

Metody numeryczne

Wykład 2



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://m.lanczont.pollub.pl>

Zakres wykładu

11:20

- Pojęcia podstawowe – Algebra macierzy
- Własności macierzy
- Macierze blokowe
- Przestrzenie liniowe wektora
- Wartości własne
- Przekształcenia przez podobieństwo
- Normy wektorów i macierzy

Pojęcia podstawowe

11:20

Macierzą rzeczywistą **A** o wymiarach **m** × **n** nazywamy prostokątną tablicę zawierającą elementy rzeczywiste, ustawione w **m** wierszach i **n** kolumnach.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pojęcia podstawowe

11:20

- Macierze oznacza się zazwyczaj dużymi literami alfabetu: **A**, **B**, **X**, natomiast elementy macierzy małymi literami z indeksami oznaczającymi numer wiersza i kolumny: **$a_{i,j}$** , **$b_{i,j}$** , **$x_{i,j}$** .
- Macierz **A** można także zapisać **$[a_{i,j}]_{m \times n}$** lub **$[a_{i,j}]$** .
- Macierz **$A=[a_{i,j}]_{1 \times n}$** lub **$A=[a_{i,j}]_{m \times 1}$** nazywa się wektorem.
- Macierz o wymiarze **$n \times n$** określa się jako macierz kwadratowa.

Pojęcia podstawowe

11:20

- Macierz której wszystkie elementy są **0** nazywa się **zerową**.
- Macierz kwadratową której wszystkie elementy poza leżącymi na przekątnej są **0** określa się jako macierz **diagonalną**.
- Macierz diagonalna w której wszystkie elementy leżące na przekątnej są równe **1**, nazywa się macierzą **jednostkową** n -tego stopnia i oznacza I_n .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pojęcia podstawowe

11:20

Macierz **trójkątną dolną** lub **górną** określa się macierz której wszystkie elementy leżące **nad** lub **pod** przekątną są równe **0**.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Własności macierzy

11:20

Sumą macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ i $B=[b_{i,j}]_{m \times n}$ nazywa macierz $C=[c_{i,j}]_{m \times n}$ gdzie $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

Iloczyn macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywa macierz $C=[c_{i,j}]_{m \times n}$ gdzie $c_{i,j}=\alpha \times a_{i,j}$

Własności macierzy

11:20

Dla macierzy **A**, **B** i **C** tego samego wymiaru, oraz liczb rzeczywistych **α** i **β** zachodzą zależności:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A + (-A) = 0$$

$$\alpha \times (A + B) = \alpha \times A + \alpha \times B$$

$$(\alpha + \beta) \times A = \alpha \times A + \beta \times A$$

$$1 \times A = A$$

$$(\alpha \times \beta) \times A = \alpha \times (\beta \times A)$$

Własności macierzy

11:20

Iloczynem macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ i $B=[b_{i,j}]_{n \times k}$ nazywa macierz $C=[c_{i,j}]_{m \times k}$ gdzie
 $c_{i,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\dots+a_{i,n}b_{n,j}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 34 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

Przemienność mnożenia macierzy nie
zawsze zachodzi $AB \neq BA$

Własności macierzy

11:20

Jeżeli macierze **A**, **B** i **C** są odpowiednich wymiarów, a **α** jest liczbą rzeczywistą to:

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$AI_n = I_m A = A$$

$$A^n A^m = A^{n+m}$$

Własności macierzy

11:20

Macierzą transponowaną do macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $B=[b_{i,j}]_{n \times m}$ taką że: $b_{i,j} = a_{j,i}$

Macierz transponowaną do macierzy A oznacza się A^T

Przy transponowaniu macierzy kolejne jej wiersze stają się kolumnami macierzy transponowanej.

