

Równania różniczkowe

Wstęp

Równania różniczkowe służą między innymi do opisu zjawisk zmiennych w czasie. W elektrotechnice opisują na przykład stany nieustalone powstające po przełączeniu obwodu. Rozwiązanie analityczne bywa trudne lub niedostępne, dlatego stosuje się metody numeryczne, które wyznaczają przybliżone wartości rozwiązania w kolejnych punktach przedziału obliczeń [1, 3].

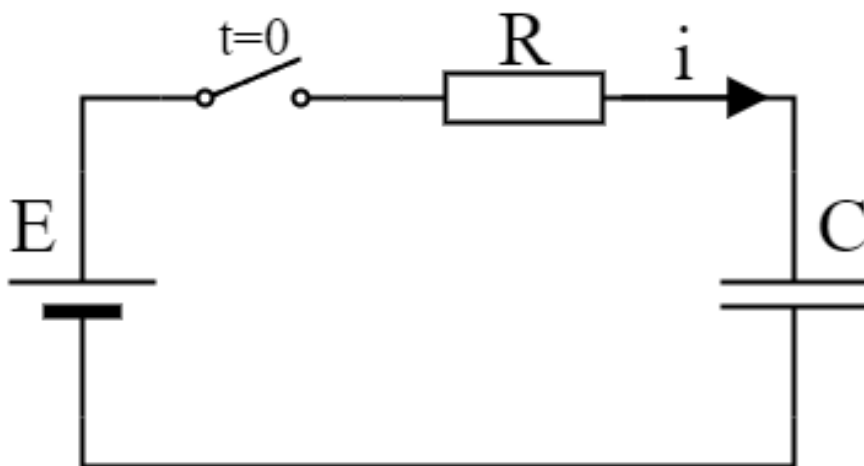
W ramach ćwiczenia omówione zostaną trzy metody wyznaczania rozwiązania równania różniczkowego:

- wzór Taylora,
- metoda Eulera,
- metody Rungego-Kutty,

oraz ich zastosowanie do układów równań pierwszego rzędu i równań wyższych rzędów. Do rozwiązania zagadnienia początkowego trzeba podać wartości początkowe, np. napięcie na kondensatorze i prąd cewki w chwili przełączenia. Krok Δt wpływa na błąd dyskretyzacji i koszt obliczeń. Jego zmniejszenie zwykle ogranicza błąd metody w zakresie stabilności, lecz po osiągnięciu pewnej skali korzyść może zostać zniwelowana przez błędy zaokrągleń.

W środowisku **Scilab** dostępna jest funkcja `ode()`. Rozwiązanie można również wyznaczyć w programie **Xcos**, budując model z równań stanu [4].

Metody zostaną porównane na przykładzie napięcia kondensatora w szeregowym obwodzie RC przyłączanym do źródła napięcia stałego E (ryc. 1).



Ryc. 1. Testowy obwód RC

Równanie różniczkowe dla analizowanego obwodu można wyprowadzić wychodząc z praw

Kirchhoffa, jak pokazano poniżej.

$$E = u_R + u_C \quad (1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C \quad (2)$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{RC} = \frac{E}{RC} - \frac{u_C}{RC} \quad (3)$$

Dla obwodu z ryc. 1 przyjęto $R = 2000 \Omega$, $E = 10 \text{ V}$ i $C = 25 \mu\text{F}$. Przy warunku początkowym $u_C(0) = 0$ rozwiązanie analityczne równania (3) ma postać

$$u_C = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4)$$

1 Wzór Taylora

Rozwinięcie Taylora pozwala wyznaczyć kolejną wartość rozwiązania, jeżeli można obliczyć jego kolejne pochodne zwyczajne. Dla kroku $h = \Delta x$ i rozwinięcia rzędu m otrzymuje się [1, 2]:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} \cdot (\Delta x)^n \cdot y^{(n)} \quad (5)$$

gdzie m jest rzędem przybliżenia, a $y^{(n)}$ oznacza n -tą pochodną zwyczajną funkcji y .

Dla równania (3) druga pochodna wynosi

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = -\frac{1}{RC} \frac{du_C}{dt} = -\frac{E - u_C}{(RC)^2}. \quad (6)$$

W oparciu o algorytm (5) opracować można skrypt wyznaczający przebieg funkcji będącej rozwiązaniem równania różniczkowego (3), jak pokazano poniżej.

