

Układy równań liniowych – metody iteracyjne

Wstęp

Omówione w poprzednim rozdziale metody bezpośrednie wyznaczają rozwiązanie układu po skończonej liczbie operacji. Dla dużych, zwłaszcza rzadkich układów rzędu tysięcy lub milionów niewiadomych, mogą jednak wymagać zbyt dużo pamięci i czasu obliczeń.

Alternatywą są metody iteracyjne, które tworzą ciąg przybliżeń i kończą obliczenia po osiągnięciu zadanej dokładności ε . Należy jednak pamiętać, że zbieżność zależy od macierzy, metody, kolejności równań oraz przyjętych parametrów. Nie każdy układ prowadzi do rozwiązania [1, 3].

Celem ćwiczenia jest opracowanie skryptów obliczeniowych na podstawie omówionych algorytmów wybranych metod numerycznych i wyznaczenie na ich podstawie wartości prądów lub napięć w analizowanym obwodzie. Przedstawione algorytmy można stosować zarówno do układów rzeczywistych

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

jak i do układów zespolonych

$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n.$$

W drugim przypadku elementami macierzy są najczęściej impedancje lub admitancje, a elementami wektorów – fazory prądów i napięć.

W ramach ćwiczenia analizowane będzie zastosowanie metod:

1. Richardsona,
2. Jacobiego,
3. Gaussa–Seidela,
4. nadrelaksacji.

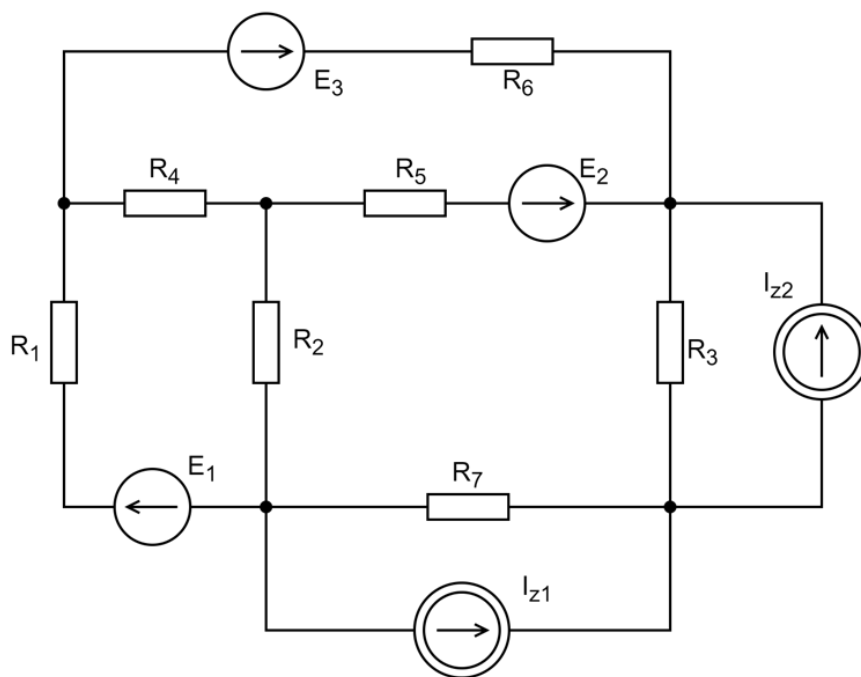
Metody iteracyjne wyznaczają rozwiązanie układu równań liniowych poprzez ciąg kolejnych przybliżeń obliczanych na podstawie wcześniej wyznaczonych wartości. Wymagają więc podania pierwszego przybliżenia rozwiązania. Zazwyczaj przyjmuje się wektor zerowy, jednak dla układu zespolonego może to być również wektor fazorów otrzymany z wcześniejszego punktu pracy.

Ogólną postać iteracji stacjonarnej można zapisać następująco [3]:

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

gdzie $\mathbf{Q}$ jest nieosobliwą macierzą charakterystyczną dla wybranej metody. Nie należy w programie jawnie wyznaczać macierzy odwrotnej $\mathbf{Q}^{-1}$. Działanie odpowiadające mnożeniu przez $\mathbf{Q}^{-1}$ należy realizować przez rozwiązanie odpowiedniego układu równań.

