

Rachunek macierzowy

Wstęp

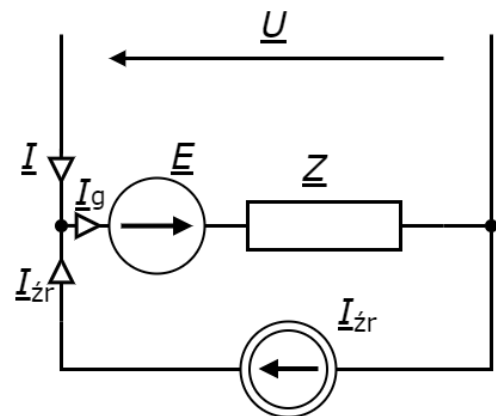
Rachunek macierzowy jest podstawowym narzędziem stosowanym przez większość metod numerycznych. Wiele problemów obliczeniowych można rozwiązać z wykorzystaniem prostych przekształceń macierzowych, metodami stosowanymi na zajęciach rachunkowych. Dobrym przykładem może być zastosowanie rachunku macierzowego przy wyznaczaniu rozplywu prądów w rozgałęzionym obwodzie elektrycznym metodami:

- prądów oczkowych
- potencjałów węzłowych
- wyznaczników

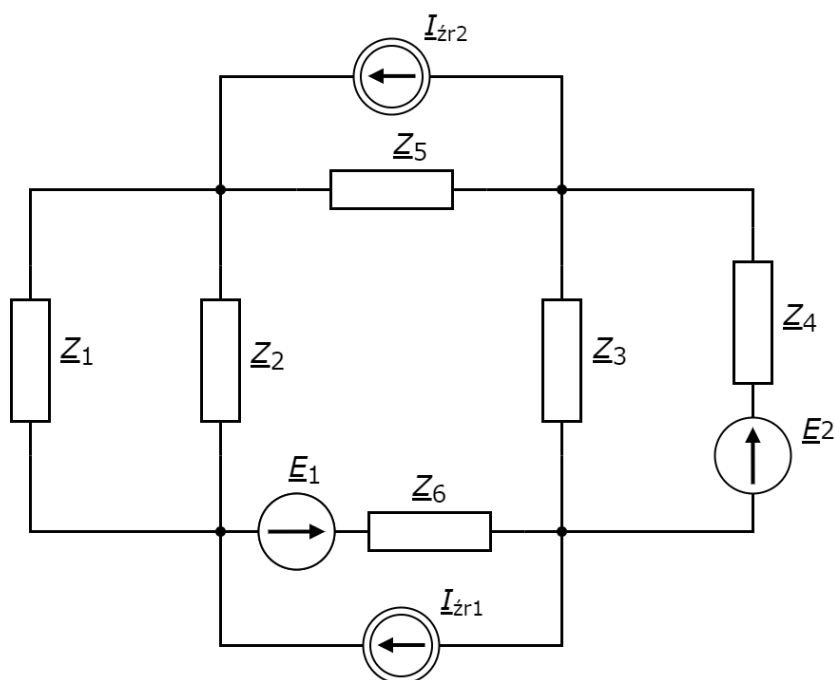
Rozgałęziony obwód elektryczny [1, 2] jest złożoną strukturą gałęzi połączonych w węzłach. Każda gałąź zawiera jeden lub więcej elementów idealnych i jest opisana prądem elektrycznym. Węzeł charakteryzuje potencjał elektryczny; łączą się w nim co najmniej dwie gałęzie. Układ gałęzi tworzących zamknięty kontur, bez gałęzi wewnętrznych, nazywa się oczkiem.

Uogólniona postać gałęzi elektrycznej budowana przez idealne elementy pasywne może zawierać także elementy źródłowe (prądowy i napięciowy). Schemat gałęzi uogólnionej pokazano na ryc. 1 [3].

Wyznaczanie rozplywu prądów gałęziowych w rozgałęzionym obwodzie elektrycznym prądu przemiennego z wykorzystaniem rachunku macierzowego omówiona zostanie dla przykładowego układu pokazanego na ryc. 2.