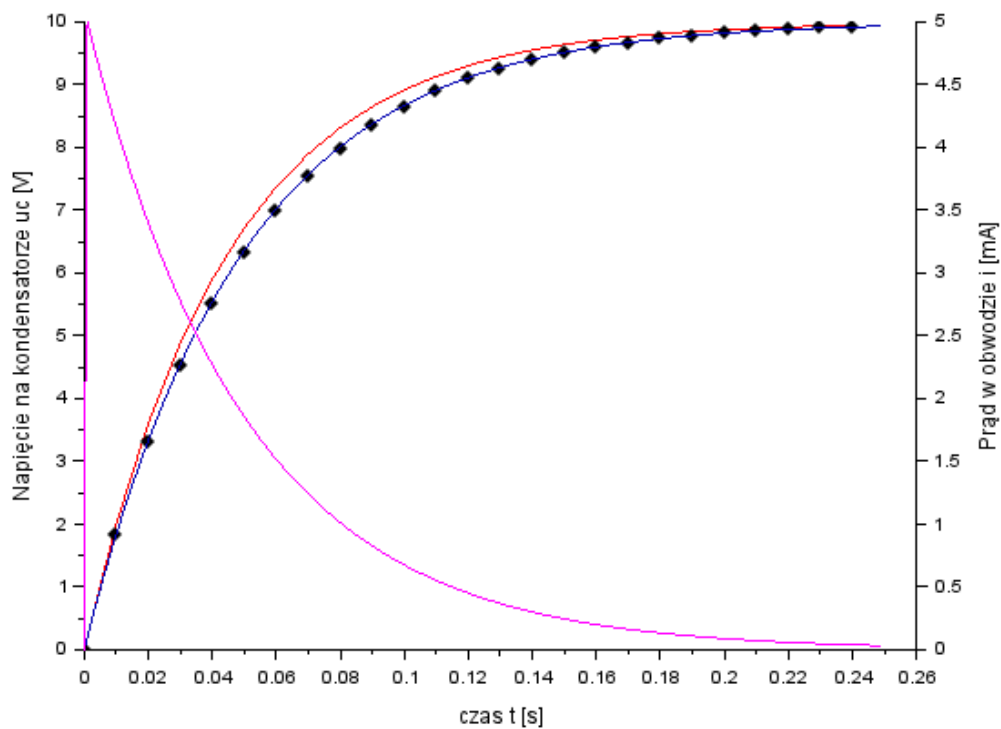
```
clear;clc;clf;
R=2e3; E=10; C=25e-6; tau=R*C;
n=25; t0=0; tn=5*tau; dt=(tn-t0)/n;
t=[t0]; u=[0]; i=[0];
function u=rozwiazanie(t)
    u=E*(1-exp(-t/tau));
endfunction
for k=1:n-1
    du(1)=E/(R*C)-u(k)/(R*C);
    du(2)=-du(1)/(R*C);
    u(k+1)=u(k);
    for j=1:2
        u(k+1)=u(k+1)+(1/factorial(j))*(dt^j)*du(j);
    end
    t(k+1)=t(k)+dt;
    i(k+1)=C*du(1)*1000;
    plot2d(t,u,5);
    plot2d(t,rozwiazanie(t),-4);
end
xlabel('czas t [s]')
ylabel('Napięcie na kondensatorze u_C [V]')
os1=gca(); os2=newaxes();
plot2d(t,i,6);
```

```

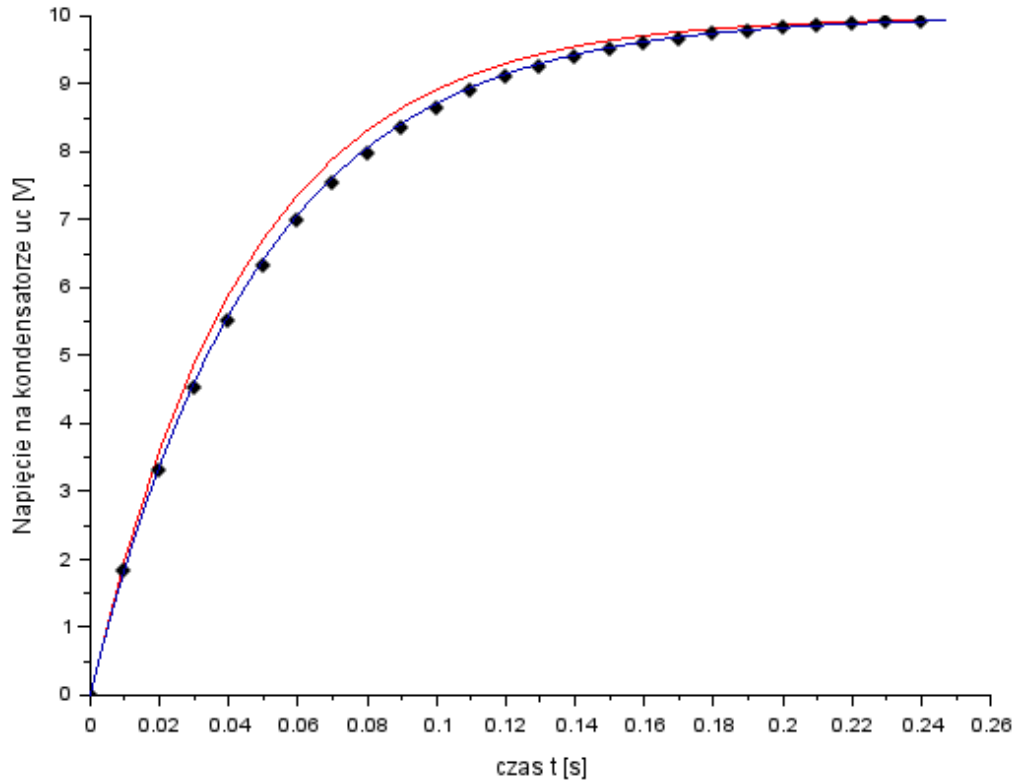
os2.filled="off"; os2.axes_visible(1)="off";
os2.y_location="right";
ylabel('Prąd w obwodzie i [mA]')

```

Na ryc. 2 pokazano wyniki rozwinięcia pierwszego i drugiego rzędu dla 25 kroków ($\Delta t = 0,01\text{ s}$). Czerwona krzywa przedstawia rozwiązanie analityczne. Na ryc. 3 porównano wyniki po zwiększeniu liczby kroków.



Ryc. 2. Rozwiązanie równania (3) wzorem Taylora



Ryc. 3. Zestawienie przebiegów dla 25 i 100 kroków obliczeń

Zwiększenie liczby kroków ograniczyło błąd dyskretyzacji. Wadą bezpośredniego rozwinięcia Taylora jest konieczność wyznaczania kolejnych pochodnych rozwiązania; dla złożonych równań może to być uciążliwe.

