

Metody numeryczne

Wykład 3



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://m.lanczont.pollub.pl>

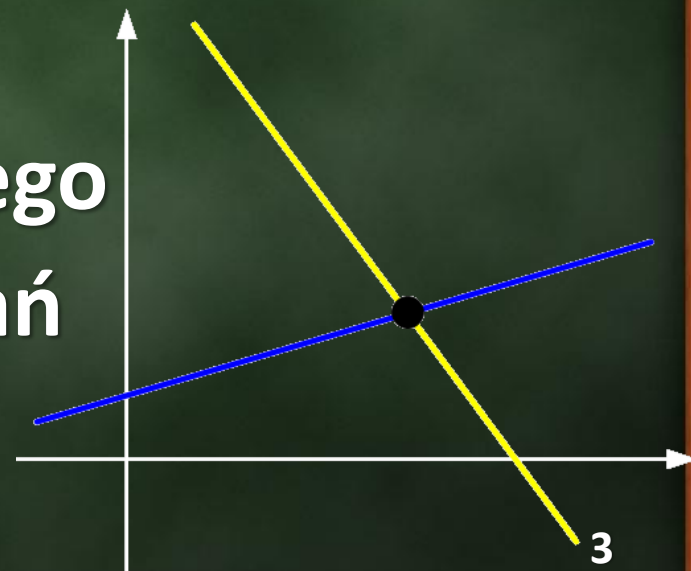
Zakres wykładu

Metody skończone rozwiązywania układów równań liniowych:

1. Rozkłady LU
2. Eliminacja Gaussa z wyborem elementów głównych
3. Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Równania liniowe

- Wychodząc z geometrii euklidesowej rozpatrywać można punkt na płaszczyźnie wyznaczony przez dwie proste.
- Mogą one wyznaczać prostą (nieskończenie wiele rozwiązań), punkt, lub zbiór pusty
- Algebraiczną postacią tego problemu jest układ równań liniowych.



Układ równań liniowych

- Teoria układów równań liniowych jest działem algebry liniowej.
- Numeryczne rozwiązywanie układów równań liniowych odgrywa ważną rolę w inżynierii, fizyce, chemii, informatyce czy ekonomii.
- W wielu przypadkach skomplikowane problemy opisane układami równań nieliniowych sprowadza się do dużo prostszych w metodyce rozwiązania układów równań liniowych. Proces ten nazywa się linearyzacją problemu.

Układy równań liniowych

Układ **n** równań liniowych w postaci macierzowej można zapisać:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

W postaci ogólnej jest on następujący:

$$A \cdot x = b$$

Metody skończone

- Metody skończone rozwiązywania układów równań liniowych stosowane są dla stosunkowo niewielkich liczbowo układów równań.
- Zastosowanie tych metod dla układu $n \times n$ wymaga n^2 komórek w pamięci operacyjnej oraz wykonania rzędu n^3 działań arytmetycznych.
- Jeśli więc tylko n nie jest zbyt duże i układ jest dostatecznie dobrze uwarunkowany, to rozwiązanie zadania jest stosunkowo proste.

Układy równań liniowych

Postacie uproszczone równań

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/a_{1,1} \\ b_2/a_{1,1} \\ \vdots \\ b_n/a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jeżeli $a_{i,i}=0$ i $b_i=0$ to odpowiadające im x_i przyjmuje dowolną wartość, natomiast jeżeli $a_{i,i}=0$ i $b_i \neq 0$ to układ równań nie ma rozwiązania

Układy równań liniowych

Postacie uproszczone równań

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Przy założeniu że $a_{i,i} \neq 0$, wtedy z pierwszego równania wyznacza się x_1 , a znając go można z drugiego wyznaczyć x_2 . Powtarzając algorytm wyznacza się pozostałe wartości x aż do x_n