Własności macierzy

11:20

Dla macierzy **A**, **B** odpowiednich wymiarów, **α** liczby rzeczywistej oraz **n** liczby całkowitej:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(\alpha \times A)^T = \alpha \times A^T$$

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

$$(A^n)^T = (A^T)^n$$

Macierz kwadratową **A** nazywamy symetryczną (antysymetryczną), gdy

$$A^T = A \quad (A^T = -A)$$

Pojęcia podstawowe

11:20

Macierzą **hermitowską** określamy macierz kwadratową zawierającą elementy rzeczywiste lub zespolone która jest równa swojemu sprzężeniu.

$$A=A^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & i \\ 1+2i & -3 & 3+2i \\ -i & 3-2i & 5 \end{bmatrix}$$

Pojęcia podstawowe

11:20

Własności macierzy hermitowskiej:

1. W głównej przekątnej są wyrazy rzeczywiste
2. Ma rzeczywiste wartości własne
3. Wyznacznik macierzy jest rzeczywisty
4. Macierz o elementach rzeczywistych jest symetryczna

Wyznacznik macierzy

11:20

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej **A** nazywa się funkcję **$|A| = \det A$** przyporządkowująca liczbę rzeczywistą w sposób indukcyjny:

1. Jeżeli macierz **A** ma stopień $n=1$ to:

$$\det A = a_{1,1}$$

2. Jeżeli macierz **A** ma stopień $n \geq 2$ to:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det A_{1,1} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1,n} \det A_{1,n}$$

Wyznacznik macierzy

11:20

Dla macierzy kwadratowej A o stopniu $n \geq 2$, można określić dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$ takie że:

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$$

Można więc dla macierzy kwadratowej A stopnia $n \geq 2$, oraz $i \geq 1, j \leq n$ opisać wyznacznik macierzy jako:

$$\det A = a_{i,1} D_{i,1} + \dots + a_{i,n} D_{i,n} = a_{1,j} D_{1,j} + \dots + a_{n,j} D_{n,j}$$

Wyznacznik macierzy

11:20

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 14$$

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \cdot 4) =$$
$$= 225 - 225 = 0$$

**Reguły te nie mają zastosowania do obliczania
wyznaczników wyższych rzędów $n > 3$**

Wyznacznik macierzy

11:20

Interpretacją geometryczną
wyznacznika II stopnia jest pole
równoległoboku opisanego wektorami
 $\vec{v}=(a,b)$ i $\vec{u}=(c,d)$

Interpretacją geometryczną
wyznacznika III stopnia jest objętość
równoległościanu opisanego wektorami
 $\vec{v}=(a,b,c)$, $\vec{u}=(d,e,f)$ i $\vec{w}=(g,h,i)$.

Wyznacznik macierzy

11:20

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej lub dolnej, niezależnie od stopnia macierzy równy jest iloczynowi elementów znajdujących się na przekątnej macierzy.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-8) \cdot 3 \cdot (-1) = 48$$

Wyznacznik macierzy

11:20

Wyznacznik macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & B & \cdots & B \\ 0 & A_2 & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \cdots \cdot \det A_k$$

gdzie $A_1, \dots, A_k$ są macierzami kwadratowymi (niekoniecznie tego samego stopnia, 0 oznaczają macierze zerowe, a B dowolne macierze to wyznacznik takiej macierzy liczymy jako iloczyn wyznaczników.

Wyznacznik macierzy

11:20

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 11 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \det[4] \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -5 & 11 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$4 \cdot 1 \cdot (-98) = -392$$

Wyznacznik macierzy

11:20

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę lub wiersz zerowy wynosi 0.
2. Zmiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn spowoduje że zmieni się znak wyznacznika macierzy
3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie takie same kolumny lub wiersze wynosi 0
4. Jeżeli można z jednego wiersza lub kolumny wydzielić stały współczynnik to można wyłączyć go przed wyznacznik macierzy.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{4}{3} \\ 3 & 5 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