Poszczególne metody omówiono na przykładzie obwodu elektrycznego analizowanego w poprzednim ćwiczeniu, jak pokazano na ryc. 1.



Ryc. 1. Schemat obwodu rozgałęzionego prądu stałego

Dane dla zadania przykładowego:

$$R_x = 50 \Omega, \quad E_x = 100 \text{ V}, \quad I_{zx} = 5 \text{ A}.$$

Dla analizowanego układu można wyprowadzić układ równań liniowych $\mathbf{AI} = \mathbf{b}$. W obliczeniach wykorzystano układ wyprowadzony bezpośrednio z praw Kirchhoffa oraz układ oczkowy.

Układ równań Kirchhoffa.

$$\begin{bmatrix} R & -R & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & -R & R & 0 \\ 0 & R & -R & 0 & R & 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ I_z \\ -I_z \\ 0 \\ 0 \\ E - E \\ E \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Układ prądów oczkowych.

$$\begin{bmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 4R & -R \\ -R & -R & 3R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E - 2RI_z \\ E - E \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Prądy gałęziowe oblicza się z zależności

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_I, \\
 I_2 &= -I_4 + I_5, \\
 I_3 &= -I_{z2} - I_{II}, \\
 I_4 &= I_1 - I_6, \\
 I_5 &= -I_3 - I_6 - I_{z2}, \\
 I_6 &= I_{III}, \\
 I_7 &= I_{z1} - I_{z2} - I_3.
 \end{aligned} \tag{4}$$

1 Macierze rzeczywiste i zespolone

Algorytmy iteracyjne mają taką samą postać dla liczb rzeczywistych i zespolonych. Różnice dotyczą przede wszystkim własności macierzy używanych w twierdzeniach o zbieżności.

Dla macierzy rzeczywistej symetria oznacza

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \tag{5}$$

Dla macierzy zespolonej odpowiednikiem symetrii wymaganym między innymi w twierdzeniach dotyczących macierzy dodatnio określonych jest hermitowskość:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T. \tag{6}$$

Macierz zespolona może spełniać $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, a jednocześnie nie być hermitowska. Taka sytuacja występuje często w macierzach impedancyjnych obwodów prądu przemiennego.

Macierz rzeczywista symetryczna albo zespolona hermitowska jest dodatnio określona, jeżeli

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \tag{7}$$

W przypadku rzeczywistym sprzężenie nie zmienia wartości i $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T$.

Numeryczną kontrolę hermitowskości można zrealizować następująco:

```

liczba_rownan=size(macierz_A,"r");
skala_macierzy=norm(macierz_A,1);
if skala_macierzy<1 then
    skala_macierzy=1;
end

tolerancja_H=100*liczba_rownan*%eps;
blad_H=norm(macierz_A-macierz_A',1)/skala_macierzy;

if blad_H<=tolerancja_H then
    disp("Macierz jest numerycznie hermitowska.");
else
    disp("Macierz nie jest hermitowska.");
end

```

Operator ' w Scilabie oznacza transpozycję ze sprzężeniem. Operator .' oznacza transpozycję bez sprzężenia.

W przypadku macierzy rzeczywistej można sprawdzić zwykłą symetrię, zastępując w kodzie `macierz_A'` wyrażeniem `macierz_A'`. Dodatnią określoność najwygodniej kontrolować przez próbę rozkładu Cholesky'ego albo sprawdzenie, czy wszystkie wartości własne macierzy hermitowskiej są dodatnie.

Pełny układ Kirchhoffa może zawierać równania o różnych jednostkach i skalach: równania napięciowe z impedancjami oraz równania prądowe ze współczynnikami 1 i -1 . Przed zastosowaniem metody iteracyjnej należy więc rozważyć skalowanie wierszy albo użycie układu węzłowego lub oczkowego. Zbieżność metod stacjonarnych nie jest niezmiennicza względem dowolnego skalowania równań.