Układy równań liniowych

Algorytm rozwiązywania układu równań liniowych dla macierzy **A** w układzie trójkątnym dolnym:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

for i = 1 to n

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

Jest to tzw. Algorytm podstawienia w przód

Układy równań liniowych

Analogiczna sytuacja ma miejsce dla macierzy trójkątnej górnej. W tym przypadku stosujemy algorytm podstawienia wstecz.

for $i = n$ to 1 step $- 1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Przykład 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```

1 A=[1,0,0,0,0;2,-2,0,0,0;3,1,2,0,0;3,3,-4,3,0;2,-3,1,4,1];
2 b=[3;-2;1;0;5];
3 x=[0;0;0;0;0];
4 for i=1:5
5     z=0;
6     for j=1:i-1
7         z=z+A(i,j)*x(j);
8     end
9     x(i)=(b(i)-z)/A(i,i);
10 end

```

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -15 \\ 77 \end{bmatrix}$$

Rozkłady LU

Rozwiązanie układu równań liniowych przy konfiguracji macierzy **A**:

- trójkątnej dolnej,
- trójkątnej górnej,

jest zagadnieniem numerycznie łatwym do realizacji. Dlatego też dąży się do tego aby problem równania **$Ax=b$** sprowadzić do zadania rozwiązania macierzy trójkątnych.

Rozkład LU

Jeżeli wszystkie minory główne macierzy A są nieosobliwe to dana macierz ma rozkład LU, $\det A_k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

Jeżeli tylko jest to możliwe (nie zachodzi dzielenie przez 0) dąży się do zastąpienia macierzy **A** iloczynem macierzy trójkątnej dolnej **L** i trójkątnej górnej **U**: **$A=L \cdot U$** .

W efekcie problem sprowadza się wtedy do dwustopniowego rozwiązywania układu równań liniowych

1. **$L \cdot \underline{z} = b$**
2. **$U \cdot \underline{x} = z$**

Rozkład LU

Dla danej macierzy **A**, poszukuje się macierzy **L** i **U**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

Opracowanie metody wyznaczania macierzy **L** i **U** rozpoczyna się od określenia zależności na mnożenie macierzy:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n l_{is} \cdot u_{sj}$$

przyjmując założenie że **$l_{is}=0$** dla **$s>i$** oraz **$u_{sj}=0$** dla **$s>j$** .

Rozkład LU

Zakładając, że w k -tym kroku wyznaczono już $k-1$ wierszy macierzy U i $k-1$ kolumn macierzy L , można zapisać:

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} \cdot u_{sk} + l_{kk} \cdot u_{kk}$$

Przyjmując jedną z wartości l_{kk} lub u_{kk} można z wcześniejszego równania obliczyć drugą z nich, a następnie z powyższego pozostałe wartości k -go wiersza macierzy U i k -tej kolumny macierzy L .

Rozkład LU

Algorytm obliczeń przyjmuje postać:

for $k = 1$ *to* n

$$l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$$

for $j = k$ *to* n

Liczbowo $i=j=k$

a_{ij} jest macierzą

kwadratową

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj}}{l_{kk}}$$

$$l_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{js}u_{sk}}{u_{kk}}$$

Przykład 2

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$[L] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix} \quad [U] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

Wprowadzenie danych do modelu:

```

1 clear;
2 clc;
3 A=[2,1,1,0;4,3,3,1;8,7,9,5;6,7,9,8];
4 b=[5;11;25;21];
5 x=[0;0;0;0];
6 y=x;
7 n=4
8 U=eye(n,n);
9 L=U;

```

A =				b = U =					
2.	1.	1.	0.	5.	1.	0.	0.	0.	
4.	3.	3.	1.	11.	0.	1.	0.	0.	
8.	7.	9.	5.	25.	0.	0.	1.	0.	
6.	7.	9.	8.	21.	0.	0.	0.	1.	

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     U(k,k)=(A(k,k)-z)/L(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(k,s)*U(s,j);
20         end
21         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(j,s)*U(s,k);
25         end
26         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
27     end
28 end

```

L =

1.	0.	0.	0.
2.	1.	0.	0.
4.	3.	1.	0.
3.	4.	1.	1.