2 Metoda Eulera

Jawna metoda Eulera jest metodą pierwszego rzędu otrzymaną przez obcięcie rozwinięcia Taylora po pierwszej pochodnej. Dla zagadnienia $y' = f(x, y)$ kolejne przybliżenie ma postać [1, 3]:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \Delta x \cdot \frac{dy(x)}{dx} \quad (7)$$

Przykładowa implementacja ma postać:

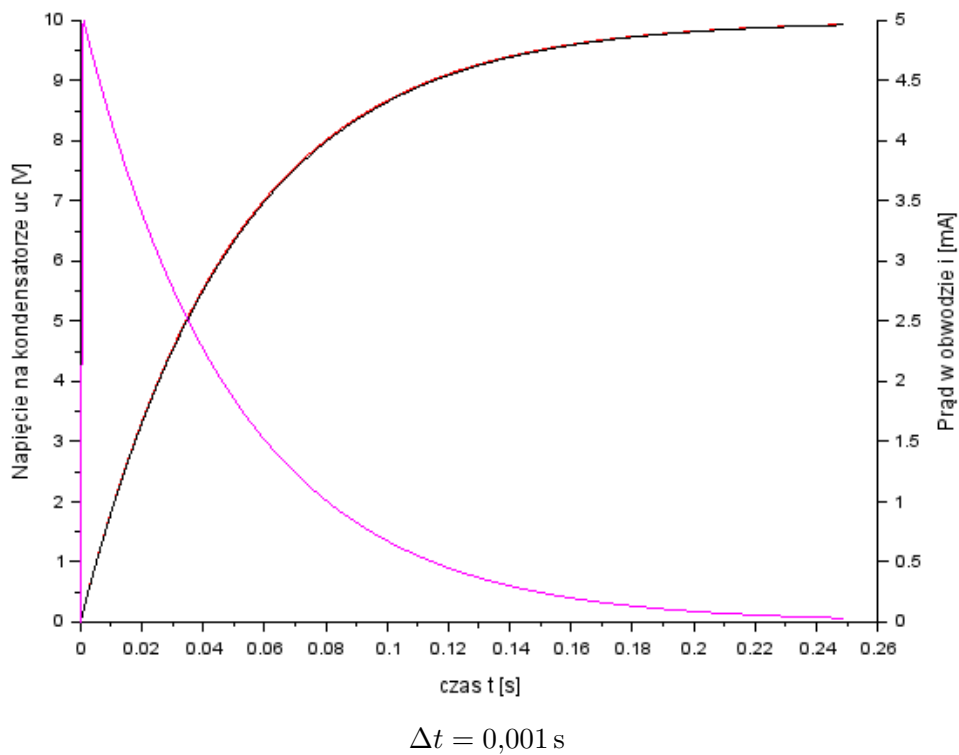
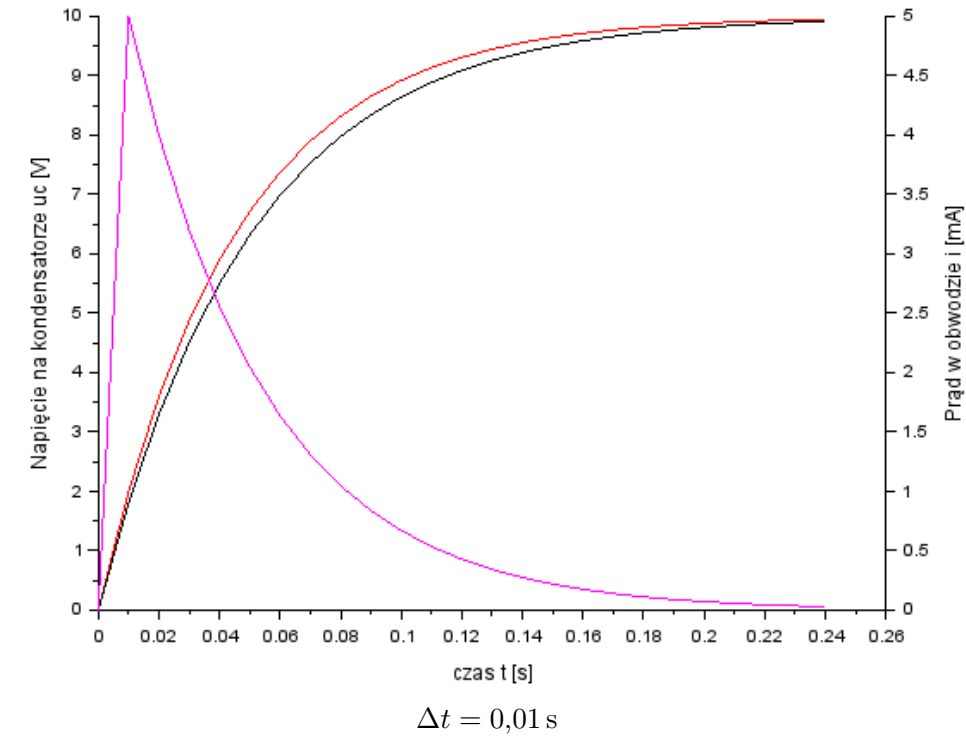
```
clear;clc;clf;
R=2e3;E=10;C=25e-6; tau=R*C;
n=25; t0=0; tn=5*tau; dt=(tn-t0)/n;
t=[t0]; u=[0]; i=[0];
function u=rozwiiazanie(t)
    u=E*(1-exp(-t/tau));
endfunction
for k=1:n-1
    du=E/(R*C)-u(k)/(R*C);
    u(k+1)=u(k)+dt*du;
    t(k+1)=t(k)+dt;
    i(k+1)=C*du*1000;
end
plot2d(t,u,5);
```

```

plot2d(t,rozwiazanie(t),-4);
xlabel('czas t [s]')
ylabel('Napięcie na kondensatorze uc [V]')
os1=gca(); os2=newaxes();
plot2d(t,i,6);
os2.filled="off"; os2.axes_visible(1)="off";
os2.y_location="right";
ylabel('Prąd w obwodzie i [mA]')

```

Dla równania (3) otrzymano wyniki pokazane na ryc. 4 dla kroków $\Delta t = 0,01\text{ s}$ i $\Delta t = 0,001\text{ s}$.