2 Kryteria stopu i kontrola zbieżności

Stała liczba iteracji może okazać się niewystarczająca albo nadmiarowa. Podstawowym kryterium stopu powinno być względne residuum wsteczne [2]:

$$\frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty} + \|\mathbf{b}\|_{\infty}}. \quad (8)$$

W zapisie (8) znak $+$ w mianowniku oddziela dwa składniki; iloczyn dotyczy norm $\|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty}$.

Pomocniczym warunkiem jest względna zmiana rozwiązania:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_{\infty}}{\max(1, \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\infty})}. \quad (9)$$

Mała zmiana kolejnych przybliżeń nie gwarantuje małego residuum, dlatego nie powinna być jedynym kryterium zakończenia obliczeń.

Oba warunki działają bez zmian dla wektorów zespolonych, ponieważ norma wykorzystuje moduły ich elementów. Przykładowy kod ma postać:

```
residuum=wektor_b-macierz_A*wektor_x_nowy;
mianownik=norm(macierz_A,%inf)*norm(wektor_x_nowy,%inf) ...
+norm(wektor_b,%inf);

if mianownik==0 then
    blad_residuum=norm(residuum,%inf);
else
    blad_residuum=norm(residuum,%inf)/mianownik;
end

skala_zmiany=norm(wektor_x_nowy,%inf);
if skala_zmiany<1 then
    skala_zmiany=1;
end
blad_zmiany=norm(wektor_x_nowy-wektor_x,%inf)/skala_zmiany;
```

Algorytm powinien kończyć działanie również po przekroczeniu maksymalnej liczby iteracji. Wykrywanie rozbieżności może uwzględniać kilka kolejnych wartości residuum, jednak dla macierzy niehermitowskich możliwy jest przejściowy wzrost błędu mimo późniejszej zbieżności. Z tego względu trwałe narastanie residuum należy traktować jako kryterium praktyczne, a nie twierdzenie o rozbieżności.

3 Metoda Richardsona

W metodzie Richardsona macierzą $\mathbf{Q}$ jest przeskalowana macierz jednostkowa. Iteracja przyjmuje postać [3]:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \omega (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad (10)$$

gdzie ω jest rzeczywistym współczynnikiem relaksacji. Dla $\omega = 1$ otrzymuje się

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}. \quad (11)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności iteracji stacjonarnej jest

$$\rho(\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}) < 1, \quad (12)$$

gdzie ρ oznacza promień spektralny. Warunek $\|\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}\| < 1$ jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym.

W Scilabie promień spektralny można obliczyć następująco:

```
liczba_rownan=size(macierz_A,"r");
macierz_iteracji=eye(liczba_rownan,liczba_rownan) ...
-wsp_relaksacji*macierz_A;
wartosci_wlasne=spec(macierz_iteracji);
promien_spektralny=max(abs(wartosci_wlasne));
```

Macierz rzeczywista. Jeżeli $\mathbf{A}$ jest rzeczywista, symetryczna i dodatnio określona, wszystkie jej wartości własne są rzeczywiste i dodatnie. Wtedy

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{\max}}, \quad \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}. \quad (13)$$

Macierz zespolona. Wzory (13) pozostają prawdziwe dla macierzy zespolonej tylko wtedy, gdy jest ona hermitowska i dodatnio określona. Dla ogólnej macierzy zespolonej wartości własne mogą być zespolone i nie można wybierać $\lambda_{\min}$ oraz $\lambda_{\max}$ na podstawie ich zwykłego porządku. Należy bezpośrednio sprawdzać warunek (12).

Jeżeli wszystkie wartości własne ogólnej macierzy zespolonej mają dodatnie części rzeczywiste, to dla rzeczywistego $\omega > 0$ warunek

$$0 < \omega < \min_j \frac{2 \operatorname{Re}(\lambda_j)}{|\lambda_j|^2} \quad (14)$$

zapewnia $|1 - \omega \lambda_j| < 1$. Dla macierzy silnie niehermitowskiej może mimo to wystąpić przejściowy wzrost residuum.

