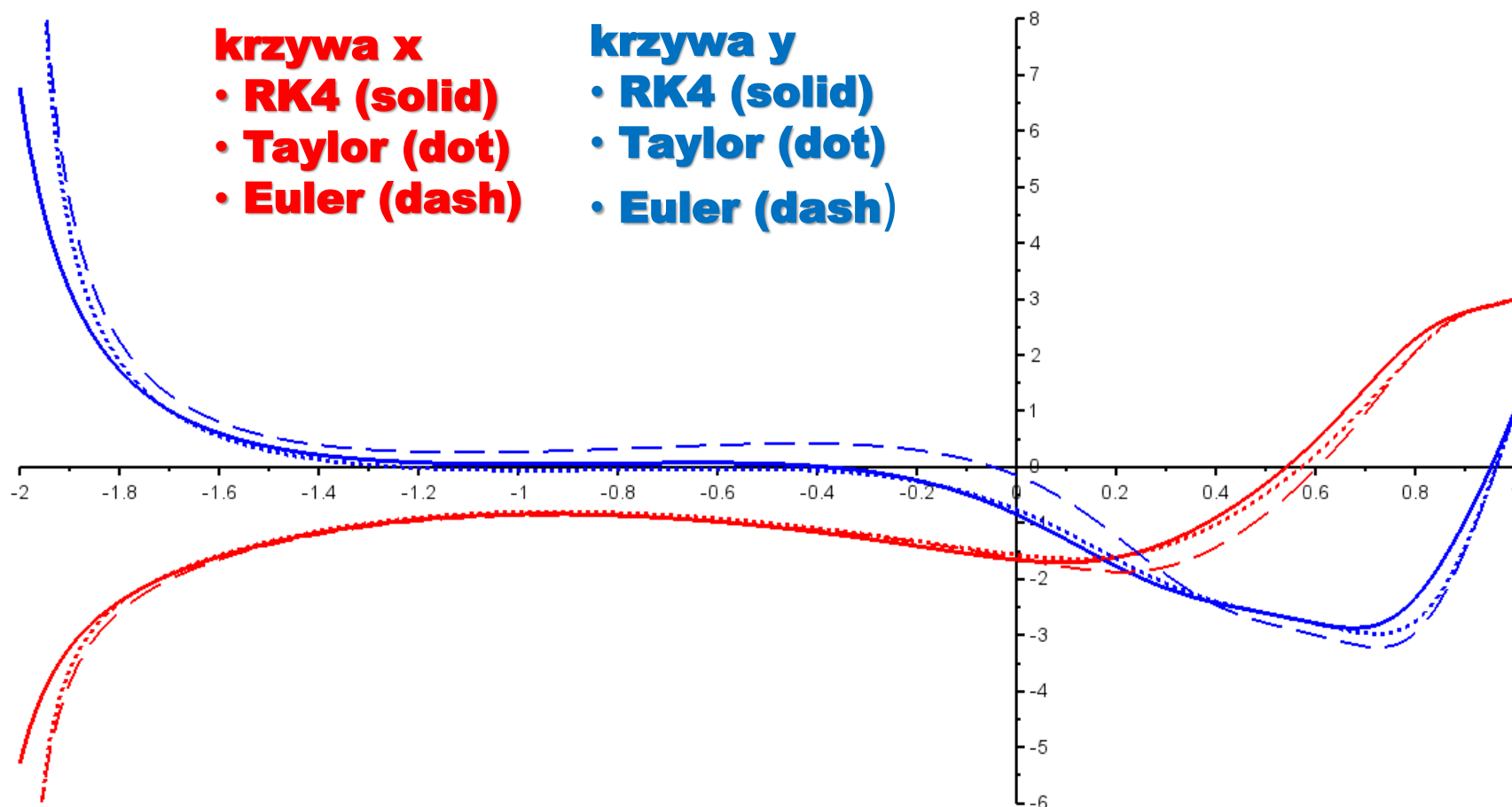
Przykład 6

```
15 t(1)=t0;x(1)=x0;y(1)=y0;
16 for k=2:(m+1)
17     k1=dt*r_1(t(k-1),x(k-1),y(k-1));
18     x(k)=x(k-1)+k1;
19     k1=dt*r_2(t(k-1),x(k-1),y(k-1));
20     y(k)=y(k-1)+k1;
21     t(k)=t(k-1)+dt;
22 end
23 plot2d(t,[x',y']);
```