Ryc. 4. Rozwiązanie równania różniczkowego metodą Eulera

Można zauważyć, że dziesięciokrotne zmniejszenie kroku poprawiło zgodność z rozwiązaniem analitycznym (4). Ocena dokładności powinna jednak opierać się na błędzie liczbowym, a nie wyłącznie na wizualnym pokrywaniu się krzywych.

3 Metody Rungego-Kutty

Metody Rungego-Kutty wyznaczają w jednym kroku kilka wartości prawej strony równania $y' = f(x, y)$, nazywanych etapami. Odpowiednia kombinacja etapów pozwala uzyskać wyższy rząd dokładności bez jawnego obliczania kolejnych pochodnych rozwiązania. Ogólna postać jawnej, s -etapowej metody Rungego-Kutty jest następująca [1, 3]:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s w_i k_i, \quad (8)$$

$$k_i = h f \left(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j \right), \quad i = 1, \dots, s. \quad (9)$$

Współczynniki a_{ij} , c_i i w_i określają konkretną metodę. Liczba etapów s nie musi być równa rzędowi metody. W tab. 1 zestawiono wybrane jawne metody rzędów od pierwszego do czwartego.

Tab. 1. Wybrane jawne metody Rungego-Kutty

Rząd	w_i	k_i	Nazwa
I	$w_1 = 1$	$k_1 = \Delta x \cdot f(x_n, y_n)$	Eulera
II	$w_1 = \frac{1}{2}$ $w_2 = \frac{1}{2}$	$k_1 = \Delta x \cdot f(x_n, y_n)$ $k_2 = \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n + k_1)$	Heuna
III	$w_1 = \frac{1}{6}$ $w_2 = \frac{2}{3}$ $w_3 = \frac{1}{6}$	$k_1 = \Delta x \cdot f(x_n, y_n)$ $k_2 = \Delta x \cdot f(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}k_1)$ $k_3 = \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n - k_1 + 2k_2)$	Kutta, rząd 3
IV	$w_1 = \frac{1}{6}$ $w_2 = \frac{1}{3}$ $w_3 = \frac{1}{3}$ $w_4 = \frac{1}{6}$	$k_1 = \Delta x \cdot f(x_n, y_n)$ $k_2 = \Delta x \cdot f(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}k_1)$ $k_3 = \Delta x \cdot f(x_n + \frac{1}{2}\Delta x, y_n + \frac{1}{2}k_2)$ $k_4 = \Delta x \cdot f(x_n + \Delta x, y_n + k_3)$	klasyczna RK4

Klasyczna metoda RK4 jest popularnym kompromisem między kosztem jednego kroku a dokładnością. Poniżej przedstawiono jej implementację dla równania (3).

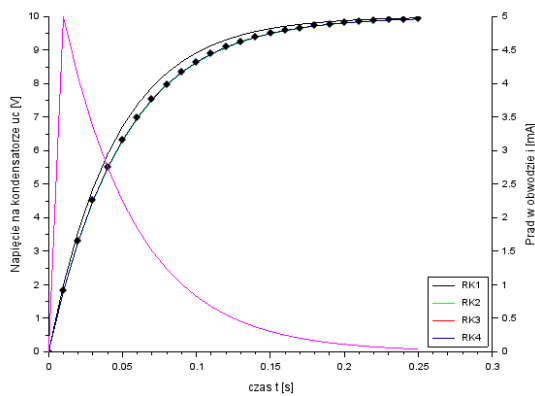
```
clear;clc;clf;
R=2e3;E=10;C=25e-6; tau=R*C;
n=25; t0=0; tn=5*tau; dt=(tn-t0)/n;
t=[t0]; u=[0]; i=[0];
function u=rozwiązanie(t)
    u=E*(1-exp(-t/tau));
endfunction
function y=rownanie(x)
    y=E/(R*C)-x/(R*C);
endfunction
function [x,y]=RK4(dx,xw,yw)
    k1=dx*rownanie(yw);
    k2=dx*rownanie(yw+0.5*k1);
    k3=dx*rownanie(yw+0.5*k2);
    k4=dx*rownanie(yw+k3);
    y=yw+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
    x=xw+dx;
endfunction
for k=1:n
    [t(k+1),u(k+1)]=RK4(dt,t(k),u(k));
```

```

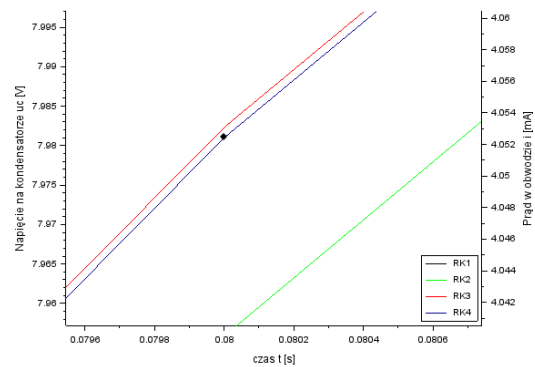
i(k+1)=C*rownanie(u(k))*1000;
end
plot2d(t,u,5);
plot2d(t,rozwiązanie(t),-4);
xlabel('czas t [s]')
ylabel('Napięcie na kondensatorze uC [V]')
os1=gca();
os2=newaxes();
plot2d(t,i,6);
os2.filled="off"; os2.axes_visible(1)="off";
os2.y_location="right";
ylabel('Prąd w obwodzie i [mA]')
legends(["uC" "i" "uC analityczne"],[5 6 -4],opt="lr");