11:20

Wyznacznik macierzy w której w jedną kolumnę lub wiersz opisze się jako sumę liczb można policzyć jako sumę wyznaczników dwóch macierzy w której wskazany wiersz lub kolumna są zastąpione wskazanymi składnikami:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 3-2 \\ 2 & 2+3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierz

11:20

Wyznacznik macierzy nie zmieni się jeżeli do wartości dowolnego wiersza lub kolumny dodamy dowolną wielokrotność innego wiersza lub kolumny.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 + 2 \cdot 5 & 5 \\ 3 & 5 + 2 \cdot 6 & 6 \\ 1 & 3 + 2 \cdot 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

11:20

1. Wyznacznik macierzy i wyznacznik macierzy do niej transponowanej są sobie równe: $\det A = \det A^T$
2. Jeżeli macierze A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
3. Dla dowolnego n całkowitego:
 $\det(A^n) = (\det A)^n$

Wyznacznik macierzy

11:20

Algorytm Gaussa obliczania wyznaczników, dla macierzy kwadratowych stopnia $n \geq 3$ i $a_{1,1} \neq 0$.

$$\det[A] = a_{1,1} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ 0 & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,n} \end{bmatrix} = a_{1,1} \det \begin{bmatrix} a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,n} \end{bmatrix} = \cdots$$

$$\text{gdzie: } a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,1} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}$$

Wyznacznik macierzy

11:20

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$a'_{2,1} = a_{2,1} - a_{2,1} \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} = 3 - 3 \frac{1}{1} = 0$$

$$a'_{2,2} = a_{2,2} - a_{2,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} = -4 - 3 \frac{2}{1} = -10$$

$$a'_{2,3} = a_{2,3} - a_{2,1} \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} = 2 - 3 \frac{-3/2}{1} = \frac{13}{2}$$

$$a'_{2,4} = a_{2,4} - a_{2,1} \frac{a_{1,4}}{a_{1,1}} = 2 - 3 \frac{1}{1} = -1$$

Wyznacznik macierzy

11:20

$$2 \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \\ 0 & -10 & \frac{13}{2} & -1 \\ 0 & -19 & \frac{31}{2} & -8 \\ 0 & -6 & \frac{2}{2} & -3 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} -10 & \frac{13}{2} & -1 \\ -19 & \frac{31}{2} & -8 \\ -6 & \frac{2}{2} & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= (2 \cdot (-10)) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{13}{20} & \frac{1}{10} \\ -19 & \frac{31}{2} & -8 \\ -6 & \frac{2}{2} & -3 \end{bmatrix} = (-20) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{13}{20} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{63}{20} & -\frac{61}{10} \\ 0 & -\frac{19}{10} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} =$$

Wyznacznik macierzy

11:20

$$= (-20) \det \begin{bmatrix} \frac{63}{20} & -\frac{61}{10} \\ 19 & 12 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \left(-20 \cdot \frac{63}{20}\right) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{122}{63} \\ 19 & 12 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= (-63) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{122}{63} \\ 0 & \frac{383}{63} \\ 0 & -\frac{383}{63} \end{bmatrix} = (-63) \det \begin{bmatrix} -\frac{383}{63} \end{bmatrix} =$$

$$= (-63) \cdot \left(-\frac{383}{63}\right) = 383$$

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A stopnia n określa się macierz A^{-1} spełniającą warunek:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową n -tego stopnia.

Macierz jest odwracalna tylko wtedy gdy jest nieosobliwa, a więc spełniony jest warunek:

$$\det A \neq 0$$

Własności macierzy odwrotnej ^{11:20}

Dla macierzy A i B tego samego wymiaru, odwracalnych, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$ to

- $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^n$ są odwracalne
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)(A^{-1})$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Macierz odwrotna

11:20

Macierz odwrotną do A liczy się według zależności:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$$

gdzie D jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Gdzie M_{ij} jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -kolumny

Przykład 1

11:20

Wyznaczyć macierz odwrotną do A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$-(0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1) =$$

$$= 9 - (2 + 6) = 1$$

Przykład 1

11:20

Należy wyznaczyć macierz dopełnień algebraicznych:

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(3) = -3$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1

11:20

Macierz D^T :

$$D^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna do A wynosi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

11:20

Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą Gaussa poprzez przekształcanie układu macierzy AI do układu IA^{-1} za pomocą elementarnych przekształceń:

1. Mnożenia macierzy przez stałe różne od zera
2. Dodawania do elementów wiersza odpowiadających ich elementów innego wiersza przemnożonych przez dowolną stałą
3. Przystawianie wierszy

Przykład 2

11:20

Za pomocą przekształceń elementarnych można z zależności:

$$AA^{-1}=I$$

Wyznaczyć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

11:20

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - w_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2w_2$$

Przykład 2

11:20

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2w_2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2w_3 \\ -w_3 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz blokowa (klatkowa)

11:20

Jeżeli elementami macierzy **A** są inne macierze, to taką macierz określa się mianem macierzy blokowej (klatkowej).

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

Podział na bloki (klatki) może być prowadzony w sposób dowolny.

Macierze blokowe

11:20

Dodawanie i mnożenie macierzy blokowych realizowane jest analogicznie jak przy dodawaniu i mnożeniu macierzy, traktują bloki jak elementy macierzy.

Bloki utworzone w macierzach muszą mieć wymiary umożliwiające wykonanie działań:

- Dodawanie – macierze tego samego wymiaru**
- Mnożenie – zgodna liczba kolumn w pierwszej i wierszy w drugiej macierzy**

Przykład 3

11:20

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 + I 0 \\ 0 B_1 + A_4 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierze blokowe

11:20

Macierz diagonalna-blokowa jest macierzą zawierającą na swojej przekątnej macierze, a pozostałe elementy są równe 0.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix}$$

Macierze blokowe

11:20

Wyznacznik macierzy blokowej diagonalnej równa się iloczynowi wyznaczników macierzy znajdujących się na przekątnej.

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ i macierze A_1 i A_4 są kwadratowe to: $\det A = \det A_1 \cdot \det A_4$

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ i macierze A_1 i A_4 są kwadratowe, nieosobliwe to: $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_4^{-1} \end{bmatrix}$

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ i B jest dowolną macierzą o wymiarach $m \times n$ to: $A^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$

Wartości własne macierzy

11:20

Dla dowolnej macierzy kwadratowej **A** można zapisać wielomian **charakterystyczny** w postaci: $W(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

Równanie w postaci $W(\lambda) = 0$ nazywa się równaniem charakterystycznym, a pierwiastki to wartości **własne** macierzy.

Wartości własne

11:20

- a) Suma wartości własnych (z krotnościami) jest równa śladowi macierzy tzn. sumie elementów jej przekątnej.
- b) Macierz jest osobliwa wtedy i tylko wtedy gdy zero jest jej wartością własną,
- c) Macierz jest pierwiastkiem własnego równania charakterystycznego,
- d) Macierz symetryczna ma tylko rzeczywiste wartości własne,
- e) Jeśli λ jest wartością własną macierzy A , to $c \cdot \lambda$ jest wartością własną macierzy $c \cdot A$,
- f) Jeśli $\lambda \neq 0$ jest wartością własną macierzy A , to $1/\lambda$ jest wartością własną macierzy A^{-1} ,
- g) Jeśli λ jest wartością własną macierzy A , to λ^m jest wartością własną macierzy A^m , $m \in \mathbb{N}$

Przykład 4

11:20

Wyznaczyć wartości i wektor własny macierzy A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W(\lambda) = \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

Przykład 4

11:20

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} \lambda^2 - 5\lambda + 1 \\ \hline \lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda - 1 : \lambda - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \lambda^3 + \lambda^2 \\ \hline -5\lambda^2 + 6\lambda - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - -5\lambda^2 + 5\lambda \\ \hline \lambda - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \lambda + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \approx 0.209, \lambda_3 \approx 4.791$$

Wektory wartości własnych

11:20

Wektory x wartości własnych otrzymuje rozwiązując równanie $(\lambda I - A)x = 0$, gdzie 0 jest wektorem zerowym dla każdego λ .