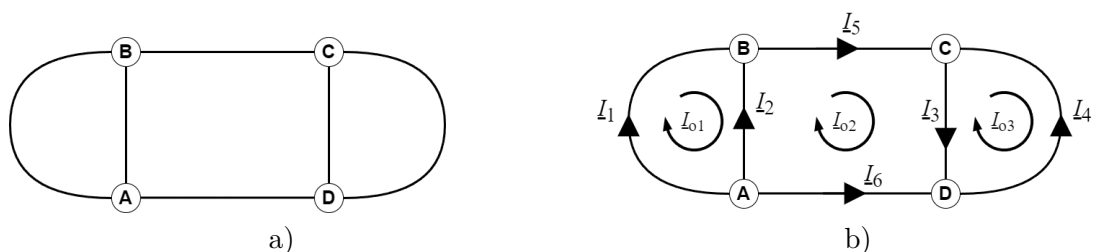


Ryc. 1. Uogólniona gałąź obwodu elektrycznego



Ryc. 2. Schemat analizowanego obwodu elektrycznego

Każdy analizowany obwód elektryczny można przedstawić w uproszczonej formie jako graf obrazujący połączenia węzłów i gałęzi. Graf niezoorientowany pokazano na ryc. 3a. Po uzupełnieniu go o kierunki prądów gałęziowych i oczkowych otrzymuje się graf zorientowany, który ułatwia zapis równań. Kierunki prądów można przyjąć dowolnie. Zwykle kierunki prądów gałęziowych przyjmuje się zgodnie z wymuszeniami, a zwroty prądów oczkowych – zgodnie z ruchem wskazówek zegara, jak na ryc. 3b.



Ryc. 3. Diagram a) niezoorientowany i b) zorientowany

Metody prądów oczkowych i potencjałów węzłowych wykorzystują podobne przekształcenia. Podstawą uzyskania poprawnych wyników jest prawidłowe zapisanie macierzy strukturalnych opisujących powiązania elementów obwodu przedstawione na grafie zorientowanym.

1 Macierze i wektory danych

Elementy pasywne i wymuszenia analizowanego obwodu są przekazywane do algorytmu za pomocą macierzy i wektorów wspólnych dla obu metod.

- Z_d – diagonalna macierz impedancji gałęziowych; kolejne elementy odpowiadają gałęziom

zgodnie z przyjętym indeksowaniem. Jest stosowana w metodzie prądów oczkowych.

$$Z_d = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- W algorytmie metody potencjałów węzłowych wykorzystuje się diagonalną macierz admittancji $Y_d = Z_d^{-1}$, utworzoną przez odwrócenie niezerowych impedancji na przekątnej.

$$Y_d = \frac{1}{Z_d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_6} \end{bmatrix} \quad (2)$$

- E_g - wektor wymuszeń napięciowych lokalizujący położenie idealnych źródeł napięciowych w strukturze obwodu. Położenie wartości napięcia źródła w wektorze opowiada indeksowi gałęzi w której jest zlokalizowany. Należy pamiętać o uwzględnieniu zwrotu źródła napięciowego zgodnie z poniższymi zasadami:
 - jeżeli zwrot źródła napięciowego jest przeciwny do założonego zwrotu prądu gałęziowego, do wektora wymuszeń E_g wpisuje się napięcie ze znakiem minus,
 - + jeżeli zwrot źródła napięciowego jest zgodny z założonym zwrotem prądu gałęziowego, do wektora wymuszeń E_g wpisuje się napięcie ze znakiem plus.