```

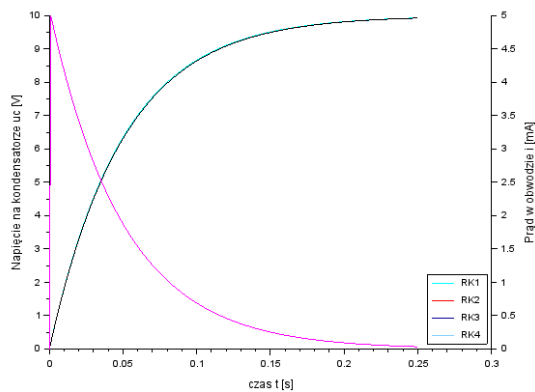
Na ryc. 5 największy błąd ma metoda pierwszego rzędu. Różnice między metodami wyższych rzędów są lepiej widoczne na powiększeniu (ryc. 6). Dziesięciokrotne zmniejszenie kroku ogranicza różnice względem rozwiązania analitycznego, szczególnie dla metod wyższych rzędów (ryc. 7 i 8).



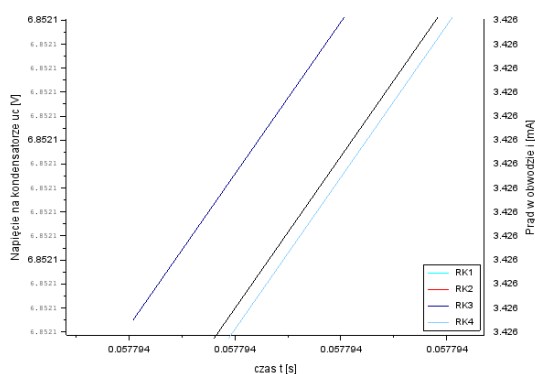
Ryc. 5. Rozwiązanie równania metodami Rungego-Kutty rzędów 1-4 dla $\Delta t = 0,01$ s



Ryc. 6. Różnice pomiędzy rzędem 2-4 a przebiegiem analitycznym



Ryc. 7. Rozwiązanie równania metodami Rungego-Kutty rzędów 1-4 dla $\Delta t = 0,001$ s

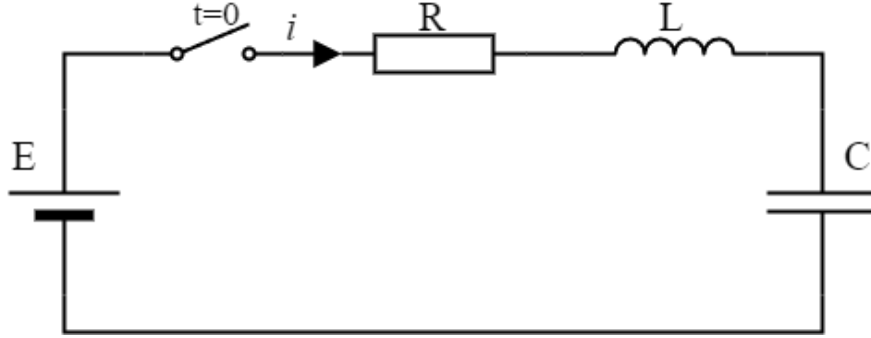


Ryc. 8. Różnice pomiędzy rzędem 3-4 a przebiegiem analitycznym

4 Układ równań różniczkowych i równania wyższych rzędów

Opisane powyżej metody dedykowane są dla równań różniczkowych I rzędu. Obliczenia mogą być realizowane także dla układu równań różniczkowych I rzędu. W przypadku równań lub układów równań wyższych rzędów należy je sprowadzić do układu równań I rzędu.

Zastosowanie metod zostanie pokazane na przykładzie stanu nieustalonego w szeregowym obwodzie RLC przyłączanym do źródła napięcia stałego (ryc. 9).



Ryc. 9. Testowy obwód RLC

Parametry testowego obwodu wynoszą: $E = 100 \text{ V}$, $R = 0,25 \Omega$, $L = 25 \text{ mH}$ i $C = 33 \text{ mF}$. Z drugiego prawa Kirchhoffa otrzymuje się

$$E = R \cdot i + u_L + u_C \quad (10)$$

Ponieważ prąd w obwodzie z kondensatorem jest opisany zależnością

$$i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (11)$$

a napięcie na cewce jest opisane zależnością

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (12)$$

równanie napięciowe obwodu można zapisać

$$E = RC \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot \frac{di}{dt} + u_C \quad (13)$$

Zapisane równanie różniczkowe dwóch zmiennych można sprowadzić do równania różniczkowego jednej zmiennej wyrażając natężenie prądu w obwodzie funkcją spadku napięcia na kondensatorze.

$$E = RC \cdot \frac{du_C}{dt} + LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C \quad (14)$$

Równanie drugiego rzędu (14) sprowadza się do układu dwóch równań pierwszego rzędu. Po przekształceniu równań (10)–(12) otrzymuje się

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_C}{L} \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C} \end{cases} \quad (15)$$

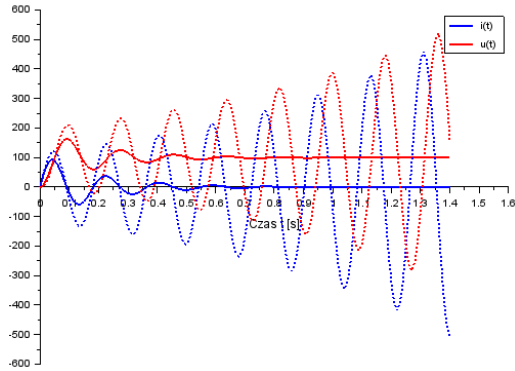
Wzór Taylora wymaga wyznaczenia pochodnych wyższych rzędów. Dla układu (15) otrzymuje się:

$$II. \begin{cases} \frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt}}{L} \\ \frac{d^2 u_C}{dt^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{di}{dt} \end{cases} \quad (16)$$

