

Układy równań liniowych – metody bezpośrednie

Wstęp

Za pomocą układów równań liniowych opisywanych jest wiele obiektów i zjawisk fizycznych. Układ równań liniowych zapisuje się najczęściej w postaci

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

albo równoważnie

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2)$$

W zapisie elementowym:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest kwadratowa i ma wymiar $m \times m$, natomiast $\mathbf{b}$ i $\mathbf{x}$ są wektorami kolumnowymi długości m . W obliczeniach dotyczących obwodów prądu stałego elementami macierzy są najczęściej rezystancje lub konduktancje. W sinusoidalnym stanie ustalonym stosuje się impedancje, admitancje i fazory:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{albo} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

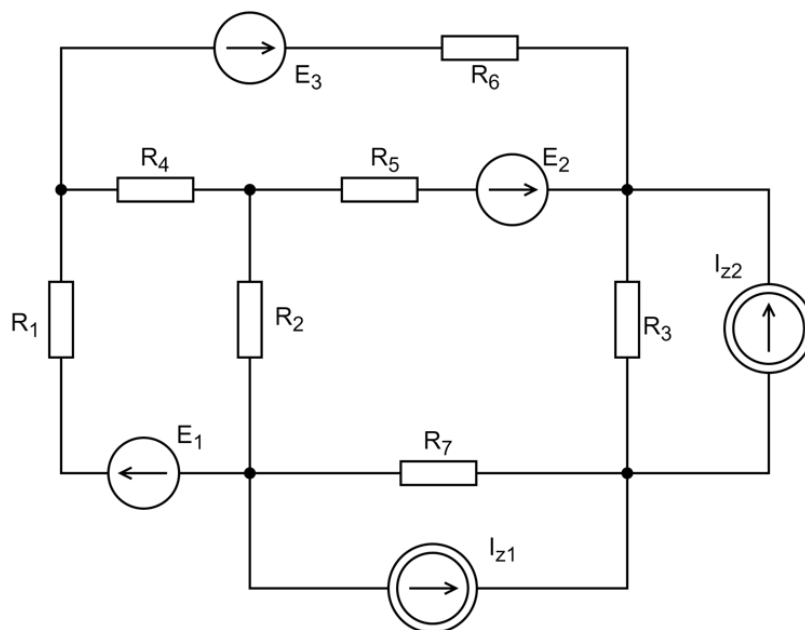
Metody przeznaczone do obliczeń ręcznych bywają nieefektywne dla dużych układów: wymagają wielu operacji i znacznej ilości pamięci, zwłaszcza gdy liczba niewiadomych sięga setek lub tysięcy [1, 3]. Znane metody rozwiązywania układów równań liniowych można podzielić na dwie grupy [2]:

1. metody skończone,
2. metody iteracyjne.

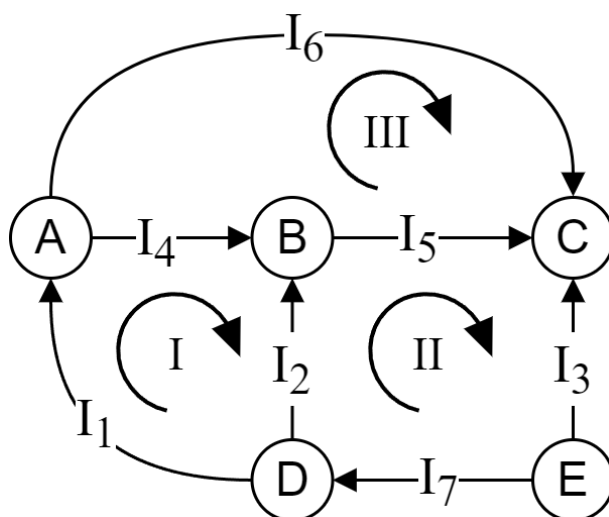
Metody skończone wyznaczają rozwiązanie po skończonej liczbie operacji w arytmetyce dokładnej. W obliczeniach zmiennoprzecinkowych wynik jest jednak obciążony błędami zaokrągleń. W niniejszym ćwiczeniu omówiono trzy podejścia:

1. rozkład LU ,
2. rozkład Cholesky'ego LL^T i LL^* ,
3. eliminację Gaussa oraz Gaussa–Jordana.