Przykład 6

```
16 for k=2:(m+1)
17     k1=dt*r_1(t(k-1),x(k-1),y(k-1));
18     k2=dt*r_1(t(k-1)+0.5*dt,x(k-1)+0.5*k1,y(k-1)+0.5*k1);
19     k3=dt*r_1(t(k-1)+0.5*dt,x(k-1)+0.5*k1,y(k-1)+0.5*k2);
20     k4=dt*r_1(t(k-1)+dt,x(k-1)+k3,y(k-1)+k3)
21     x(k)=x(k-1)+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
22     k1=dt*r_2(t(k-1),x(k-1),y(k-1));
23     k2=dt*r_2(t(k-1)+0.5*dt,x(k-1)+0.5*k1,y(k-1)+0.5*k1);
24     k3=dt*r_2(t(k-1)+0.5*dt,x(k-1)+0.5*k1,y(k-1)+0.5*k2);
25     k4=dt*r_2(t(k-1)+dt,x(k-1)+k3,y(k-1)+k3)
26     y(k)=y(k-1)+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
27     t(k)=t(k-1)+dt;
28 end
29 plot2d(t,[x',y']);
```


Przykład 6



Równania różniczkowe wyższych rzędów

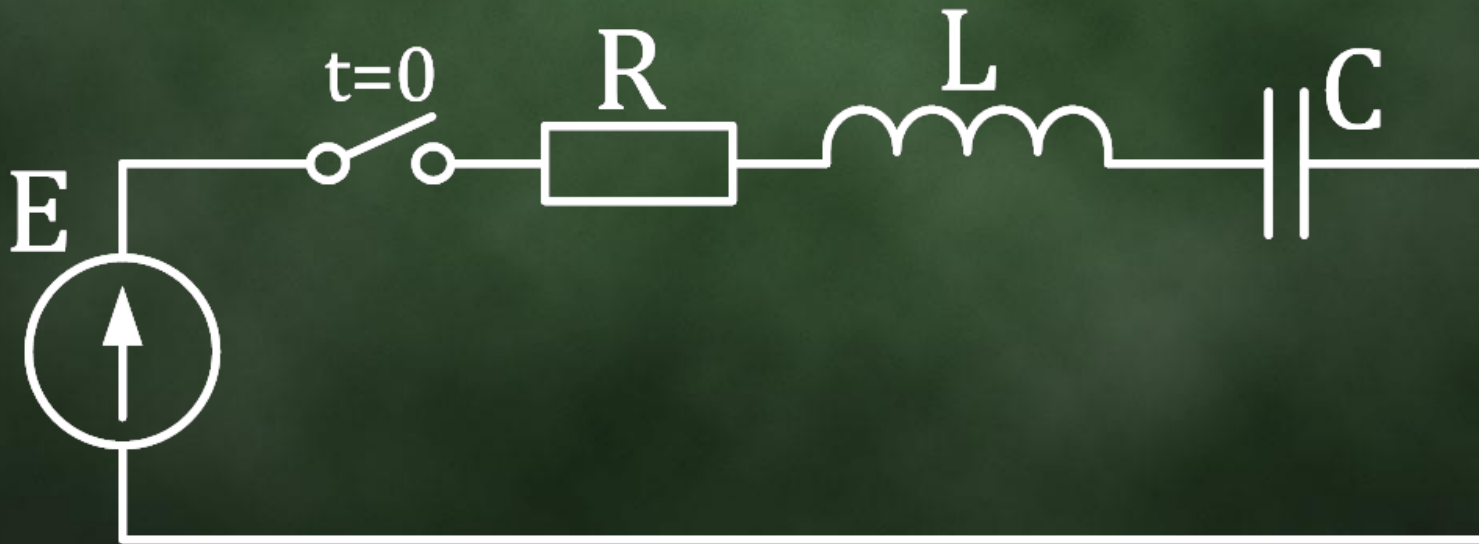
Metodami Eulera, Rungego-Kutty oraz wzorem Taylora można rozwiązywać także równania różniczkowe wyższych rzędów.