- Otrzymany układ będzie nieoznaczony, posiadający ∞ wiele rozwiązań.
- Zazwyczaj zapisuje się postać ogólną $x_1 = x$, a pozostałych elementów wektora zależnych od x ,
- lub przyjmuje się że jeden z elementów jest równy 1.

Wektory wartości własnych

11:20

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 2)x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \approx 0.209, \lambda_3 \approx 4.791$$

Wektory wartości własnych

11:20

Dla $\lambda=1$

$$\begin{cases} (1-3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + (1-2)x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (1-1)x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_3 = -2x_1 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -2x \end{bmatrix}$$

Wektory wartości własnych

11:20

Dla $\lambda=0.209$

$$\begin{cases} (0.209 - 3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + (0.209 - 2)x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (0.209 - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

...

$$\begin{cases} -0.582x_3 + 0.582x_3 = 0 \\ x_1 = 0.2085x_3 \\ x_2 = -0.791x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0.2085x \\ -0.791x \\ x \end{bmatrix}$$

Podobieństwo macierzy

11:20

Macierze **A** i **B** określa się jako podobne jeżeli istnieje taka macierz **C**, że spełniona jest poniższa zależność:

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = B$$

Przekształcenia przez podobieństwo

11:20

Dla każdej macierzy hermitowskiej można zdefiniować przekształcenie przeprowadzające ją w macierz diagonalną.

$$C^{-1} \cdot H \cdot C = D$$

Przekształcając powyższe równanie:

$$C_i^{-1} \cdot H \cdot C_i = d_i \rightarrow H \cdot C_i = d_i \cdot C_i$$

Otrzymamy zależność na i-ty element macierzy diagonalnej.

Przekształcenia przez podobieństwo

11:20

$$H \cdot C_i = d_i \cdot C_i$$

Macierz H pomnożona przez wektor (i -tą kolumnę macierzy C) w wyniku daje ten sam wektor pomnożony przez liczbę d_i .

Wówczas wektor C_i jest wektorem własnym macierzy H z wartością własną d_i .

Wektory własne macierzy H są więc kolumnami macierzy C .

Przekształcenie macierzy H macierzą C w macierz diagonalną D określa się diagonalizacją macierzy.

Diagonalizacja macierzy

11:20

Dla macierzy symetrycznych (rzeczywistych) podstawowymi metodami diagonalizacji są:

- Metoda Jacobiego
- Metoda Householdera
- Metoda Davidsona

Dla macierzy niesymetrycznych:

- Metoda QR
- Metoda Hirao i Nakatsujego

Norma macierz

11:20

Normą macierzy kwadratowej A jest nieujemna liczba $||A||$ (nie wyznacznik) która spełnia poniższe warunki:

1. $||A|| \rightarrow (0, \infty)$, $||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2. $||\alpha A|| = |\alpha| \cdot ||A||$, gdzie α jest liczbą

a) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

b) $||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

Norma wektora

11:20

Dla macierzy jednokolumnowej (wektora) określone są następujące normy:

1. Suma modułów: $\|A\| = \sum_{i=1}^n |a_i|$
2. Norma euklidesowa: $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$
3. Norma maksimum: $\|A\|_\infty = \max_i |x_i|$

Normy macierzy

11:20

Normy macierzy kwadratowy określa się następująco:

1. Suma kolumny: $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$

2. Norma euklidesowa: $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$

3. Norma spektralna: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

$\lambda_{\max}(A)$ – maksymalna wartość wartości własnych macierzy A

4. Sumy wierszy: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

Przykład 5

11:20

Obliczyć normy wektora:

$$A = [54, -9, 0, 12, 3]$$

$$\|A\| = 54 + 9 + 12 + 3 = 78$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{54^2 + 9^2 + 12^2 + 3^2} = 56.125$$

$$\|A\|_\infty = 54$$

Przykład 6

11:20

Obliczyć normy macierzy kwadratowej:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\| = \max[5 \quad 5 \quad 3] = 5$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{9 + 4 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 + 1 + 1} = 5$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = 4.858$$

$$\|A\|_{\infty} = \max \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$$

Przykład 6

11:20

$$\det(I\lambda - A^T A) = 0$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 13 & -10 & -5 \\ -10 & \lambda - 9 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0$$

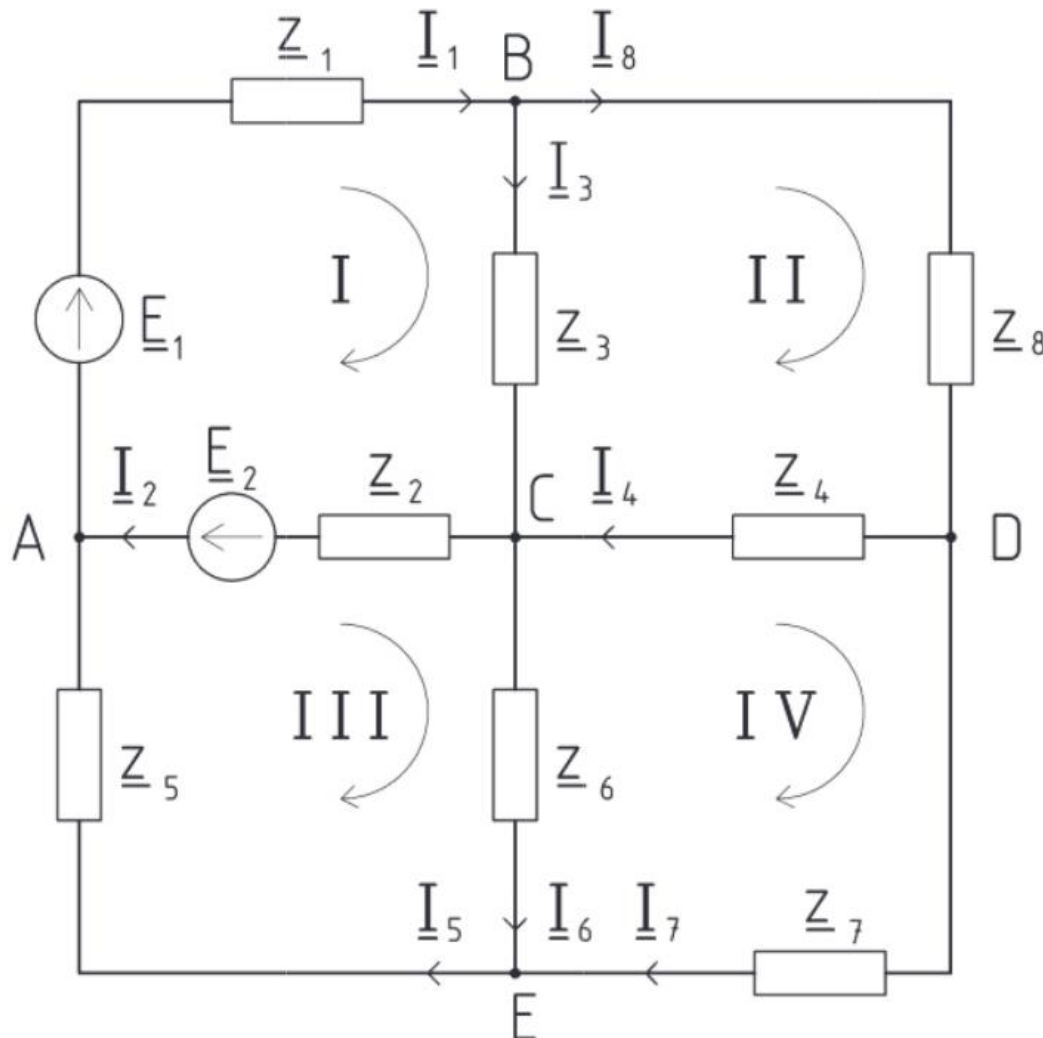
$$\lambda^3 - 25\lambda^2 + 33\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 0.031 \quad \lambda = 1.365 \quad \lambda = 23.604$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \sqrt{23.604} = 4.858$$