U =

2.	1.	1.	0.
0.	1.	1.	1.
0.	0.	2.	2.
0.	0.	0.	2.

Rozkład Doolittle'a

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     L(k,k)=(A(k,k)-z)/U(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(j,s)*U(s,k);
20         end
21         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
22     end
23     z=0;
24     for s=1:(k-1)
25         z=z+L(k,s)*U(s,j);
26     end
27     U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
28 end

```

L =

2.	0.	0.	0.
4.	1.	0.	0.
8.	3.	2.	0.
6.	4.	2.	2.

U =

1.	0.5	0.5	0.
0.	1.	1.	1.
0.	0.	1.	1.
0.	0.	0.	1.

Rozkład Crouta

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     L(k,k)=(A(k,k)-z)/U(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(k,s)*U(s,j);
20         end
21         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(j,s)*U(s,k);
25         end
26         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
27     end
28 end

```

L =

2.	0.	0.	0.
4.	3.	0.	0.
8.	9.	9.	0.
6.	12.	9.	8.

U =

1.	0.5	0.5	0.
0.	0.333	0.333	0.333
0.	0.	0.222	0.222
0.	0.	0.	0.25

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     U(k,k)=(A(k,k)-z)/L(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(j,s)*U(s,k);
20         end
21         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(k,s)*U(s,j);
25         end
26         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
27     end
28 end

```

L =

1.	0.	0.	0.
2.	0.333	0.	0.
4.	1.	0.222	0.
3.	1.333	0.222	0.25

U =

2.	1.	1.	0.
0.	3.	3.	3.
0.	0.	9.	9.
0.	0.	0.	8.

Przykład 2

Rozwiązanie równania $L \cdot y = b$

```
29 for i=1:n
30     z=0;
31     k=(i-1);
32     for j=1:k
33         z=z+L(i,j)*y(j);
34     end
35     y(i)=(b(i)-z)/L(i,i);
36 end
```

y =

5.
1.
2.
0.

Przykład 2

Rozwiązanie równania $U \cdot x = y$

<pre> 37 for i=n:-1:1 38 z=0; 39 k=i+1; 40 for j=k:n 41 z=z+U(i,j)*x(j); 42 end 43 x(i)=(y(i)-z)/U(i,i); 44 end </pre>	$x \rightarrow A \cdot x$ $ans = b =$ 2. 0. 5. 5. 1. 11. 11. 0. 25. 25. 21. 21.
--	--

Sprawdzenie poprawności równania $A \cdot x = b$

Wszystkie rozkłady **LU** dają poprawne rozwiązanie.

Rozkład LU – Scilab

W środowisku obliczeniowym scilab zdefiniowano funkcję realizującą rozkład LU macierzy kwadratowej.

$[L, U] = lu(A);$

L1 =

0.25	-0.429	0.333	1.
0.5	-0.286	1.	0.
1.	0.	0.	0.
0.75	1.	0.	0.

U1 =

8.	7.	9.	5.
0.	1.75	2.25	4.25
0.	0.	-0.857	-0.286
0.	0.	0.	0.667

--> L1*U1

ans =

2.	1.	1.	0.
4.	3.	3.	1.
8.	7.	9.	5.
6.	7.	9.	8.

lusolve

W środowisku Scilab'a dostępna jest funkcja rozwiązująca układy równań liniowych metodą rozkładów LU.

Wymaga ona przekształcenia macierzy A do postaci macierzy rzadkiej, za pomocą funkcji:

```
A_s=sparse(A) ;
```

Wywołanie metody:

```
x=lusolve(A_s,b) ;
```

Lusolve

```

1 clear;
2 clc;
3 A=[2,1,1,0;4,3,3,1;8,7,9,5;6,7,9,8];
4 b=[5;11;25;21];
5 A_s=sparse(A);
6 x=lusolve(A_s,b);
7 disp(x, 'Rozwiązanie układu równań metodą rozkładu LU');

```

Rozwiązanie układu równań metodą rozkładu LU

2.
0.
1.
0.