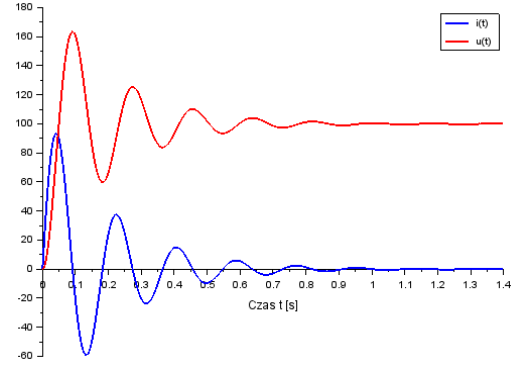
$$III. \begin{cases} \frac{d^3 i}{dt^3} = -\frac{R \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{d^2 u_C}{dt^2}}{L} \\ \frac{d^3 u_C}{dt^3} = \frac{1}{C} \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} \end{cases} \quad (17)$$

$$IV. \begin{cases} \frac{d^4 i}{dt^4} = -\frac{R \frac{d^3 i}{dt^3} + \frac{d^3 u_C}{dt^3}}{L} \\ \frac{d^4 u_C}{dt^4} = \frac{1}{C} \cdot \frac{d^3 i}{dt^3} \end{cases} \quad (18)$$

Błąd dyskretyzacji zależy od kroku i rzędu rozwinięcia. Na ryc. 10 pokazano wyniki dla $\Delta t = 0,01$ s, a na ryc. 11 dla $\Delta t = 0,0001$ s.



Ryc. 10. Rozwiązanie równania różniczkowego wzorem Taylora dla rozwinięcia 1 i 4 dla $\Delta t = 0,01$ s



Ryc. 11. Rozwiązanie równania różniczkowego wzorem Taylora dla $\Delta t = 0,0001$ s

Metody Rungego-Kutty stosuje się do układu w sposób analogiczny, przy czym każdy etap k_i jest wektorem o liczbie składowych równej liczbie równań.

5 Funkcja *ode()*

W środowisku **Scilab** funkcja `ode()` służy do numerycznego rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych. Wynik jest macierzą, której kolumny odpowiadają kolejnym wartościom czasu [4].

Podstawowe wywołanie wymaga czterech argumentów:

```
y=ode(y0,t0,t,funkcja);
```

gdzie:

- `y0` — wektor warunków początkowych,
- `t0` — początkowa wartość zmiennej niezależnej,
- `t` — wektor punktów, w których ma zostać zwrócone rozwiązanie,
- `funkcja` — funkcja prawej strony układu równań stanu.

Jako zmienne stanu obwodu z ryc. 9 przyjęto

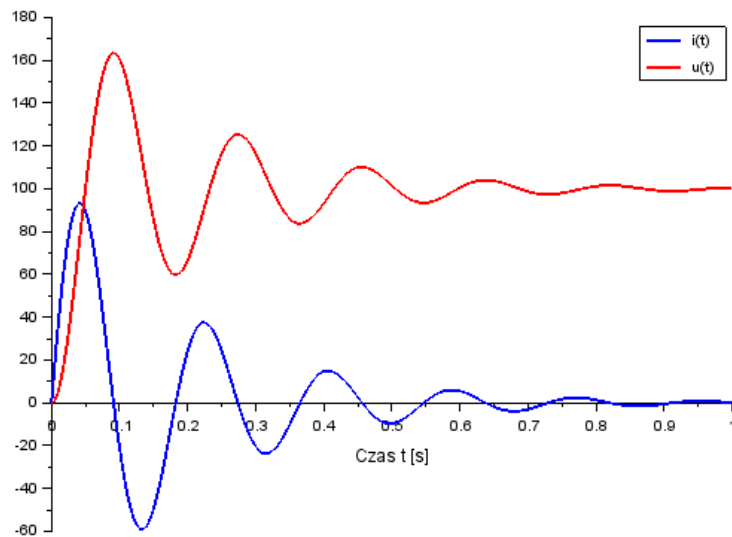
$$\begin{cases} x_1 = u_C, \\ x_2 = i. \end{cases} \quad (19)$$

Równania stanu mają zatem postać

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{C}, \\ \dot{x}_2 = \frac{E - Rx_2 - x_1}{L}. \end{cases} \quad (20)$$

Kod skryptu obliczającego zdefiniowany równaniami stanu układ równań różniczkowych dla obwodu z ryc. 9 pokazano poniżej wraz z uzyskanymi wynikami pokazanymi na ryc. 12.

```
clc; clear;clf;
function [y]=R_stanu(t,x)
    y(1)=x(2)/C;
    y(2)=(E-R*x(2)-x(1))/L;
endfunction
R=0.25; L=25e-3; C=33e-3; E=100;
dt=0.0001;
koniec=1;
t0=0; y0=[0;0];
t=t0:dt:koniec;
y=ode(y0,t0,t,R_stanu);
uc=y(1,:); i=y(2,:);
plot2d(t,[i' uc'],[2 5]);
osie=gca(); osie.x_location="origin"; osie.y_location="origin";
xlabel("Czas t [s]");
legends(["i(t)" "u(t)"],[2 5], opt="ur");
```



Ryc. 12. Rozwiązanie równania różniczkowego funkcją ode()