Konieczne jest wtedy sprowadzenie takiego równania do układu równań I rzędu.

Przykład 7

Dla danego obwodu wyznaczyć przebieg prądu i napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym. Warunki początkowe są zerowe.

$$E=100\text{V}, R=0.25\Omega, L=25\text{mH}, C=33\text{mF}$$



Przykład 7

Równanie II rzędu opisujące analizowany obwód:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

Należy przekształcić w układ równań I rzędu:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_c}{L} \\ \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} \end{cases}$$

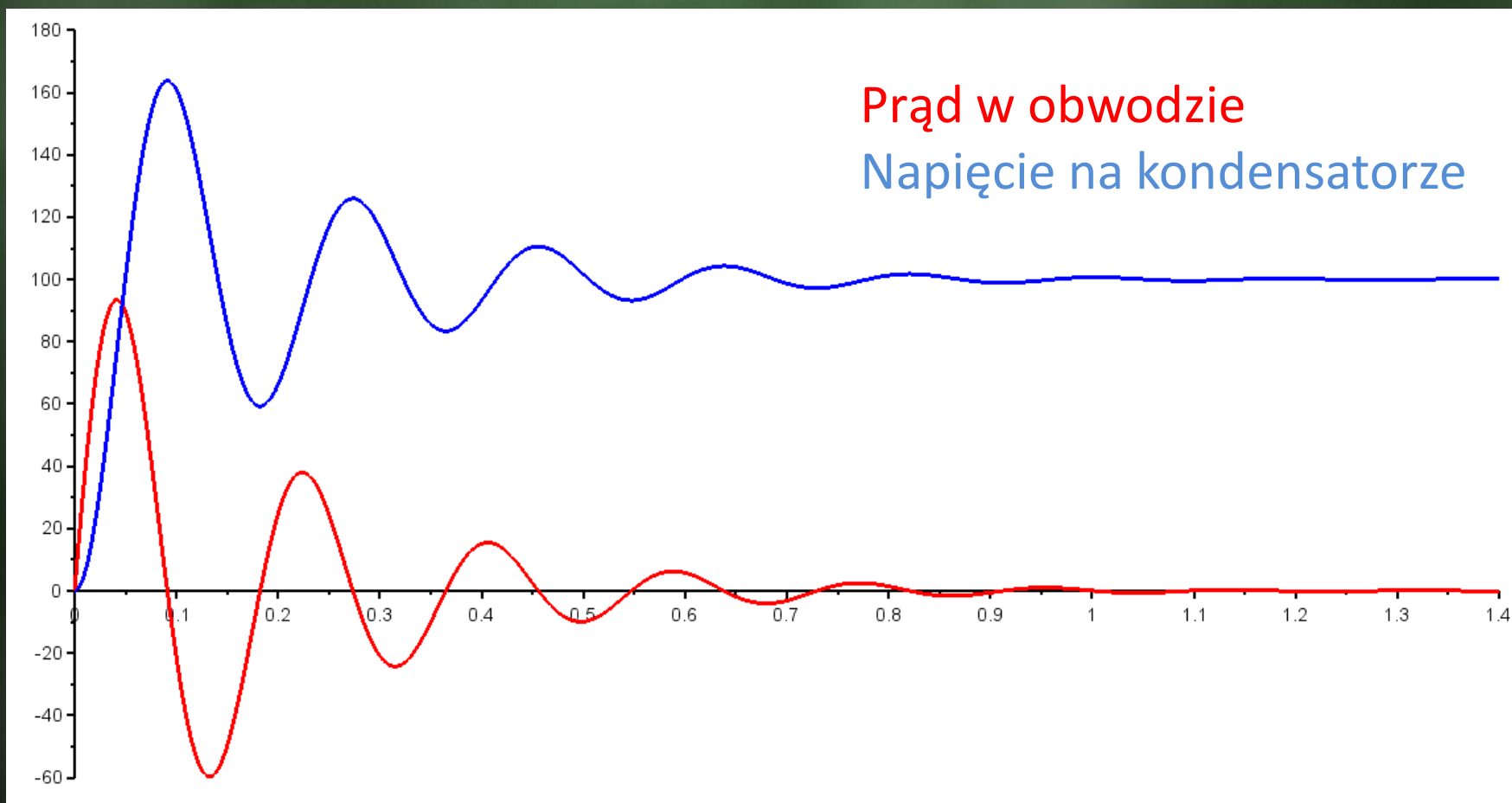
Przykład 7

```
1  clc;clear;
1  function [z]=r_1(t,i,u)
2  z=(1/L)*(E-R*i-u)
3  endfunction
1  function [z]=r_2(t,i,u)
2  z=i/C;
3  endfunction
8  R=0.25; L=25e-3; C=33e-3; E=100;
9  dt=0.0001;
10 a=0; b=1.4;
11 m=abs((b-a)/dt);
12 t0=0; i0=0; u0=0;
13 t=zeros(1,m+1);
14 i=zeros(1,m+1);
15 u=zeros(1,m+1);
16 t(1)=t0; i(1)=i0; u(1)=u0;
```