```

A_s =
( 4, 4) sparse matrix

( 1, 1)      2.
( 1, 2)      1.
( 1, 3)      1.
( 2, 1)      4.
( 2, 2)      3.
( 2, 3)      3.
( 2, 4)      1.
( 3, 1)      8.
( 3, 2)      7.
( 3, 3)      9.
( 3, 4)      5.
( 4, 1)      6.
( 4, 2)      7.
( 4, 3)      9.
( 4, 4)      8.

```


Rozkład Cholesky'ego

- Odmianą rozkładu **LU** która jest użyteczna w pewnych sytuacjach obliczeniowych jest rozkład Cholesky'ego.
- Zaproponował on rozkład $\tilde{L}\tilde{L}^T$.
- Rozkład ten jest możliwy jeżeli macierz A jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona, jest macierzą nieosobliwą.

Rozkład Cholesky'ego

Rozkład ten można uzyskać przekształcając macierze **LU** uzyskane z rozkładu Doolittle'a dla macierzy **A** spełniających określone warunki.

- Macierz **U** rozbija się na iloczyn macierzy **D** i **L^T**.
- Macierz **D** jest macierzą diagonalną zawierającą na przekątnej elementy występujące na przekątnej w macierzy **U**

Rozkład Cholesky'ego

Rozkład ten można uzyskać przekształcając macierze **LU** uzyskane z rozkładu Doolittle'a dla macierzy **A** spełniających określone warunki.

- Macierz **U** rozbija się na iloczyn macierzy **D** i **L^T**.
- Macierz **D** jest macierzą diagonalną zawierającą na przekątnej elementy występujące na przekątnej w macierzy **U**
- Jednocześnie mnożąc macierz **L** i **D** uzyskujemy rozkład **Crouta** macierzy **LU**

Rozkład Cholesky'ego

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

Rozkład Cholesky'ego

$$A = LD^{0.5}D^{0.5}L^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{60} & \sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{60} & \sqrt{5} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{60} & \frac{1}{2}\sqrt{60} & \frac{1}{3}\sqrt{60} \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

Rozkład Cholesky'ego

Algorytm wyznaczania macierzy L jest następujący:

for k = 1 to n

```

8  for k=1:n
9      z=0;
10     for s=1:(k-1)
11         z=z+(L(k,s)^2);
12     end
13     L(k,k)=sqrt(A(k,k)-z);
14     for i=(k+1):n
15         z=0;
16         for s=1:(k-1)
17             z=z+L(i,s)*L(k,s);
18         end
19         L(i,k)=(A(i,k)-z)/L(k,k);
20     end
21 end

```

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}$$

for i = k + 1 to n

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks}}{l_{kk}}$$

Przykład 3

