

Metody numeryczne

Wykład 1



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://lanczont.pollub.pl>

Informacje wstępne - EZ

Wykład – 3h na 5 zjazdach

Wykład zaliczany jest na podstawie ocen z kolokwiów (sprawdzianów - testów).

Laboratorium – 3h przez 5 zjazdów

Indywidualna decyzja prowadzącego daną grupę laboratoryjną – oceny z kartkówek, sprawozdań, odpowiedzi...

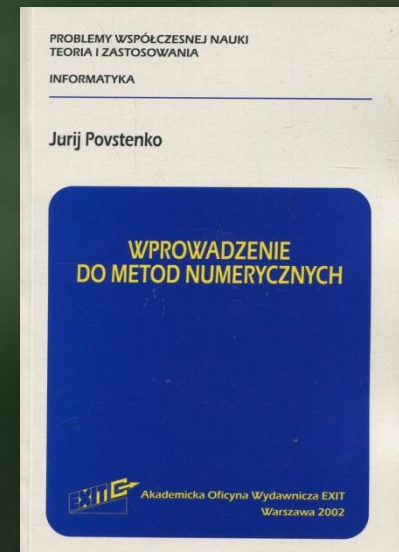
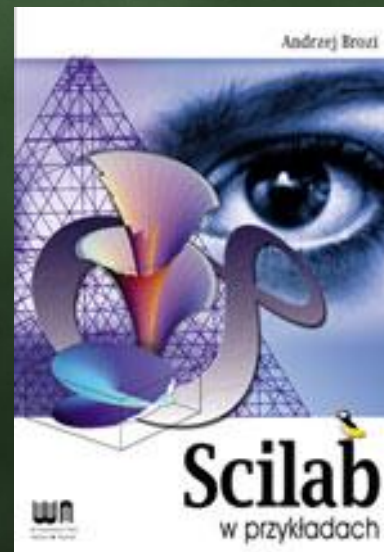
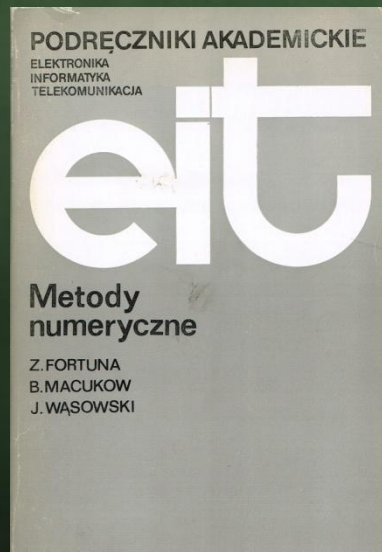
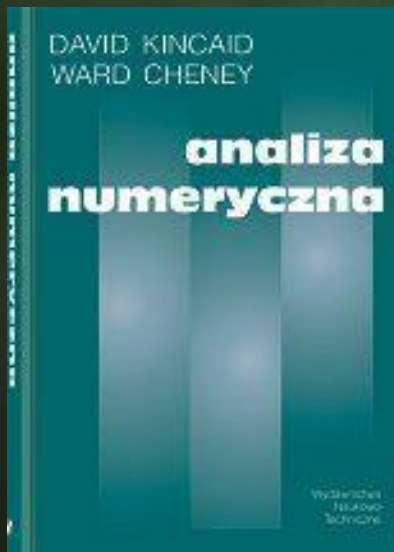
Literatura

D. Kincaid, W. Chaney: *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa, 2006

Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski: *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa, 1998

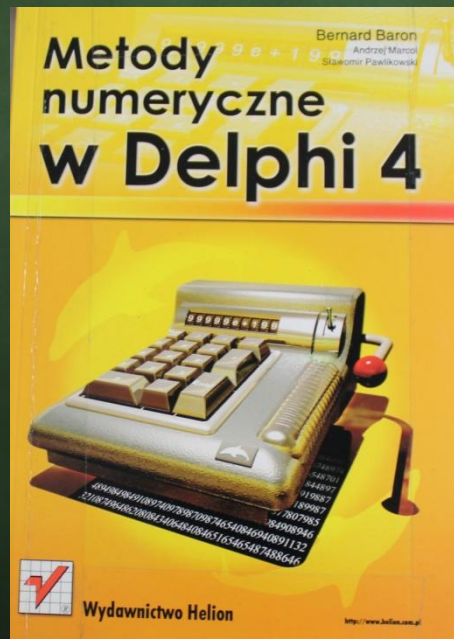
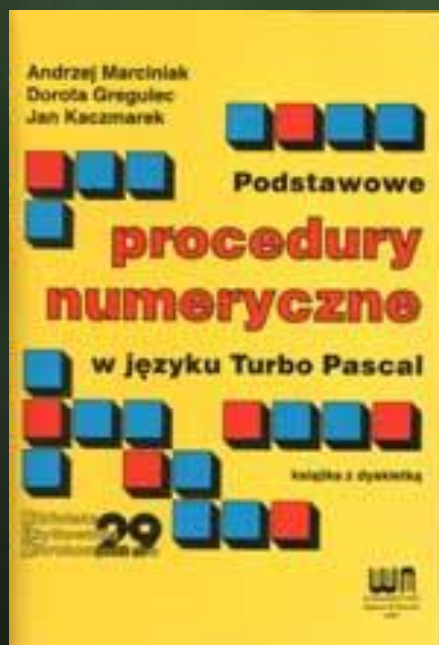
A. Brozi: *Scilab w przykładach*, Nakom, Poznań, 2007