Dla macierzy oczkowej (3) przy $R = 50 \Omega$ wartości własne wynoszą

$$\lambda \approx \begin{bmatrix} 63,3975 \\ 200 \\ 236,6025 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Stąd

$$0 < \omega < 0,008453, \quad \omega_{\text{opt}} \approx 0,006667. \quad (16)$$

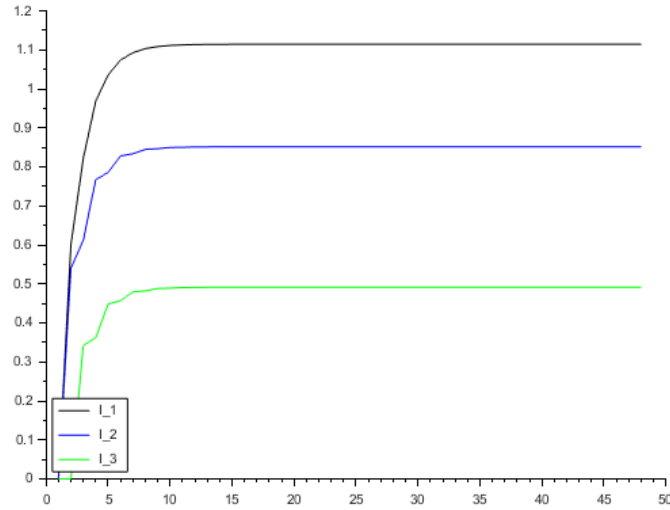
Wartość $\omega = 0,006$ również zapewnia zbieżność i prowadzi do wyników pokazanych na ryc. 2.

Wyniki:

Imetody[1]=-0.417

Imetody[2]=-2.333

Imetody[3]=-0.917



Ryc. 2. Zbieżność rozwiązania układu oczkowego w metodzie Richardsona dla $\omega = 0,006$

4 Metoda Jacobiego

Punktem wyjścia jest stosowany wcześniej rozkład macierzy [1, 3]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}, \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{L}$ zawiera elementy położone poniżej przekątnej, $\mathbf{D}$ – elementy diagonalne, a $\mathbf{U}$ – elementy położone powyżej przekątnej. Jest to ta sama konwencja oznaczeń, która została przyjęta w poprzednim rozdziale.

Kolejne przybliżenie ma postać

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}. \quad (18)$$

Metoda jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho\left(-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\right) < 1. \quad (19)$$

Algorytm indeksowy ma postać

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right). \quad (20)$$

Wymagane jest $a_{ii} \neq 0$ dla wszystkich i .

Ścisła dominacja diagonalna

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (21)$$

jest warunkiem wystarczającym zbieżności zarówno dla macierzy rzeczywistej, jak i zespolonej. W przypadku zespolonym symbole wartości bezwzględnej oznaczają moduły liczb zespolonych.

Przykładowa implementacja indeksowa działa dla obu rodzajów danych:

```

liczba_rownan=size(macierz_A,"r");
wektor_x=zeros(liczba_rownan,1)+0*%i;

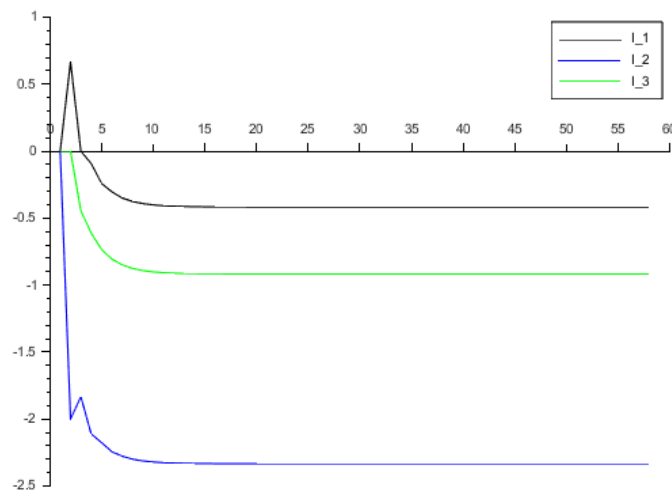
for licznik_iteracji=1:maks_iteracji
    wektor_x_nowy=zeros(liczba_rownan,1)+0*%i;

    for i=1:liczba_rownan
        suma_poza_przekatna=0;
        for j=1:liczba_rownan
            if j<>i then
                suma_poza_przekatna=suma_poza_przekatna ...
                    +macierz_A(i,j)*wektor_x(j);
            end
        end
        wektor_x_nowy(i)=(wektor_b(i)-suma_poza_przekatna) ...
            /macierz_A(i,i);
    end

    // Obliczenie residuum zgodnie z równaniem (residuum).
    wektor_x=wektor_x_nowy;
end