```

1 clear;
2 clc;
3 A=[60,30,20;30,20,15;20,15,12];
4 x=[0;0;0];
5 y=x;
6 n=3;
7 L=eye(n,n);

```

$$\sqrt{60} = 7.7459667$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{60} = 3.8729833$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{60} = 2.5819889$$

$$\sqrt{5} = 2.236068$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773503$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{60} & \sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{60} & \sqrt{5} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

11:24

--> L

L =

7.7459667	0.	0.
3.8729833	2.236068	0.
2.5819889	2.236068	0.5773503

--> L'

ans =

7.7459667	3.8729833	2.5819889
0.	2.236068	2.236068
0.	0.	0.5773503

Metoda eliminacja Gaussa

- Rozkłady **LU** są pewną wersją eliminacji Gaussa.
- Eliminacja Gaussa polega na sprowadzeniu równania macierzowego zapisanego w postaci **$Ax=b$** do postaci **$Ux=z$** , gdzie **U** jest macierzą trójkątną górną
- Eliminację prowadzi się za pomocą przekształceń elementarnych

Metoda eliminacji Gaussa

- Procedurę najwygodniej zautomatyzować dążąc do uzyskania na przekątnej macierzy trójkątnej górnej jedynek. Nie jest to jednak warunek konieczny.

Przykład 4

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 2a_{1j} \\ 0.5a_{1j} \\ -a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 - 2 \cdot 6 & -8 + 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 4 & 10 - 2 \cdot 4 \\ 3 - 0.5 \cdot 6 & -13 + 0.5 \cdot 2 & 9 - 0.5 \cdot 2 & 3 - 0.5 \cdot 4 \\ -6 + 6 & 4 - 2 & 1 + 2 & -18 + 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 - 2 \cdot 12 \\ 27 - 0.5 \cdot 12 \\ -38 + 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 3a_{2j} \\ -0.5a_{2j} \end{array} \right.$$

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 + 3 \cdot 4 & 8 - 3 \cdot 2 & 1 - 3 \cdot 2 \\ 0 & 2 - 0.5 \cdot 4 & 3 + 0.5 \cdot 2 & -14 + 0.5 \cdot 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 - 3 \cdot 10 \\ -26 + 0.5 \cdot 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \Big| 2a_{3j}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 - 2 \cdot 2 & -13 + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 + 2 \cdot 9 \end{bmatrix}$$

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 = \frac{12 - (4 \cdot 1 + 2 \cdot -2 - 2 \cdot -3)}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{10 - (2 \cdot 1 + 2 \cdot -2)}{-4} = -3 \\ x_3 = \frac{-9 - (-5 \cdot 1)}{2} = -2 \\ x_4 = \frac{-3}{-3} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} -a_{1j} \cdot 12 \\ -a_{1j} \cdot 3 \\ -a_{1j} \cdot -6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 12 - 12 & -8 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 12\right) & 6 - \left(\frac{1}{3} \cdot 12\right) & 10 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12\right) \\ 3 - 3 & -13 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 3\right) & 9 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) & 3 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) \\ -6 + 6 & 4 - \left(-\frac{1}{3} \cdot -6\right) & 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot -6\right) & -18 - \left(\frac{2}{3} \cdot -6\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 - (2 \cdot 12) \\ 27 - (2 \cdot 3) \\ -38 - (2 \cdot -6) \end{bmatrix}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \Bigg|_{/(-4)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -12 + 12 & 8 - \left(-12 \cdot -\frac{1}{2}\right) & 1 - \left(-12 \cdot -\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 2 - 2 & 3 - \left(2 \cdot -\frac{1}{2}\right) & -14 - \left(2 \cdot -\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ 21 - \left(-12 \cdot -\frac{10}{4}\right) \\ -26 - \left(2 \cdot -\frac{10}{4}\right) \end{bmatrix} \Bigg|_{\begin{matrix} -a_{2j} \cdot -12 \\ -a_{2j} \cdot 2 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \Bigg|_{/2}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4-4 & -13-\left(4 \cdot -\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{4} \\ \frac{9}{2} \\ -21 - \left(4 \cdot -\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix} \Bigg|_{-a_{3j} \cdot 4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{4} \\ \frac{9}{2} \\ -3 \end{bmatrix} \Bigg|_{/-3}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 9 \\ -\frac{2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{3} \cdot -3 - \frac{1}{3} \cdot -2 - \frac{2}{3} = 1 \\ -\frac{10}{4} + \frac{1}{2} \cdot -2 + \frac{1}{2} = -3 \\ \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