Przedmiotem analizy będzie rozgałęziony obwód elektryczny prądu stałego pokazany na ryc. 1. Dla przedstawionego układu można zapisać równania na podstawie I i II prawa Kirchhoffa, wykorzystując graf pokazany na ryc. 2.



Ryc. 1. Schemat drabinkowego obwodu rozgałęzionego prądu stałego



Ryc. 2. Graf obwodu z ryc. 1

Równania napięciowe:

$$\begin{aligned}
 R_1 I_1 + R_4 I_4 - R_2 I_2 &= E_1, \\
 R_2 I_2 + R_5 I_5 - R_3 I_3 + R_7 I_7 &= E_2, \\
 -R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_6 I_6 &= E_3 - E_2.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Równania prądowe:

$$\begin{aligned}
 A \longrightarrow I_1 - I_4 - I_6 &= 0, \\
 B \longrightarrow I_4 + I_2 - I_5 &= 0, \\
 C \longrightarrow I_5 + I_3 - I_6 + I_{z2} &= 0, \\
 D \longrightarrow I_7 - I_2 - I_1 - I_{z1} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Na podstawie równań napięciowych (4) i prądowych (5) można zbudować pełny układ równań albo przejść do mniejszego układu oczkowego. W drugim przypadku skrypt musi dodatkowo wyznaczać prądy gałęziowe na podstawie prądów oczkowych, przez co część kodu zależy od topologii konkretnego obwodu. W przykładzie rozpatrzono oba podejścia.

1 Macierze rzeczywiste i zespolone

Podstawowe działania w rozkładzie LU oraz metodach eliminacyjnych mają taką samą postać dla liczb rzeczywistych i zespolonych. Różnice dotyczą sposobu wyboru elementu głównego oraz warunków stosowania rozkładu Cholesky'ego.

Dla macierzy rzeczywistej symetria oznacza

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \quad (6)$$

Dla macierzy zespolonej należy odróżnić zwykłą symetrię

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (7)$$

od hermitowskości

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T. \quad (8)$$

Macierz zespolona symetryczna nie musi być hermitowska. W szczególności macierz impedancyjna wzajemnego obwodu RLC jest często zespolona symetryczna, ale niehermitowska.

Rzeczywista macierz symetryczna jest dodatnio określona, jeżeli

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (9)$$

Zespolona macierz hermitowska jest dodatnio określona, jeżeli

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \quad (10)$$

W analizie sinusoidalnego stanu ustalonego rezystancje zastępuje się impedancjami:

$$R_k \longrightarrow Z_k = R_k + iX_k. \quad (11)$$

Macierz $\mathbf{A}$ oraz wektory $\mathbf{x}$ i $\mathbf{b}$ zawierają wtedy liczby zespolone. Algorytmy rozwiązywania układu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zachowują dotychczasową postać, natomiast przed zastosowaniem rozkładu Cholesky'ego należy sprawdzić hermitowskość i dodatnią określoność macierzy.

Pełny układ równań Kirchhoffa

W metodach eliminacyjnych kolejny krok wymaga dzielenia przez element główny. Jeżeli element główny jest zerowy lub bardzo mały w stosunku do pozostałych współczynników, należy zamienić wiersze albo wiersze i kolumny. Zamiana wierszy wymaga wykonania tej samej operacji na wektorze prawej strony. Zamiana kolumn zmienia kolejność niewiadomych i wymaga jej odtworzenia po zakończeniu obliczeń.