```

Za pomocą wersji macierzowej i indeksowej przeprowadzono symulację obu przykładowych układów rzeczywistych. Zbieżność uzyskano dla układu oczkowego; wyniki i przebieg zbieżności pokazano na ryc. 3.



Ryc. 3. Zbieżność modelu oczkowego w metodzie Jacobiego

5 Metoda Gaussa–Seidela

Metoda Gaussa–Seidela jest modyfikacją metody Jacobiego, w której przy obliczaniu kolejnych składowych wykorzystuje się wartości już zaktualizowane w bieżącej iteracji [1, 3]:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}. \quad (22)$$

Stąd

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U} \mathbf{x}^{(k)} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{b}. \quad (23)$$

Ogólnym warunkiem zbieżności jest

$$\rho\left(-(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U}\right) < 1. \quad (24)$$

Algorytm indeksowy ma postać

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}. \quad (25)$$

Warunki dla macierzy rzeczywistej. Metoda jest zbieżna między innymi dla macierzy rzeczywistej symetrycznej dodatnio określonej oraz dla macierzy ściśle diagonalnie dominującej.

Warunki dla macierzy zespolonej. Odpowiednikiem pierwszego warunku jest hermitowskość i dodatnia określoność. Ścisła dominacja diagonalna zapisana za pomocą modułów również pozostaje warunkiem wystarczającym. Dla ogólnej macierzy zespolonej należy sprawdzać promień spektralny.

W kodzie indeksowym wystarczy używać wektora już aktualizowanego:

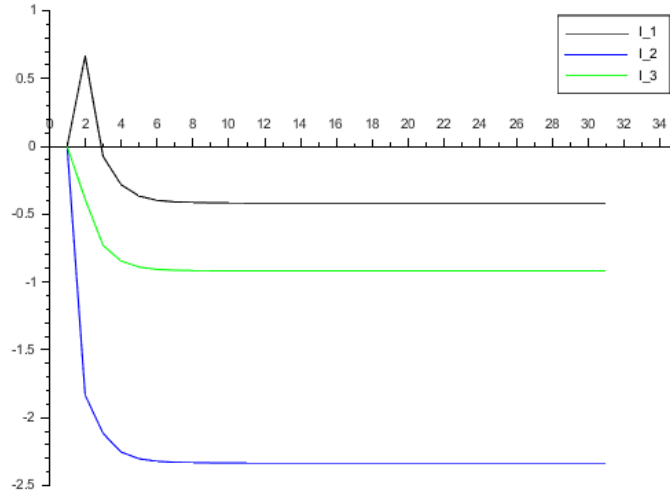
```
wektor_x_nowy=wektor_x;

for i=1:liczba_rownan
    suma_pod=0;
    for j=1:(i-1)
        suma_pod=suma_pod+macierz_A(i,j)*wektor_x_nowy(j);
    end

    suma_nad=0;
    for j=(i+1):liczba_rownan
        suma_nad=suma_nad+macierz_A(i,j)*wektor_x(j);
    end

    wektor_x_nowy(i)=(wektor_b(i)-suma_pod-suma_nad) ...
                    /macierz_A(i,i);
end
```

Dla rzeczywistego układu oczkowego metoda osiągnęła żadaną dokładność szybciej niż metoda Jacobiego, jak pokazano na ryc. 4.



Ryc. 4. Zbieżność modelu oczkowego w metodzie Gaussa–Seidela

6 Metoda nadrelaksacji

Metoda nadrelaksacji jest modyfikacją metody Gaussa–Seidela. Współczynnik ω skaluje zmianę kolejnego przybliżenia. W niniejszym rozdziale stosowany jest rzeczywisty współczynnik ω [3].