Dla analizowanego obwodu wektor przyjmuje postać:

$$E_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{E}_2 \\ 0 \\ \underline{E}_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- I_z - wektor wymuszeń prądowych lokalizuje położenie idealnych źródeł prądowych w obwodzie. Prawidłowe zapisanie wektora prądów źródłowych jest szczególnie istotne dla uzyskania prawidłowych wyników z metody. Wektor budowany jest w oparciu o gałęzie i w odniesieniu do kierunku założonych prądów gałęziowych. Źródło prądowe jest włączane równolegle do takiej gałęzi. Wartość prądu źródłowego w wektorze przyjmowana jest:
 - + ze znakiem plus jeżeli kierunek prądu gałęziowego jest przeciwny do kierunku prądu źródłowego
 - ze znakiem minus jeżeli kierunek prądu gałęziowego jest zgodny z kierunkiem prądu źródłowego

Dla analizowanego obwodu wektor przyjmuje postać:

$$I_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{zr2} \\ I_{zr1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

2 Metoda prądów oczkowych

W metodzie prądów oczkowych macierz strukturalna (incydencji) opisuje zależności między prądami gałęziowymi i oczkowymi. Liczba wierszy zależy od liczby oczek, a liczba kolumn – od liczby gałęzi. Elementy macierzy przyjmuje się według następujących zasad:

- 1 $\rightarrow$ jeżeli gałąź należy do oczka, a kierunek jej prądu jest przeciwny do prądu oczkowego,
- 0 $\rightarrow$ jeżeli gałąź nie należy do oczka
- 1 $\rightarrow$ jeżeli gałąź należy do oczka i kierunek jej prądu jest zgodny z prądem oczkowym

Dla grafu zorientowanego pokazanego na ryc. 3b oczkowa macierz incydencji B przyjmuje postać:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na podstawie zdefiniowanych macierzy i wektorów danych oraz macierzy incydencji można wyznaczyć wartości prądów gałęziowych na podstawie opisanego poniżej algorytmu.

1. Obliczenie macierzy impedancji własnych i wzajemnych:

$$Z = B \cdot Z_d \cdot B^T \quad (6)$$

2. Wektor prądów oczkowych I_o wyznacza się przez rozwiązanie układu równań, pod warunkiem że macierz Z jest nieosobliwa:

$$ZI_o = B(E_g - Z_d I_z) \quad (7)$$

3. Wyznaczenie prądów gałęziowych jest dwuetapowe, zależnie od występowania źródeł prądowych w analizowanym przykładzie:

I wartości wypadkowych prądów gałęziowych uogólnionych

$$I = B^T \cdot I_o \quad (8)$$

II jeżeli w obwodzie występują źródła prądowe ostateczne wartości prądów gałęziowych wyznacza się z zależności

$$I_g = I + I_z \quad (9)$$

3 Metoda potencjałów węzłowych

W metodzie potencjałów węzłowych macierz incydencji opisuje zależności między gałęziami i węzłami. Liczba wierszy zależy od liczby węzłów, a liczba kolumn – od liczby gałęzi. Elementy macierzy przyjmuje się według następujących zasad:

-1 $\rightarrow$ jeżeli gałąź jest związana z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest do węzła

0 $\rightarrow$ jeżeli gałąź nie jest związana z węzłem,

1 $\rightarrow$ jeżeli gałąź jest związana z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest od węzła

Dla grafu zorientowanego pokazanego na ryc. 3b pełna węzłowa macierz incydencji A_p przyjmuje postać:

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Suma elementów w każdej kolumnie wynosi zero, co pozwala przeprowadzić wstępną weryfikację macierzy incydencji.

Metoda potencjałów węzłowych wymaga wybrania węzła odniesienia. Ostateczna macierz incydencji A powstaje przez usunięcie z macierzy pełnej wiersza odpowiadającego temu węzłowi. Wybór nie wpływa na prądy gałęziowe; w przykładzie jako węzeł odniesienia przyjęto węzeł D .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Weryfikację poprawności utworzenia macierzy incydencji (oczkowej i węzłowej) można przeprowadzić sprawdzając poniższe warunki:

$$AB^T == 0 \quad i \quad BA^T == 0 \quad (12)$$

Na podstawie zdefiniowanych macierzy i wektorów danych oraz macierzy incydencji można wyznaczyć wartości prądów gałęziowych na podstawie opisanego poniżej algorytmu.