Przykład 7

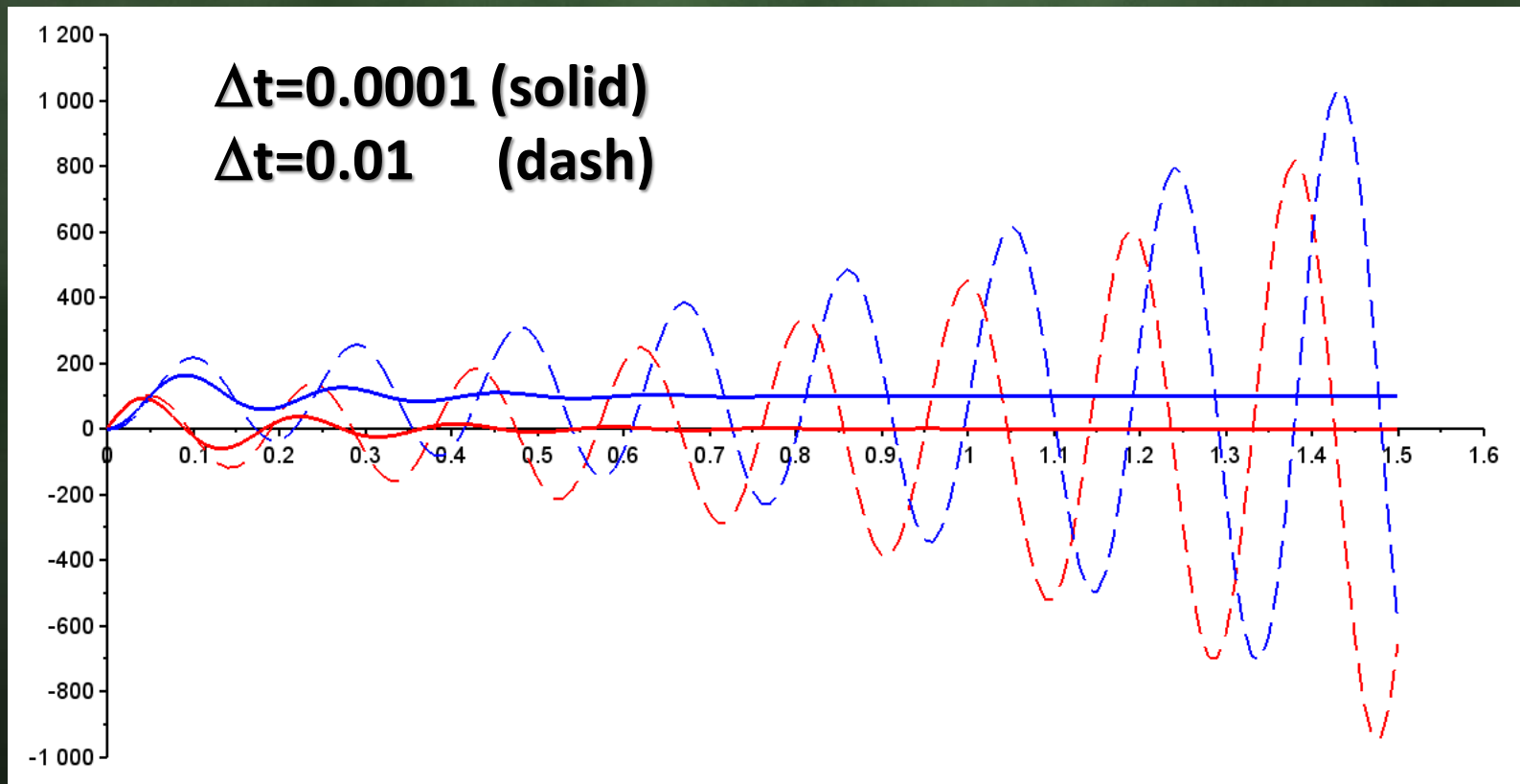
```
17 for k=2:(m+1)
18     k1=dt*r_1(t(k-1),i(k-1),u(k-1));
19     k2=dt*r_1(t(k-1)+0.5*dt,i(k-1)+0.5*k1,u(k-1)+0.5*k1);
20     k3=dt*r_1(t(k-1)+0.5*dt,i(k-1)+0.5*k1,u(k-1)+0.5*k2);
21     k4=dt*r_1(t(k-1)+dt,i(k-1)+k3,u(k-1)+k3)
22     i(k)=i(k-1)+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
23     k1=dt*r_2(t(k-1),i(k-1),u(k-1));
24     k2=dt*r_2(t(k-1)+0.5*dt,i(k-1)+0.5*k1,u(k-1)+0.5*k1);
25     k3=dt*r_2(t(k-1)+0.5*dt,i(k-1)+0.5*k1,u(k-1)+0.5*k2);
26     k4=dt*r_2(t(k-1)+dt,i(k-1)+k3,u(k-1)+k3)
27     u(k)=u(k-1)+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
28     t(k)=t(k-1)+dt;
29 end
30 plot2d(t,[i',u']);
```

Przykład 7



Przykład 7

Dobranie odpowiedniego kroku obliczeń ma decydujące znaczenie na uzyskanie prawidłowego rozwiązania.



Funkcja ODE

W środowisku obliczeniowym Scilab dostępna jest funkcja realizująca rozwiązywanie układów równań różniczkowych.

Funkcja **ode** (Ordinary Different Equations) umożliwia rozwiązanie zdefiniowanego układu równań różniczkowych jedną z dostępnych metod.

Funkcja **ode** wymaga zdefiniowania funkcji z układem równań stanu odpowiadających zadanemu układowi równań różniczkowych

Funkcja ODE

Składnia funkcji:

$y = \text{ode}([type], y_0, t_0, t, f)$

gdzie:

y – wektor lub macierz wyjściowa

$[type]$ – wskazanie metody obliczeniowej

y_0 – wektor wartości początkowych

t_0 – wartość początkowa zmiennej podcałkowej

t – wektor wartości zmiennej podcałkowej

f – nazwa funkcji zawierającej definicję równań stanu

Funkcja ODE

Zaimplementowane metody obliczeniowe:

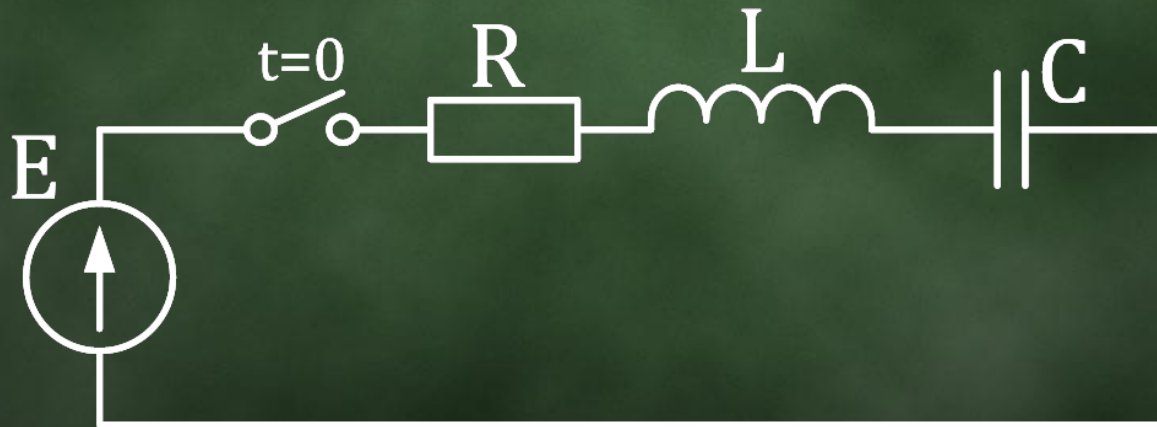
- adams – metoda Adamsa
- stiff – metoda różniczkowania wstecznego BDF
- rk – metoda Rungego-Kutty rzędu 4
- rkf – metoda Rungego-Kutty rzędu 4 i 5
- fix – zmodyfikowana metodark
- discrete, roots – inne metody

Wybór metody obliczeniowej nie jest konieczny. W takiej sytuacji funkcja rozwiązuje zadanie metodą Adamsa i BDM, dynamicznie wybiera w czasie obliczeń korzystniejszą metodę.

Przykład 8

Dla danego obwodu wyznaczyć przebieg prądu i napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym. Warunki początkowe są zerowe.

$$E=100\text{V}, R=0.25\Omega, L=25\text{mH}, C=33\text{mF}$$



Zadanie rozwiązać za pomocą funkcji **ode**.

Przykład 8

W pierwszym etapie należy wyprowadzić równania stanu dla analizowanego obwodu.

Wyjść należy z równań Kirchhoffa dla analizowanego obwodu dążąc do zapisania postaci różniczkowej.

$$E = Ri + u_L + u_C$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} + u_C$$

$$E = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

Przykład 8

Na podstawie równania różniczkowego zapisujemy równania stanu:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = \frac{E - RC \frac{du_C}{dt} - u_C}{LC}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_C}{L}$$

Przykład 8

Na podstawie równań stanu określić
można zmienne stanu:

$$x_1 = \frac{du_C}{dt} \quad x_2 = u_C \quad x_3 = i$$

Finalnie równania stanu przyjmują
postać

$$\begin{cases} y_1 = \frac{E - RCx_1 - x_2}{LC} \\ y_2 = \frac{x_3}{C} \\ y_3 = \frac{E - Rx_3 - x_2}{L} \end{cases}$$

Przykład 8

```
1 clc;clear;
1 function [y]=R_stanu(t,x)
2     y(1)=(E-R*C*x(1)-x(2))/(L*C);
3     y(2)=x(3)/C;
4     y(3)=(E-R*x(3)-x(2))/L;
5 endfunction
7 R=0.25; L=25e-3; C=33e-3; E=100;
8 df=0.0001;
9 y0=[0;0;0];
10 t0=0;
11 t=0:df:1.4;
12 y=ode(y0,t0,t,R_stanu);
13 uc=y(2,:);
14 i=y(3,:);
15 plot2d(t,[uc',i']);
```


Przykład 8