Macierzowa postać iteracji wynosi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1} ((1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}) \mathbf{x}^{(k)} + \omega (\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}. \quad (26)$$

Algorytm indeksowy można zapisać w czytelnej postaci

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right). \quad (27)$$

Macierz rzeczywista. Jeżeli macierz jest symetryczna i dodatnio określona, metoda nadrelaksacji jest zbieżna dla

$$0 < \omega < 2. \quad (28)$$

Macierz zespolona. Ten sam przedział gwarantuje zbieżność dla macierzy hermitowskiej dodatnio określonej. Dla ogólnej zespolonej macierzy symetrycznej albo niehermitowskiej warunek $0 < \omega < 2$ nie jest gwarancją. Dla każdej badanej wartości należy sprawdzić

$$\rho \left((\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1} ((1 - \omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}) \right) < 1 \quad (29)$$

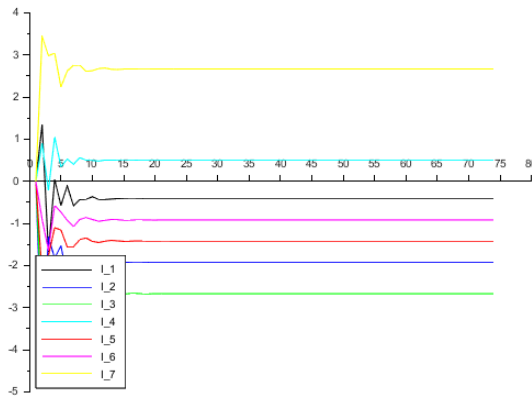
albo przeprowadzić kontrolowany eksperyment numeryczny z ograniczeniem liczby iteracji i kontrolą residuum.

Przykładowa aktualizacja w Scilabie:

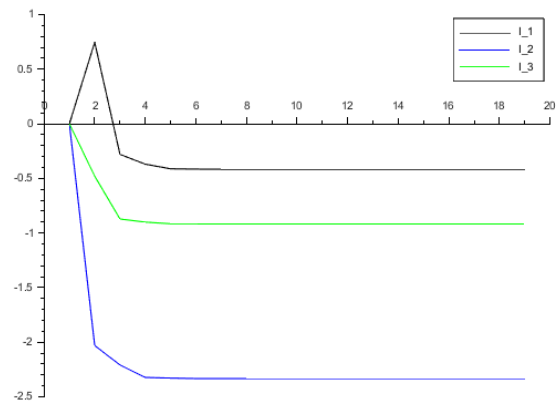
```
wartosc_gaussa_seidela= ...
    (wektor_b(i)-suma_pod-suma_nad)/macierz_A(i,i);
wektor_x_nowy(i)=(1-wsp_relaksacji)*wektor_x(i) ...
    +wsp_relaksacji*wartosc_gaussa_seidela;
```

Dla przykładowych układów rzeczywistych wykonano przegląd wartości ω ze skokiem 0,01. Dla układu Kirchhoffa najszybszą obserwowaną zbieżność uzyskano w pobliżu $\omega = 0,67$, a dla

układu oczkowego w pobliżu $\omega = 1,12$. Są to wyniki właściwe dla konkretnych macierzy i nie należy przenosić ich bez sprawdzenia na inny układ, zwłaszcza zespolony.



Ryc. 5. Zbieżność modelu Kirchhoffa



Ryc. 6. Zbieżność modelu oczkowego

7 Przykład układu zespolonego

Do sprawdzenia implementacji dla liczb zespolonych można wykorzystać następujący układ opisujący przykładowy obwód RLC:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 + 2i & -1 + 0,5i & 0 \\ -1 + 0,5i & 5 + i & -1 - 0,5i \\ 0 & -1 - 0,5i & 3 + 2i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 5i \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Macierz $\mathbf{A}$ jest zespolona symetryczna, ponieważ $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, ale nie jest hermitowska: $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^*$. Jest jednocześnie ściśle diagonalnie dominująca w sensie modułów, dlatego metody Jacobiego i Gaussa–Seidela są zbieżne. Dla tej macierzy promienie spektralne wynoszą w przybliżeniu

$$\rho(-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})) \approx 0,2833, \quad \rho(-(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}) \approx 0,0803.$$

Przykład pokazuje, że hermitowskość nie jest konieczna do zbieżności tych metod, jeżeli spełniony jest inny warunek wystarczający.