Dla analizowanego przypadku pełne równanie macierzowe ma postać

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 & 0 & R_7 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -R_5 & R_6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \\ 0 \\ 0 \\ -I_{z2} \\ I_{z1} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

W macierzy (12) występują zera na przekątnej. Dla konkretnego przykładu można przedstawić równania:

$$\begin{bmatrix} R_1 & -R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -R_5 & R_6 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 & 0 & R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ I_{z1} \\ -I_{z2} \\ 0 \\ 0 \\ E_3 - E_2 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Jednorazowe przestawienie równań nie zastępuje jednak wyboru elementu głównego wykonywanego w kolejnych krokach eliminacji. Dla innych wartości parametrów obwodu późniejszy element główny może okazać się zerowy albo numerycznie zbyt mały.

Układ równań oczkowych

Dla obwodu rozgałęzionego można zapisać układ $RI_o = E$, określając macierz rezystancji własnych i wzajemnych oraz wektor napięć źródłowych. Układ oczkowy ma zwykle mniej niewiadomych, a jego macierz dla obwodu rezystancyjnego jest symetryczna. Jeżeli jest ponadto dodatnio określona, można zastosować rozkład Cholesky'ego LL^T .

Dla rozpatrywanego obwodu układ przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 + R_7 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4 + R_5 + R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 - R_3 I_{z2} - R_7 I_{z1} \\ E_3 - E_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Prądy gałęziowe wyznacza się z zależności

$$\begin{aligned} I_1 &= I_I, \\ I_2 &= -I_4 + I_5, \\ I_3 &= -I_{z2} - I_{III}, \\ I_4 &= I_1 - I_6, \\ I_5 &= -I_3 - I_6 - I_{z2}, \\ I_6 &= I_{III}, \\ I_7 &= I_{z1} - I_{z2} - I_3. \end{aligned} \quad (15)$$

W przypadku obwodu RLC macierz rezystancji zastępuje się macierzą impedancji. Macierz $\mathbf{A}$ może być wtedy zespolona symetryczna:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

ale zwykle nie jest hermitowska:

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^*.$$

Zwykła symetria zespolona nie wystarcza do zastosowania LL^* . Dla takiej macierzy należy zastosować ogólny rozkład LU z wyborem elementu głównego.

2 Metody skończone

Metody bezpośrednie wyznaczają rozwiązanie po skończonej liczbie operacji w arytmetyce dokładnej. Dla gęstej macierzy $m \times m$ typowy koszt eliminacji jest rzędu $\mathcal{O}(m^3)$, a koszt pamięci – $\mathcal{O}(m^2)$.

Metody te wykorzystują przekształcenia elementarne. W podstawowej eliminacji wykonuje się operacje na wierszach:

- mnożenie wiersza przez niezerową liczbę,
- dodawanie wielokrotności jednego wiersza do drugiego,
- zamianę dwóch wierszy.

Operacje te należy wykonywać jednocześnie na macierzy głównej i wektorze prawej strony.

Zamiana kolumn odpowiada zmianie kolejności niewiadomych. Stosuje się ją w pełnym wyborze elementu głównego, a po zakończeniu obliczeń trzeba odtworzyć pierwotną kolejność rozwiązania.

3 Rozkład LU

Rozkład LU polega na przedstawieniu macierzy jako iloczynu macierzy trójkątnej dolnej i górnej. Przed rozkładem, a następnie w jego kolejnych krokach, należy w razie potrzeby zamieniać całe wiersze macierzy $\mathbf{A}$. Te same zamiany wykonuje się na wektorze $\mathbf{b}$. Po ich uwzględnieniu rozkład ma postać

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}. \quad (16)$$

Rozwiązanie układu przebiega dwuetapowo:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{y} &= \mathbf{b}, & \text{podstawianie w przód,} \\ \mathbf{U}\mathbf{x} &= \mathbf{y}, & \text{podstawianie wstecz.} \end{aligned} \quad (17)$$

Sama nieosobliwość macierzy nie gwarantuje możliwości wykonania rozkładu $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ bez zamian wierszy. Rozkład bez wyboru elementu głównego wymaga niezerowych kolejnych elementów głównych. Dla ogólnej nieosobliwej macierzy należy stosować częściowy wybór elementu głównego.