- W sytuacji gdy na przekątnej macierzy **A** występuje **0**, konieczne staje się przestawienie (zamianę wierszy układu) w celu eliminacji problemu dzielenia przez **0**.

Przykład 6

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 34 \\ 12 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} = a_{3j} \\ = a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 34 \\ 12 \\ -38 \end{bmatrix} \Big| /3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{13}{4} & 3 & 1 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ -12 \\ -20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.046 \\ -0.73 \\ 1.262 \\ 2.004 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

- Problemy w obliczeniach mogą pojawić się także gdy występują duże różnice w rzędach wielkości pomiędzy elementami macierzy
- Mogą wówczas podczas obliczeń wystąpić problemy podczas obliczeń spowodowanych dużą różnicą rzędów wielkości pomiędzy liczbami
- Rozwiązaniem problemu może w takim przypadku być również przestawienie wierszy
- Algorytm rozwiązywania się wtedy bardzo komplikuje i jest trudny do implementacji numerycznej

Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

11:24

- Metoda Gaussa zapewnia uzyskanie wyników z niewielkim błędem, jeżeli tylko wartości na głównej przekątnej nie są bliskie zero.
- Gdyby moduł któregoś z dzielników był mały w porównaniu z innymi współczynnikami, to mógłby powstać znaczny błąd numeryczny.
Istnienie zera na przekątnej wykluczałoby rozwiązanie metodą eliminacji Gaussa.
- Aby tego uniknąć, stosuje się jedną z metod wyboru elementu głównego:
 - Wybór częściowy elementu głównego
 - Wybór pełny elementu głównego

Metoda eliminacji Gaussa z

11:24

wyborem elementów głównych

Wybór częściowy elementu głównego:

- W **k**-tym kroku eliminacji poszukuje się największego elementu co do modułu w **k**-tym wierszu lub kolumnie, a następnie przestawia wskazaną kolumnę lub wiersz **k**-tą kolumną lub wierszem
- W przypadku przestawiania kolumn należy pamiętać o odpowiadającej im zmianie kolejności zmiennych.

Przykład 7 Wybór częściowy

Wybór elementu podstawowego w kolumnie:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 12 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 - \frac{6}{12} \cdot (-8) & 2 - \frac{6}{12} \cdot (6) & 4 - \frac{6}{12} \cdot (10) \\ 0 & -13 - \frac{3}{12} \cdot (-8) & 9 - \frac{3}{12} \cdot (6) & 3 - \frac{3}{12} \cdot (10) \\ 0 & 4 + \frac{6}{12} \cdot (-8) & 1 + \frac{6}{12} \cdot (6) & -18 + \frac{6}{12} \cdot (10) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 12 - \frac{6}{12} \cdot (34) \\ 27 - \frac{3}{12} \cdot (34) \\ -38 + \frac{6}{12} \cdot (34) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ -5 \\ \frac{37}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 11 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ \text{nie trzeba} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{15}{2}\right) & -1 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ -5 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{37}{2}\right) \\ 2 \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ 2 \\ 18 \\ -11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{10}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ 2 \\ -21 \\ 18 \\ -11 \end{bmatrix}$$

nie zmieniamy
nie zmieniamy
nie zmieniamy
 $a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j}$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{11} - \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-13) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ 2 \\ -\frac{18}{11} - \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-21) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ 2 \\ -21 \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34 - 10 - 6 \cdot -2 + 8 \cdot -3}{12} = 1 \\ \frac{\frac{37}{2} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{15}{2}}{-11} = -3 \\ \frac{-21 + 13}{4} = -2 \\ \frac{\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{3}}{1} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

11:24

Wybór elementu podstawowego w wierszu:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 6 & 2 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Nie przestawia się kolumn