Przykład 7

11:20



$$\underline{E}_1 = 100 \text{ V}$$

$$\underline{E}_2 = j100 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_5 = 10 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_8 = j10 \Omega$$

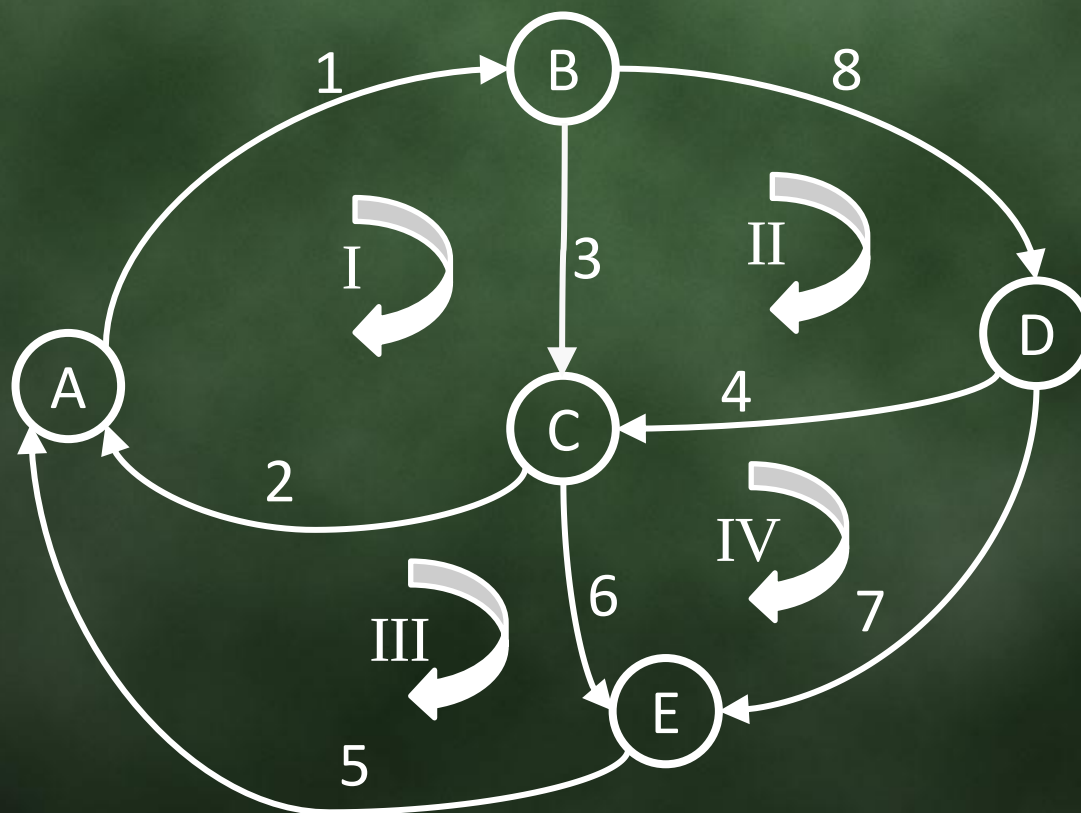
$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_6 = -j10 \Omega$$

$$\underline{Z}_4 = \underline{Z}_7 = 20 \Omega$$

Przykład 7

11:20

Dla metody prądów oczkowych na podstawie schematu można utworzyć graf zorientowany.