Wyznacznik nie powinien być podstawowym numerycznym testem przydatności metody. Jego wartość zależy od skali macierzy i może być obciążona znacznym błędem. W praktyce kontroluje się moduły elementów głównych oraz uwarunkowanie macierzy.

Częściowy wybór elementu głównego

W kroku k wybiera się w pozostałej części kolumny element o największym module:

$$p = \arg \max_{i=k, \dots, n} |a_{ik}|. \quad (18)$$

Następnie zamienia się wiersze k i p . Dla liczb rzeczywistych symbol $|a_{ik}|$ oznacza wartość bezwzględną, a dla liczb zespolonych – moduł:

$$|a_{ik}| = \sqrt{\operatorname{Re}(a_{ik})^2 + \operatorname{Im}(a_{ik})^2}. \quad (19)$$

Jeżeli największy dostępny moduł jest mniejszy od przyjętej tolerancji, macierz należy uznać za osobliwą numerycznie.

Algorytm Doolittle’a

W rozkładzie Doolittle’a przyjmuje się jednostkowe elementy na przekątnej macierzy dolnotrójkątnej:

$$l_{kk} = 1. \quad (20)$$

Ogólna zależność na elementy diagonalne ma postać

$$l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}. \quad (21)$$

Po przyjęciu $l_{kk} = 1$ z równania (21) otrzymuje się jawny wzór:

$$u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}. \quad (22)$$

Pozostałe elementy k -tego wiersza macierzy $\mathbf{U}$ oblicza się dla $j = k + 1, \dots, n$:

$$u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj}. \quad (23)$$

Elementy k -tej kolumny macierzy $\mathbf{L}$ oblicza się dla $i = k + 1, \dots, n$:

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk}}{u_{kk}}. \quad (24)$$

Pełny zapis algorytmu bez wyróżniania operacji przestawień można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} &\text{dla } k = 1, \dots, n, \\ &\quad l_{kk} = 1, \\ &\quad l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}, \\ &\quad u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}, \\ &\quad \text{dla } j = k + 1, \dots, n, \\ &\quad \quad u_{kj} = a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj}, \\ &\quad \text{dla } i = k + 1, \dots, n, \\ &\quad \quad l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk}}{u_{kk}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Przed wykonaniem kroku k należy zastosować częściowy wybór elementu głównego zgodnie z równaniem (18). Przy zamianie wierszy trzeba odpowiednio przestawić macierz $\mathbf{A}$, wektor $\mathbf{b}$ oraz wcześniej obliczone elementy macierzy $\mathbf{L}$.

Algorytm ma taką samą postać dla liczb rzeczywistych i zespolonych. W rozkładzie LU nie wykonuje się sprzęgania elementów macierzy.

Wyniki przykładu

Dla obwodu z ryc. 1 przyjęto

$$R_x = 50 \, \Omega, \quad E_x = 100 \, \text{V}, \quad I_{zx} = 5 \, \text{A}.$$

Dla pełnego układu Kirchhoffa otrzymano:

Wyniki z metody LU:

I_LU[1]=-0.417

I_LU[2]=-1.917

I_LU[3]=-2.667

I_LU[4]=0.5

I_LU[5]=-1.417

I_LU[6]=-0.917

I_LU[7]=2.667

Dla układu oczkowego:

Wyniki z metody LU:

I_LU[1]=-0.417

I_LU[2]=-2.333

I_LU[3]=-0.917

Po przeliczeniu prądów oczkowych na gałęziowe otrzymuje się wyniki zgodne z rozwiązaniem pełnego układu w granicach przyjętej tolerancji numerycznej.

4 Rozkład Cholesky'ego – LL^T i LL^*

Rozkład Cholesky'ego jest szczególnym przypadkiem rozkładu trójkątnego. Dla rzeczywistej macierzy symetrycznej dodatnio określonej ma postać

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad (26)$$

a dla zespolonej macierzy hermitowskiej dodatnio określonej

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^*. \quad (27)$$

Symbol $\mathbf{L}^*$ oznacza transpozycję ze sprzężeniem zespolonym.