Macierz i wektor można zapisać w Scilabie następująco:

```
macierz_A=[4+2*i,    -1+0.5*i,  0;
           -1+0.5*i,    5+i,    -1-0.5*i;
           0,          -1-0.5*i,  3+2*i];
```

```
wektor_b=[100;0;5*i];
```

Rozwiązanie należy przedstawiać zarówno w postaci algebraicznej, jak i przez moduł oraz argument fazona. Wartość odniesienia można obliczyć operatorem

```
wektor_odniesienia=macierz_A\wektor_b;
```

Zadania

Do pierwszej części obliczeń należy wykorzystać macierz i wektor zapisane poniżej. Każdy student mnoży wektor $\mathbf{J}$ przez współczynnik k_J swojego zestawu. Dla wszystkich metod przyjąć

$\mathbf{x}^{(0)} = 0$, tolerancję względnego residuum 10^{-8} i limit 5000 iteracji.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.425 & -0.125 & 0 & -0.0333333 \\ 0 & -0.125 & 0.375 & -0.1666667 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1666667 & 0.3166667 & -0.1 \\ 0 & -0.0333333 & 0 & -0.1 & 0.1733333 \end{bmatrix}.$$

Wektor wymuszeń dla zestawu ma postać

$$\mathbf{J} = k_J \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}^T.$$

Zestaw	1	2	3	4	5	6	7	8
k_J	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05

Zestaw	9	10	11	12	13	14	15
k_J	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40

1. Zaimplementować metody Jacobiego i Gaussa–Seidela. Jako podstawowe kryterium stopu przyjąć względne residuum wsteczne (8). Algorytm powinien również przerywać obliczenia po przekroczeniu limitu iteracji.
2. Dla każdej macierzy sprawdzić brak zerowych elementów diagonalnych, dominację diagonalną oraz warunki zbieżności zapisane w treści rozdziału za pomocą promienia spektralnego. Porównać wynik przewidywania z rzeczywistym przebiegiem residuum.
3. Zaimplementować metodę nadrelaksacji. Przeszukać zakres $0 < \omega < 2$ najpierw ze skokiem 0,1, a następnie zagęścić siatkę w otoczeniu wartości dającej najmniejszą liczbę iteracji. Dla każdej wartości sprawdzić także warunek zbieżności zapisany za pomocą promienia spektralnego.
4. Porównać liczbę iteracji, czas obliczeń, normę residuum oraz błąd względem rozwiązania bezpośredniego.
5. Dla każdej metody wykreślić względne residuum w funkcji numeru iteracji w skali logarytmicznej. Zinterpretować wpływ parametru ω na szybkość zbieżności.
6. Powtórzyć obliczenia dla zespolonego układu (30). Sprawdzić oddzielnie zwykłą symetrię i hermitowskość macierzy. Wyniki przedstawić jako liczby zespolone oraz w postaci moduł–argument.
7. Wyjaśnić, dlaczego przedział $0 < \omega < 2$ nie stanowi ogólnej gwarancji zbieżności dla zespolonej macierzy niehermitowskiej, mimo że może zawierać wartości prowadzące do zbieżności.

Zadanie rozszerzające. Zaimplementować metodę Richardsona. Dla rzeczywistej macierzy symetrycznej dodatnio określonej dobrać parametr na podstawie skrajnych wartości własnych. Dla macierzy zespolonej dobrać parametr przez minimalizację promienia spektralnego $\rho(\mathbf{I} - \omega \mathbf{A})$ na zadanej siatce wartości ω . Porównać zbieżność z metodą Jacobiego.

Bibliografia

- [1] Gene H. Golub i Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. 4 wyd. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2013.

- [2] Nicholas J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. 2 wyd. Philadelphia: SIAM, 2002.
- [3] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco i Fausto Saleri. *Numerical Mathematics*. 2 wyd. Berlin: Springer, 2007.