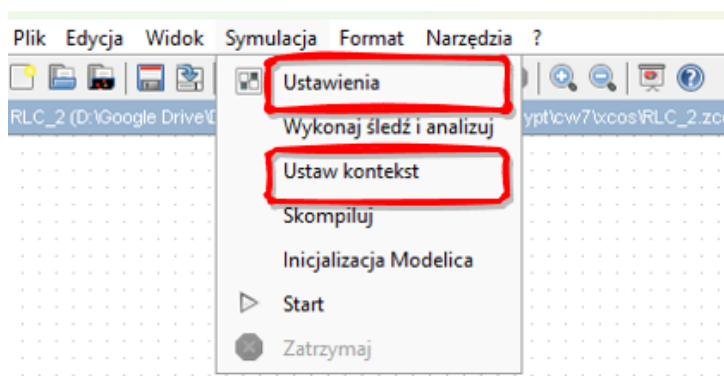
Argument t musi występować w nagłówku funkcji prawej strony, nawet gdy układ jest autonomiczny i czas nie pojawia się w równaniach jawnie.

6 Graficzne programowanie w *XCOS*

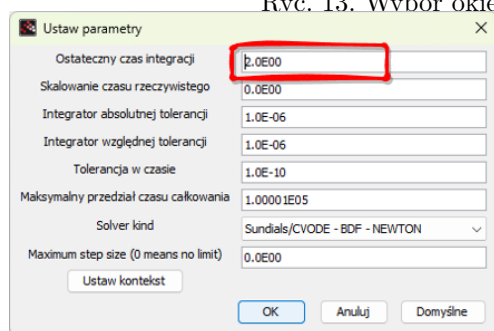
Xcos pozwala zbudować model układu równań różniczkowych w postaci schematu blokowego. Dla rozpatrywanego obwodu model można oprzeć na równaniach (19)–(20). Stosuje się między innymi bloki z grup:

- Systemy czasu ciągłego (INTEGRAL_m)
- Operacje matematyczne (GAIN_f, BIGSOM_f)
- Trasowanie sygnału (DEMUX_f)
- Źródła (CLOCK_c, CONST_f, GAINSIN_f,...)
- Sinks (CSCOPE lub CMSCOPE)

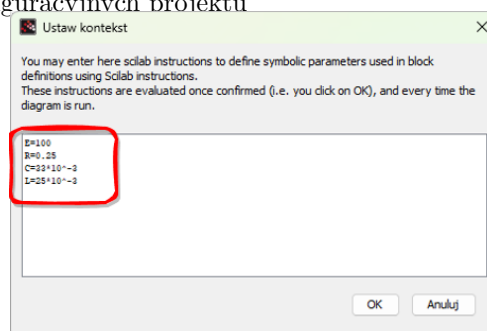
Przygotowując algorytm graficzny w programie należy zdefiniować warunki zadania (odnoszące się do kroku czasowego i czasu trwania obliczeń) oraz można przeddefiniować stałe (parametry obwodu) aby łatwiejsza była modyfikacja parametrów algorytmu. Konfiguracje tych parametrów realizuje się poprzez pozycje dostępne w zakładce symulacja, jak pokazano na ryc. 13.