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -8 - \frac{12}{6} \cdot (-2) & 6 - \frac{12}{6} \cdot (2) & 10 - \frac{12}{6} \cdot (4) \\ 0 & -13 - \frac{3}{6} \cdot (-2) & 9 - \frac{3}{6} \cdot (2) & 3 - \frac{3}{6} \cdot (4) \\ 0 & 4 + (-2) & 1 + (2) & -18 + (4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 - \frac{12}{6} \cdot (12) \\ 27 - \frac{3}{6} \cdot (12) \\ -38 + (12) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

11:24

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

4 2 2
Nie przestawia się kolumn

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

nie zmieniamy
nie zmieniamy
 $a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j}$
 $a_{4j} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{2j}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 - \frac{12}{4} \cdot (2) & 1 - \frac{12}{4} \cdot (2) \\ 0 & 0 & 4 + (2) & -14 + (2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 - \frac{13}{4} \cdot (12) \\ -26 + (1) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

11:24

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{Konieczna jest} \\ \text{Zamiana kolumny} \\ \text{4 z 3} \end{array} \right. \quad 2 \quad \boxed{5}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \frac{13}{5} \cdot (2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -60 - \frac{13}{5} \cdot (-9) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

11:24

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 - 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}{6} = 1 \\ \frac{10 - 2 \cdot (-2) - 2}{-4} = -3 \\ \frac{-9 - 2 \cdot (-2)}{-5} = 1 \\ \frac{12}{5} \cdot -\frac{5}{6} = -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

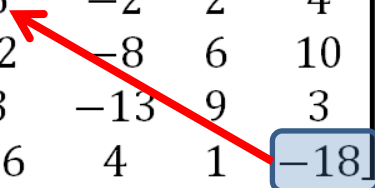
Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

11:24

Wybór pełny elementu głównego :

- W k -tym kroku eliminacji poszukuje się największego elementu co do modułu zawartego w elementach macierzy złożonej z elementów a_{rs} , takich że $k \leq r \leq n$ oraz $k \leq r \leq n$
- Następnie kolumnę i wiersz zawierające największy element zamienia się z k -tym wierszem i k -tą kolumną
- Należy pamiętać że przy przestawieniu kolumny konieczne jest także przestawienie odpowiadających im zmiennych

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 4 \text{ wiersz z } 1 \\ 4 \text{ kolumna z } 1 \\ x_4 \text{ z } x_1 \end{array} \right.$$


$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 10 & -8 & 6 & 12 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 34 \\ 27 \\ 12 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -8 - \frac{10}{-18} \cdot 4 & 6 - \frac{10}{-18} \cdot 1 & 12 - \frac{10}{-18} \cdot -6 \\ 0 & -13 - \frac{3}{-18} \cdot 4 & 9 - \frac{3}{-18} \cdot 1 & 3 - \frac{3}{-18} \cdot -6 \\ 0 & -2 - \frac{4}{-18} \cdot 4 & 2 - \frac{4}{-18} \cdot 1 & 6 - \frac{4}{-18} \cdot -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 34 - \frac{10}{-18} \cdot -38 \\ 27 - \frac{3}{-18} \cdot -38 \\ 12 - \frac{4}{-18} \cdot -38 \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{52}{9} & \frac{59}{9} & \frac{26}{3} \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{116}{9} \\ \frac{62}{3} \\ \frac{32}{9} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} -\frac{37}{3} \text{ jest największe} \\ 3 \text{ wiersz z } 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & -\frac{52}{9} & \frac{59}{9} & \frac{26}{3} \\ 0 & -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{116}{9} \\ \frac{32}{9} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ a_{4j} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{2j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{59}{9} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{55}{6}\right) & \frac{26}{3} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)(2) \\ 0 & 0 & \frac{20}{9} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{55}{6}\right) & \frac{14}{3} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{116}{9} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{62}{3}\right) \\ \frac{32}{9} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{62}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{251}{111} & \frac{286}{37} \\ 0 & 0 & \frac{155}{111} & \frac{166}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ 356 \\ \frac{111}{188} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{286}{37} \text{ jest największe} \\ 4 \text{ kolumna z 3} \\ x_1 \text{ z } x_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & \frac{166}{37} & \frac{155}{111} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ 356 \\ \frac{111}{188} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{155}{111} - \left(\frac{166}{37}\right)\left(\frac{37}{286}\right)\left(\frac{251}{111}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ 356 \\ \frac{188}{111} - \left(\frac{166}{37}\right)\left(\frac{37}{286}\right)\left(\frac{356}{111}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{143} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ -\frac{24}{143} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-38 - (4)(-3) - (-6)(1) - (1)(-2)}{-18} = 1 \\ \frac{\frac{62}{3} - \left(\frac{55}{6}\right)(-2) - (2)(1)}{-\frac{37}{3}} = -3 \\ \frac{\frac{356}{111} - \frac{251}{111}(-2)}{\frac{286}{37}} = 1 \\ -\frac{24}{143} \left(\frac{143}{12}\right) = -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

11:24

- Jest to zmodyfikowana metoda eliminacji Gaussa równań $Ax=b$
- Dąży się do sprowadzenia macierzy A do postaci diagonalnej jedynekowej
- Wtedy w wyniku przekształceń wektor b będzie zawierał wartości przyporządkowywane x w wyniku rozwiązania
- Przed przystąpieniem do obliczeń w przypadku gdy na przekątnej znajdują się elementy zerowe należy odpowiednio przekształcić macierz A
- Metoda ta w literaturze występuje jako metoda Jordana lub metoda eliminacji zupełnej

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

11:24

Algorytm rozwiązywania

1. Dzieli się wszystkie elementy macierzy **A** i wektora **b** z **i=1** wiersza przez element **a₁₁**
2. Od każdego elementu **i=2,3..n** wiersza macierzy **A** i wektora **b** odejmuje się pierwszy element wiersza pomnożony przez odpowiadający mu element pierwszego wiersza
3. W kolejnych krokach powtarza się czynność traktując elementy z przekątnej jako wyjściowe
4. W efekcie elementy poza przekątną macierzy **A** są zerowane, a na przekątnej przyjmują wartość 1, natomiast elementy wektora **b** dążą do rozwiązania układu równań

Przykład 9

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /a_{11} \text{ (w pierwszej kolejności)} \\ a_{2i} - a_{21} * a_{1i} \\ a_{3i} - a_{31} * a_{1i} \\ a_{4i} - a_{41} * a_{1i} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 6/6 & -2/6 & 2/6 & 4/6 \\ 12 - 12/1 & -8 - 12(-2/6) & 6 - 12(2/6) & 10 - 12(4/6) \\ 3 - 3/1 & -13 - 3(-2/6) & 9 - 3(2/6) & 3 - 3(4/6) \\ -6 + 6/1 & 4 + 6(-2/6) & 1 + 6(2/6) & -18 + 6(2/6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/6 \\ 34 - 12(12/6) \\ 27 - 3(12/6) \\ -38 + 6(2/6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \begin{array}{l} a_{1i} - a_{12} * a_{2i} \\ /a_{22} \text{ (w pierwszej kolejności)} \\ a_{3i} - a_{32} * a_{2i} \\ a_{4i} - a_{42} * a_{2i} \end{array}$$

Przykład 9

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & -4/-4 & 2/-4 & 2/-4 \\ 0 & -12 - (-12)(1) & 8 - (-12)\left(-\frac{1}{2}\right) & 1 - (-12)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 2 - (2)(1) & 3 - (2)\left(-\frac{1}{2}\right) & -14 - (2)\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 10/-4 \\ 21 - (-12)\left(-\frac{5}{2}\right) \\ -26 - (2)\left(-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ 5 \\ -\frac{5}{2} \\ -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i} - a_{13} * a_{3i} \\ a_{2i} - a_{23} * a_{3i} \\ /a_{33} \text{ (w pierwszej kolejności)} \\ a_{4i} - a_{43} * a_{3i} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} - \frac{1}{6} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 0 & 0 & 2/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 4 - 4 & -13 - 4\left(-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ -9/2 \\ -21 - 4\left(-\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład 9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} \\ -\frac{19}{4} \\ \frac{9}{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i} - a_{14} * a_{4i} \\ a_{2i} - a_{24} * a_{4i} \\ a_{3i} - a_{34} * a_{4i} \\ /a_{44} \text{ (w pierwszej kolejności)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} - \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} + \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3/-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} - \frac{11}{12} \\ -\frac{19}{4} + \frac{7}{4} \\ \frac{9}{2} - \frac{5}{2} \\ -3/-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$