Z dodatniej określoności wynikają między innymi następujące własności:

- macierz jest kwadratowa i symetryczna w przypadku rzeczywistym albo hermitowska w przypadku zespolonym,
- wszystkie wartości własne są rzeczywiste i dodatnie,
- wszystkie główne minory wiodące są dodatnie.

Kryterium głównych minorów jest użyteczne teoretycznie i dla małych macierzy. W obliczeniach numerycznych nie zaleca się wyznaczania wielu wyznaczników. Praktycznym sprawdzieniem dodatniej określoności jest próba wykonania rozkładu Cholesky'ego z kontrolą wartości pod pierwiastkiem.

Macierz $\mathbf{L}$ inicjuje się zerami i wypełnia kolumnami:

$$\begin{aligned} &\text{dla } k = 1, \dots, n, \\ &l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} \overline{l_{ks}}}, \\ &\text{dla } i = k + 1, \dots, n, \\ &l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} \overline{l_{ks}}}{l_{kk}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Kreska nad elementem oznacza sprzężenie zespolone. Zachodzi

$$l_{ks} \overline{l_{ks}} = |l_{ks}|^2. \quad (29)$$

Iloczyn ten jest rzeczywisty i nieujemny. Dla danych rzeczywistych

$$\overline{l_{ks}} = l_{ks},$$

więc wzór zawiera l_{ks}^2 . Element l_{kk} wybiera się jako dodatni rzeczywisty pierwiastek.

Warunki dla macierzy rzeczywistej. Macierz musi być symetryczna i dodatnio określona.

Warunki dla macierzy zespolonej. Macierz musi być hermitowska i dodatnio określona. Zwykła symetria $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ nie wystarcza.

Macierz impedancji obwodu prądu przemiennego może być zespolona symetryczna, lecz niehermitowska. W takim przypadku należy zastosować rozkład LU z częściowym wyborem elementu głównego. Dla macierzy hermitowskiej nieokreślonej można zastosować rozkład LDL^* z wyborem elementu głównego.

Metodę Cholesky'ego sprawdzono dla rzeczywistego, symetrycznego i dodatnio określonego układu oczkowego z równania (14). Otrzymano:

Wyniki z metody LL':
Ichol[1]=-0.417
Ichol[2]=-2.333
Ichol[3]=-0.917

Wyniki są zgodne z rezultatami rozkładu LU w granicach przyjętej tolerancji numerycznej.

5 Metody eliminacji

Metody eliminacyjne przekształcają układ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ do postaci z macierzą trójkątną, diagonalną albo jednostkową. W każdym kroku element główny używany jako dzielnik musi być różny od zera w przyjętej dokładności numerycznej.

W przypadku częściowego wyboru elementu głównego przeszukuje się pozostałą część bieżącej kolumny i wybiera element o największym module. Zasada ta obowiązuje zarówno dla liczb rzeczywistych, jak i zespolonych.

5.1 Eliminacja Gaussa

Eliminacja Gaussa przekształca macierz $\mathbf{A}$ do postaci trójkątnej górnej. Otrzymany układ $\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$, w którym $\mathbf{b}$ jest wektorem po wykonanych przekształceniach, rozwiązuje się następnie przez podstawianie wsteczne.

Algorytm z częściowym wyborem elementu głównego można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} &\text{dla } k = 1, \dots, n-1, \\ &\quad p = \arg \max_{i=k, \dots, n} |a_{ik}|, \\ &\quad \text{zamień wiersze } k \text{ i } p \text{ w } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{b}, \\ &\quad \text{dla } i = k+1, \dots, n, \\ &\quad \quad m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \\ &\quad \text{dla } j = k+1, \dots, n, \\ &\quad \quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik}a_{kj}, \\ &\quad \quad b_i \leftarrow b_i - m_{ik}b_k. \end{aligned} \tag{30}$$

Normalizowanie wiersza w każdym kroku nie jest konieczne. Pozostawienie niejednostkowych elementów na przekątnej zmniejsza liczbę dzielení. Dla liczb zespolonych algorytm pozostaje bez zmian, a element główny wybiera się według modułu.