Ryc. 13. Wybór okien konfiguracyjnych projektu

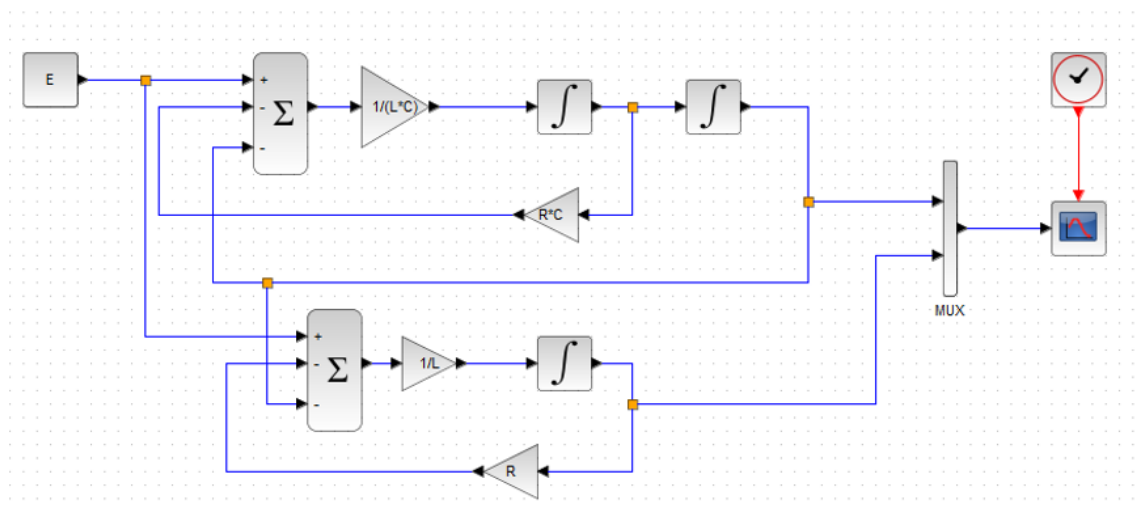


Ryc. 14. Ustawienie czasu trwania symulacji

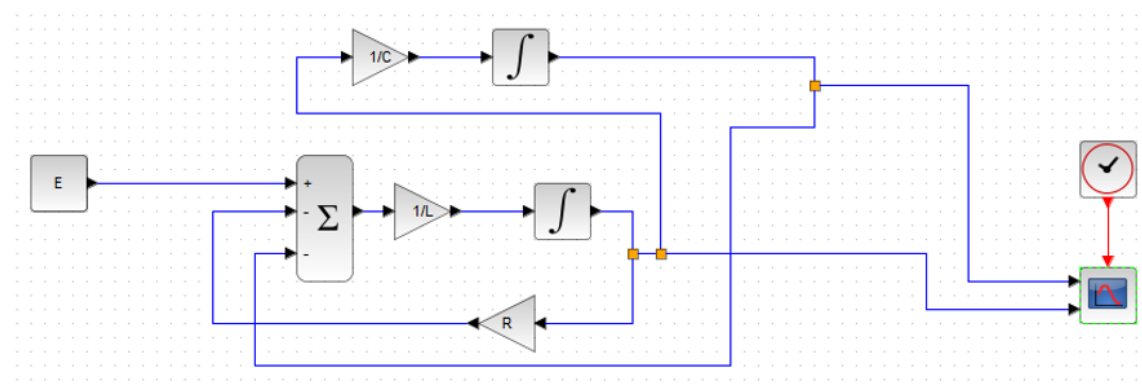


Ryc. 15. Definiowanie stałych

Równania różniczkowe opisujące analizowany układ z ryc. 9 można w postaci algorytmu graficznego zaprojektować na dwa równoważne sposoby pokazane na ryc. 16 i ryc. 17.



Ryc. 16. Algorytm wersja A



Ryc. 17. Algorytm wersja B

Parametry bloków edytuje się po dwukrotnym kliknięciu elementu. Dla przebiegu symulacji istotna jest konfiguracja zegara i oscyloskopu. W zegarze należy ustawić okres próbkowania i chwilę rozpoczęcia, np. 0,0001 i 0. W oscyloskopie definiuje się zakresy osi pionowych i osi czasu.

Zadania

Należy przeanalizować odpowiedź przejściową **równoległego obwodu RLC** zasilanego idealnym źródłem prądowym $i_s(t) = I_0 \mathbf{1}(t)$. Rezystor, cewka i kondensator są połączone równolegle, a napięcie $u(t)$ jest wspólne dla wszystkich gałęzi. Parametry i warunki początkowe należy przyjąć z poniższej tabeli zgodnie z numerem zestawu. Podczas laboratorium należy wyprowadzić model, uruchomić obliczenia dla jednego wariantu i sprawdzić poprawność programu. Porównanie kroków, klasyfikację odpowiedzi i bilans energetyczny należy dokończyć w sprawozdaniu.

Zestaw	R [Ω]	L [mH]	C [μ F]	I_0 [A]	$u(0)$ [V]	$i_L(0)$ [A]	t_k [s]
1	8	100	100	1,0	0	0	0,15
2	15,81	100	100	1,0	0	0	0,15
3	40	100	100	1,0	0	0	0,15
4	10	80	120	0,8	0	0	0,14
5	18	120	82	1,2	0	0	0,18
6	32	90	150	1,0	1	0	0,16
7	12	150	68	1,5	0	0,1	0,20
8	25	70	100	0,6	0	0	0,12
9	50	110	47	1,0	0	0	0,12
10	14	95	110	0,9	-1	0	0,16
11	22	130	75	1,1	0	0,05	0,18
12	35	85	130	1,3	0	0	0,14
13	9	160	56	0,7	0	0	0,20
14	28	60	180	1,0	0,5	0	0,12
15	16	105	95	1,4	0	0	0,17

1. Narysować schemat obwodu, oznaczyć zwroty prądów gałęziowych i na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa wyprowadzić model stanu. Jako zmienne stanu przyjąć napięcie obwodu $u(t)$ oraz prąd cewki $i_L(t)$. Zapisać wspólną funkcję prawej strony układu równań; gotowych równań obwodu szeregowego z przykładu nie należy przekształcać przez prostą zamianę oznaczeń.
2. Zaimplementować jawną metodę Eulera i klasyczną metodę Rungego–Kutty czwartego rzędu. Obie metody powinny korzystać z tego samego interfejsu danych i zwracać przebiegi $u(t)$, $i_L(t)$, $i_R(t)$ oraz $i_C(t)$.
3. Wyznaczyć rozwiązanie referencyjne funkcją `ode()`. Dla trzech wartości kroku 10^{-3} s, $2 \cdot 10^{-4}$ s i $5 \cdot 10^{-5}$ s porównać maksymalny błąd napięcia $u(t)$ i prądu cewki $i_L(t)$, residuum prądowego pierwszego prawa Kirchhoffa oraz czas obliczeń.
4. Z równania charakterystycznego modelu swobodnego wyprowadzić warunek tłumienia krytycznego i obliczyć rezystancję R_{kr} . Dla wszystkich zestawów z tabeli rozpoznać odpowiedź oscylacyjną, krytyczną albo aperiodyczną. Wyjaśnić, dlaczego zależność rodzaju odpowiedzi od rezystancji jest odwrotna niż w szeregowym obwodzie RLC omówionym w przykładzie.
5. Dla jednego wariantu obliczyć energię zgromadzoną w cewce i kondensatorze oraz straty mocy w rezystorze. Na podstawie przebiegów ocenić bilans mocy źródła, elementów magazynujących energię i rezystora.

Zadanie rozszerzające. Zastąpić skok prądu impulsem prostokątnym o czasie trwania 20 ms albo przebiegiem sinusoidalnym o częstotliwości zbliżonej do częstotliwości własnej obwodu. Porównać odpowiedź wymuszoną z odpowiedzią dla skoku prądu.

Bibliografia

- [1] Richard L. Burden, J. Douglas Faires i Annette M. Burden. *Numerical Analysis*. 10 wyd. Cengage Learning, 2016.
- [2] Zenon Fortuna, Bohdan Macukow i Janusz Wąsowski. *Metody numeryczne*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005.
- [3] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco i Fausto Saleri. *Numerical Mathematics*. 2 wyd. Berlin: Springer, 2007.
- [4] *Strona Scilab Enterprises S.A.S.* 2024. URL: <http://www.scilab.org>.