1. Obliczenie macierzy admitancji własnych i wzajemnych:

$$Y = A \cdot Y_d \cdot A^T \quad (13)$$

2. Wektor potencjałów węzłowych U_w wyznacza się przez rozwiązanie układu równań, pod warunkiem że macierz Y jest nieosobliwa:

$$YU_w = A(I_z - Y_d E_g) \quad (14)$$

3. Wektor napięć gałęziowych wyznacza się z zależności

$$U = A^T \cdot U_w \quad (15)$$

4. Ostatecznie wektor prądów gałęziowych oblicza się z zależności

$$I_g = Y_d \cdot (U + E_g) \quad (16)$$

4 Weryfikacja obliczeniowa algorytmów

Dla przykładowego obwodu z ryc. 2 i przyjętych poniżej danych przeprowadzono obliczenia weryfikujące poprawność opisanych powyżej algorytmów.

$$\underline{Z}_1 = 10i \, \Omega, \, \underline{Z}_2 = (20 - 20i) \, \Omega, \, \underline{Z}_3 = 10i \, \Omega,$$

$$\underline{Z}_4 = 20 \, \Omega, \, \underline{Z}_5 = 40 \, \Omega, \, \underline{Z}_6 = 10 \, \Omega,$$

$$\underline{E}_1 = 100i \, V, \, \underline{E}_2 = (100 - 100i) \, V,$$

$$\underline{I}_{zr1} = 2 \, A, \, \underline{I}_{zr2} = (1 + i) \, A$$

Kod źródłowy algorytmów obliczeniowych zapisano poniżej.

```
clear;clc;close();
format("v",5);
//DANE
Z1=10*i;
Z2=20-20*i;
Z3=10*i;
Z4=20;
Z5=40;
Z6=10;
E1=100*i;
E2=100-100*i;
Iz1=2;
Iz2=1+i;
//MACIERZE DANYCH
Z_d=[Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6];
Y_d=1./Z_d;
Zd=diag(Z_d);
Yd=diag(Y_d);
Eg=[0;0;0;E2;0;E1];
Iz=[0;0;0;0;Iz2;Iz1];
//MACIERZ INCYDENCJI
B= [1,-1,0,0,0,0;
     0,1,1,0,1,-1;
     0,0,-1,-1,0,0];
A= [1,1,0,0,0,1;
     -1,-1,0,0,1,0;
     0,0,1,-1,-1,0;
     0,0,-1,1,0,-1];
//METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH
Z=B*Zd*B';
Io=Z\ (B*(Eg-Zd*Iz));
I=B'*Io;
Igo=I+Iz;
disp("Wyniki z metody prądów oczkowych.");
for i=1:6
    disp("I"+string(i)+"="+string(Igo(i))+" A, I"
         +string(i)+"="+string(abs(Igo(i)))+ " A");
end
//METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH
g=input("Podaj numer węzła uziemionego (1-4):");
A(g,:)=[];
Y=A*Yd*A';
```

```

Uw=Y\ (A*(Iz-Yd*Eg));
U=A'*Uw;
Igw=Yd*(U+Eg);
disp("Wyniki z metody potencjałów węzłowych.");
for i=1:6
    disp("I"+string(i)+"="+string(Igw(i))+ " A, I"
        +string(i)+"="+string(abs(Igw(i)))+ " A");
end
format("v",10);
disp("Największa różnica pomiędzy metodami = "+string(norm(Igw-Igo)));