Przykład 7

11:20

Na podstawie grafu tworzona jest macierz incydencji.

0 – jeżeli gałąź nie należy do oczka

1 – jeżeli gałąź należy do oczka, a prąd gałęziowy jest zgodny z prądem oczkowym

-1 – jeżeli gałąź należy do oczka, a prąd gałęziowy nie jest zgodny z prądem oczkowym

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 7

11:20

Na podstawie struktury obwodu budowana jest macierz diagonalna impedancji.

$$Z_d = \begin{bmatrix} \underline{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_8} \end{bmatrix}$$

Przykład 7

11:20

Wektory prądów i napięć źródłowych

0 – jeżeli w gałęzi nie ma źródeł

ten sam znak – jeżeli kierunek (E jest zgodny) (I jest przeciwny) z kierunkiem prądu gałęziowego

znak przeciwny – jeżeli kierunek (E jest przeciwny) (I jest zgodny) z kierunkiem prądu gałęziowego

$$E_g = \begin{bmatrix} \underline{E_1} + \underline{E_2} \\ 0 \\ \underline{E_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad I_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 7

11:20

1. Macierz impedancji własnych i wzajemnych

$$Z = B \cdot Z_d \cdot B^T$$

1. Prądy oczkowe

$$I_o = Z^{-1} \cdot B \cdot (E_g - Z_d \cdot I_z)$$

1. Prądy wypadkowe gałęzi uogólnionych

$$I = B^T \cdot I_o$$

1. Prądy gałęziowe

$$I_g = I + I_z$$

Przykład 7

11:20

```
clear
```

```
clc
```

```
// dane: impedancje gałęzi
```

```
Z1 = 10;
```

```
Z5 = Z1;
```

```
Z2 = 10*%i;
```

```
Z8 = Z2;
```

```
Z3 = -10*%i;
```

```
Z6 = Z3;
```

```
Z4 = 20;
```

```
Z7 = Z4;
```

Przykład 7

11:20

// dane: parametry źródeł

E1 = 100;

E2 = 100*%i;

// macierz incydencyjna oczkowa

B=[1,1,1,0,0,0,0,0;

0,0,-1,1,0,0,0,1;

0,-1,0,0,1,1,0,0;

0,0,0,-1,0,-1,1,0];

// macierz diagonalna impedancji

Zd=diag([Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6,Z7,Z8]);

Przykład 7

11:20

// macierz kolumnowa źródeł napięcia

$E_g = [E_1; E_2; 0; 0; 0; 0; 0; 0];$

// macierz kolumnowa źródeł prądu

$I_z = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];$

// macierz Impedancji własnych i wzajemnych

$Z = B * Z_d * B';$

// Prądy oczkowe

$I_o = \text{inv}(Z) * B * (E_g - Z_d * I_z);$

// Prądy wypadkowe

$I = B' * I_o;$

Przykład 7

11:20

```
// prądy w gałęziach
```

```
Ig=I+Iz;
```

```
// wartości skuteczne prądów w  
gałęziach
```

```
Igs=abs(Ig);
```

```
// wyświetlanie wyników
```

```
disp(Ig, 'wartości zespolone  
prądów');
```

```
disp(Igs, 'wartości skuteczne  
prądów')
```

Przykład 7

11:20

$$7.7876106 + 3.1858407i$$

$$12.256637 + 6.1504425i$$

$$5.4424779 + 8.3628319i$$

$$1.5929204 - 3.8938053i$$

$$-4.4690265 - 2.9646018i$$

$$-5.2212389 - 1.6814159i$$

$$0.7522124 - 1.2831858i$$

$$2.3451327 - 5.1769912i$$

$$8.4140632$$

$$13.713245$$

$$9.9778516$$

$$4.2070316$$

$$5.3629341$$

$$5.4852981$$

$$1.4874103$$

$$5.6833868$$

wartości zespolone
prądów

wartości skuteczne
prądów