5.2 Eliminacja Gaussa–Jordana

W metodzie Gaussa–Jordana macierz układu jest przekształcana do macierzy jednostkowej, a wektor prawej strony – do wektora rozwiązania. Metoda eliminuje elementy zarówno poniżej, jak i powyżej bieżącego elementu głównego.

Algorytm z częściowym wyborem elementu głównego ma postać:

$$\begin{aligned}
& \text{dla } k = 1, \dots, n, \\
& \quad p = \arg \max_{i=k, \dots, n} |a_{ik}|, \\
& \quad \text{zamień wiersze } k \text{ i } p \text{ w } \mathbf{A} \text{ i } \mathbf{b}, \\
& \quad d = a_{kk}, \\
& \quad \text{dla } j = k, \dots, n, \\
& \quad \quad a_{kj} \leftarrow \frac{a_{kj}}{d}, \\
& \quad b_k \leftarrow \frac{b_k}{d}, \\
& \quad \text{dla } i = 1, \dots, n, \quad i \neq k, \\
& \quad \quad m = a_{ik}, \\
& \quad \quad \text{dla } j = k, \dots, n, \\
& \quad \quad \quad a_{ij} \leftarrow a_{ij} - ma_{kj}, \\
& \quad \quad b_i \leftarrow b_i - mb_k.
\end{aligned} \tag{31}$$

Algorytm działa dla danych rzeczywistych i zespolonych. Dla pojedynczego wektora prawej strony wymaga więcej operacji niż eliminacja Gaussa i zwykle nie jest metodą preferowaną. Pozostaje jednak użyteczny dydaktycznie oraz przy wyznaczaniu zredukowanej postaci schodkowej.

Dla przykładowego obwodu otrzymano wyniki zgodne z rozkładem LU :

Równania Kirchhoffa:

```

Igauss[1]=-0.417
Igauss[2]=-1.917
Igauss[3]=-2.667
Igauss[4]=0.5
Igauss[5]=-1.417
Igauss[6]=-0.917
Igauss[7]=2.667

```

Równania oczkowe:

```

Igauss[1]=-0.417
Igauss[2]=-2.333
Igauss[3]=-0.917

```

6 Ocena dokładności rozwiązania

Niezależnie od zastosowanej metody rozwiązanie należy zweryfikować przez obliczenie różnicy $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$. Zalecaną miarą jest względne residuum wsteczne:

$$\frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_{\infty}}{\|\mathbf{A}\|_{\infty}\|\hat{\mathbf{x}}\|_{\infty} + \|\mathbf{b}\|_{\infty}}. \tag{32}$$

Wzór ma taką samą postać dla liczb rzeczywistych i zespolonych, ponieważ norma wektora zespolonego uwzględnia moduły jego elementów.

Małe residuum oznacza, że wyznaczone przybliżenie prawie spełnia układ równań. Nie gwarantuje jednak małego błędu rozwiązania, jeżeli macierz jest źle uwarunkowana. Z tego względu należy podawać również uwarunkowanie macierzy oraz, gdy jest dostępne rozwiązanie odniesienia, względny błąd rozwiązania.

7 Przykłady macierzy zespolonych

Macierz odpowiednia dla LL^*

Rozważmy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Macierz jest hermitowska:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*.$$

Jej główne minory wiodące wynoszą

$$4 > 0, \quad \det(\mathbf{A}) = 10 > 0,$$

dlatego jest dodatnio określona i można zastosować rozkład LL^* .

Macierz zespolona symetryczna

Rozważmy macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4+2i & -1+i \\ -1+i & 3+i \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Macierz jest zespolona symetryczna:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T,$$

ale nie jest hermitowska:

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^*.$$

Nie można więc stosować standardowego rozkładu LL^* . Właściwą metodą jest rozkład LU z częściowym wyborem elementu głównego.