```

Niezależnie od wyboru węzła odniesienia wyniki obu metod są zgodne z różnicą rzędu 10^{-15} , wynikającą z dokładności arytmetyki zmiennoprzecinkowej. Wyniki przykładowej symulacji pokazano poniżej.

```

"Wyniki z metody prądów oczkowych."
"I1=-3.32-%i*1.62 A, I1=3.69 A"
"I2=1.23-%i*0.43 A, I2=1.3 A"
"I3=-0.48-%i*6.8 A, I3=6.82 A"
"I4=1.6-%i*4.76 A, I4=5.02 A"
"I5=-1.08-%i*1.04 A, I5=1.5 A"
"I6=4.08+%i*2.04 A, I6=4.56 A"
Podaj numer węzła uziemionego (1-4):1
"Wyniki z metody potencjałów węzłowych."
"I1=-3.32-%i*1.62 A, I1=3.69 A"
"I2=1.23-%i*0.43 A, I2=1.3 A"
"I3=-0.48-%i*6.8 A, I3=6.82 A"
"I4=1.6-%i*4.76 A, I4=5.02 A"
"I5=-1.08-%i*1.04 A, I5=1.5 A"
"I6=4.08+%i*2.04 A, I6=4.56 A"
"Największa różnica pomiędzy metodami = 2.391D-15"

```

5 Metoda wyznaczników (reguła Cramera)

Każdy rozgałęziony obwód elektryczny można opisać za pomocą równań utworzonych na podstawie I i II prawa Kirchhoffa.

1. Suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.
2. W zamkniętym obwodzie suma spadków napięć równa jest sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie.

Dla przykładowego obwodu można więc zapisać układ równań na podstawie powyższych praw. Utworzyć można trzy równania na podstawie II prawa Kirchhoffa i cztery na podstawie I prawa Kirchhoffa. Przy opisie obwodu elektrycznego jedno, dowolne równanie prądowe (I prawo) pomija się, jak pokazano na poniższym układzie równań.

$$\begin{cases}
 I_1 Z_1 - I_2 Z_2 = 0 \\
 I_2 Z_2 + I_3 Z_3 + I_5 Z_5 - I_6 Z_6 = -E_1 \\
 -I_3 Z_3 - I_4 Z_4 = -E_2 \\
 I_1 + I_2 + I_6 = I_{z1} \\
 -I_1 - I_2 + I_5 = I_{z2} \\
 I_3 - I_4 - I_5 = -I_{z2}
 \end{cases} \quad (17)$$

Powyższy układ można następnie zapisać w postaci macierzowej $A \cdot x = b$, jak pokazano poniżej.

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & 0 & \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_6 \\ 0 & 0 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{E}_1 \\ -\underline{E}_2 \\ \underline{I}_{z1} \\ \underline{I}_{z2} \\ -\underline{I}_{z2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Metoda wyznaczników, nazywana również regułą Cramera, jest często stosowana do rozwiązywania niewielkich układów równań na ćwiczeniach rachunkowych. Warunkiem jej zastosowania jest niezerowy wyznacznik macierzy głównej. W rozpatrywanym zadaniu wyznacznik macierzy głównej wynosi $-29000 - 10000i$, zatem warunek zastosowania reguły Cramera jest spełniony.

Poszczególne wartości prądów wyznacza się dzieląc wyznacznik macierzy powstałej przez zastąpienie kolumny odpowiadającej wyznaczanemu prądowi wartościami z wektora wymuszeń. Zmodyfikowaną macierz dla wyznaczenia wartości pierwszego prądu gałęziowego zapisano poniżej.

$$Z_{I_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\underline{E}_1 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & 0 & \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_6 \\ -\underline{E}_2 & 0 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ \underline{I}_{z1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{I}_{z2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\underline{I}_{z2} & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Wartość prądu wyznacza się jako iloraz wyznacznika zmodyfikowanej macierzy przez wyznacznik macierzy głównej układu równań, jak pokazano poniżej.

$$I_n = \frac{W_{Z_n}}{W_Z} \quad (20)$$

Dla przykładowego obwodu opracowano algorytm oparty na metodzie wyznaczników. Użyte wyniki, pokazane poniżej, są zgodne z rezultatami metod prądów oczkowych i potencjałów węzłowych.

"Wyniki uzyskane metodą wyznaczników."

"I1=-3.32-i*1.62 A, I1=3.69 A"

"I2=1.23-i*0.43 A, I2=1.3 A"

"I3=-0.48-i*6.8 A, I3=6.82 A"

"I4=1.6-i*4.76 A, I4=5.02 A"

"I5=-1.08-i*1.04 A, I5=1.5 A"

"I6=4.08+i*2.04 A, I6=4.56 A"

Wyniki zweryfikowano za pomocą funkcji `linsolve()`. Funkcja rozwiązuje równanie w postaci $Ax + b = 0$, dlatego w analizowanym przypadku drugi argument należy podać ze znakiem minus.

--> Ispr=linsolve(Z,-b)	--> abs(Ispr)
Ispr =	ans =
-3.32 - 1.62i	3.69
1.23 - 0.43i	1.30
-0.48 - 6.8i	6.82
1.6 - 4.76i	5.02
-1.08 - 1.04i	1.50
4.08 + 2.04i	4.56

Zadania

Dla obwodu prądu sinusoidalnego należy wyznaczyć zespolone napięcia i prądy. Węzeł 0 jest węzłem odniesienia, a zwrot gałęzi jest zgodny z kolejnością węzłów w tabeli. Parametry bazowe gałęzi wynoszą:

Gałąź	od	do	R [Ω]	L [mH]	C [μ F]
G1	1	0	20	20	0
G2	1	2	10	15	0
G3	2	0	30	0	100
G4	2	3	12	10	0
G5	3	0	40	0	47
G6	1	3	25	0	0

Każdy student przyjmuje parametry swojego zestawu; k_Z mnoży wszystkie wartości R , L i C , a źródła prądowe mają zwroty $0 \rightarrow 1$ oraz $3 \rightarrow 0$.

Zestaw	f [Hz]	k_Z	I_1 [A]	φ_1	I_2 [A], φ_2
1	50	1,00	5,0	0	1,50; -30
2	60	0,90	4,5	10	1,20; -20
3	40	1,10	5,5	-10	1,80; -40
4	75	0,80	4,0	20	1,00; -45
5	100	1,20	6,0	0	2,00; -15
6	45	0,95	5,2	15	1,40; -35
7	55	1,05	4,8	-15	1,60; -25
8	80	0,85	3,5	30	1,10; -60
9	25	1,30	6,5	0	2,20; -10
10	120	0,75	3,0	45	0,80; -45
11	50	1,15	5,8	-20	1,70; -50
12	90	0,92	4,2	25	1,30; -20
13	30	1,25	6,2	5	2,10; -30
14	150	0,70	2,8	60	0,70; -60
15	65	1,08	5,1	-5	1,55; -35

1. Obliczyć impedancje wszystkich gałęzi i utworzyć macierzowy opis obwodu metodą potencjałów węzłowych. Napięcie węzła odniesienia przyjąć równe zeru.
2. Rozwiązać układ równań i wyznaczyć prądy gałęziowe. Dla tego samego obwodu wybrać trzy niezależne oczka, utworzyć także układ równań metody prądów oczkowych i porównać prądy gałęziowe.
3. Zweryfikować rozwiązanie przez obliczenie normy residuum oraz sprawdzenie I prawa Kirchhoffa w węzłach i II prawa Kirchhoffa w niezależnych oczkach.
4. Przedstawić wybrane napięcia i prądy w postaci algebraicznej, biegunowej oraz na wykresie wskazowym. Wyniki zapisać do pliku CSV.

Funkcje obliczeniowe należy zapisać w zewnętrznym pliku `*.sci`. Schemat odtworzony na podstawie danych, równania, przyjęte zwroty i wyniki weryfikacji należy zamieścić w sprawozdaniu.

Zadanie rozszerzające. Dla wybranego układu 3×3 wyznaczyć rozwiązanie metodą wyznaczników (regułą Cramera), opisaną w tym rozdziale, i porównać je z rozwiązaniem otrzymanym operatorem `\`. Skomentować przydatność tej metody dla większych układów.

Bibliografia

- [1] S. Bolkowski. *Elektrotechnika teoretyczna, Tom I*. WSiP, 1986.
- [2] S. Bolkowski. *Elektrotechnika*. WSiP, 2012.
- [3] M. Łanczont J. Jaroszyński. *Laboratorium Metod numerycznych*. Lublin: Politechnika Lubelska, 2014.