8 Dobór metody

Tab. 1. Dobór metody do własności macierzy

Własności macierzy	Zalecana metoda
rzeczywista, ogólna i nieosobliwa	LU albo eliminacja Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego
zespolona, ogólna i nieosobliwa	LU albo eliminacja Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego
rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona	LL^T
zespolona, hermitowska i dodatnio określona	LL^*
zespolona symetryczna, lecz niehermitowska	LU z częściowym wyborem elementu głównego
hermitowska nieokreślona	LU z częściowym wyborem elementu głównego

Zadania

Dla pasywnej sieci rezystorowej należy utworzyć macierz $\mathbf{A}$ układu węzłowego i wektor prawej strony $\mathbf{b}$. Węzeł 0 jest węzłem odniesienia. Rezystory bazowe opisuje tabela:

	od	do	$R [\Omega]$		od	do	$R [\Omega]$
R1	1	0	10	R6	3	4	6
R2	1	2	5	R7	4	0	20
R3	2	0	15	R8	4	5	10
R4	2	3	8	R9	5	0	25
R5	3	0	12	R10	2	5	30

Wartości wszystkich rezystorów należy pomnożyć przez k_R , a bazowy wektor wymuszeń $[2, 0, 1, 0, -0.5]^T$ A przez k_J .

Zestaw	1	2	3	4	5	6	7	8
k_R	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05
k_J	1,40	1,35	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10	1,05

Zestaw	9	10	11	12	13	14	15
k_R	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40
k_J	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70

1. Sprawdzić, czy macierz $\mathbf{A}$ jest symetryczna i dodatnio określona. Obliczyć jej uwarunkowanie. Wyznaczyć potraktować jako informację pomocniczą, a nie podstawowy test numeryczny.

2. Rozwiązać układ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

za pomocą własnej implementacji rozkładu LU z częściowym wyborem elementu głównego.

3. Jeżeli macierz spełnia odpowiednie warunki, rozwiązać układ za pomocą rozkładu Cholesky'ego. Zastosować również eliminację Gaussa albo Gaussa–Jordana.
4. Dla każdej metody obliczyć względne residuum wsteczne (32) oraz błąd względem rozwiązania odniesienia. Na podstawie napięć węzłowych wyznaczyć prądy w rezystorach.
5. Porównać koszt obliczeń, uwarunkowanie i dokładność otrzymanych wyników. Sprawdzić wpływ wyłączenia częściowego wyboru elementu głównego.
6. Dla hermitowskiej macierzy z pierwszego przykładu wykonać rozkład LL^* , obliczyć rozwiązanie zespolonego układu i sprawdzić błąd rekonstrukcji

$$\frac{\|\mathbf{A} - \mathbf{LL}^*\|_\infty}{\|\mathbf{A}\|_\infty}.$$

7. Dla zespolonej macierzy symetrycznej z drugiego przykładu sprawdzić zwykłą symetrię i hermitowskość. Wyjaśnić, dlaczego nie można zastosować LL^* , a następnie rozwiązać układ metodą LU .
8. Wyniki zespolone przedstawić w postaci algebraicznej oraz w postaci moduł–argument.

Zadanie rozszerzające. Zmieniać wartość rezystora R6, przyjmując kolejno 0, 5, 1, 2, 10 i 100 jego wartości z zestawu, i zbadać wpływ na uwarunkowanie macierzy, moduły kolejnych elementów głównych oraz dokładność rozwiązania.

Bibliografia

- [1] B. Mochacki E. Majchrzak. *Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne i algorytmy*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2004.

- [2] M. Łanczont J. Jaroszyński. *Laboratorium Metod numerycznych*. Lublin: Politechnika Lubelska, 2014.
- [3] J. Povstenko. *Wprowadzenie do metod numerycznych*. Warszawa: Akademicka oficyna wydawnicza EXIT, 2002.