J. Povstenko: *Wprowadzenie do metod numerycznych*, EXIT, Warszawa, 2002



Literatura

- A. Marciniak, D. Gregulec, J. Kaczmarek: **Podstawowe procedury numeryczne w języku Turbo Pascal**, Nakom, Poznań, 2000
- B. Baron, A. Marcol, S. Pawlikowski: **Metody numeryczne w Delphi 4**, Helion, Gliwice, 1999
- L. Jaroszyński, M. Łanczont: **Laboratorium Metod Numerycznych**, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin, 2014



Zakres materiału

1. Pojęcia podstawowe – równanie Taylora, rząd zbieżności, równania różnicowe
2. Arytmetyka komputerowa - błędy, stabilność i niestabilność algorytmów
3. Rachunek macierzowy
4. Równania liniowe
5. Równania nieliniowe
6. Równania różniczkowe
7. *Interpolacja i aproksymacja*

Środowisko programowania

Języki programowania

Fortran

C, Pascal, C++, ...

Środowiska obliczeniowe

Matlab

Scilab

OpenModelica

Mathematica

Scilab

www.scilab.org

Aktualna wersja

6.1.1

2024.0.0



Sci lab

Windows (32/64), Linux (32/64), MacOSX (64)

- Obliczenia matematyczne i symulacje
- Wykresy 2D i 3D
- Statystyka, Optymalizacja
- Analiza sygnałów
- Xcos – odpowiednik Simulink (Matlab)

Browser tabs: (513) Back to the Synthwave 80s..., (513) #Jedziemy. Za nami..., Scilab | Scilab

Address bar: https://www.scilab.org

Navigation links: Qt Plotting Widget..., New chat, 3D printed flying wi..., Wydział Elektrotech..., Katedra Elektrotech..., Jedno serce, różn..., Magistrala CAN - C..., Getting Started wit..., Anaconda Nucleus, The Python Standar..., The Python Langua..., HP Spectre X2 12 /...

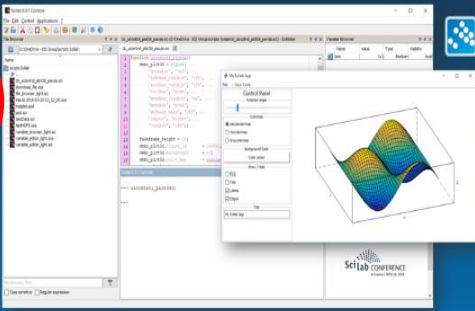
Search bar: Search...

Download Software Tutorials Use cases About

Download Scilab

Windows, Linux and Mac OS X

Open source software for numerical computation



Discover Scilab

- What is Scilab ?
- Features
- Xcos

Scilab versions

- Scilab 2023.1.0
- Scilab 6.11
- Scilab 5.5.2
- System requirements

News

Scilab 2023.1.0 has been released.
Scilab 2023.0.0 has been released.
Scilab 6.11 has been released.

[More news...](#)

SCILAB TUTORIALS

Scilab 2023.1.0

Software versions

- Scilab 2023.1.0
- Scilab 6.1.1
- Scilab 5.5.2
- Previous versions
- System Requirements

Released on Tue, 23 May 2023

[System requirements](#) | [Change log](#)

Scilab 2023.10 is released under the terms of the [GNU General Public License \(GPL\) v2.0](#)

Windows 8, 10, 11

Scilab 2023.10 - Windows 64 bits (exe)

This version has been compiled by Dassault Systèmes

Scilab 2023.10 - Windows 64 bits (exe)

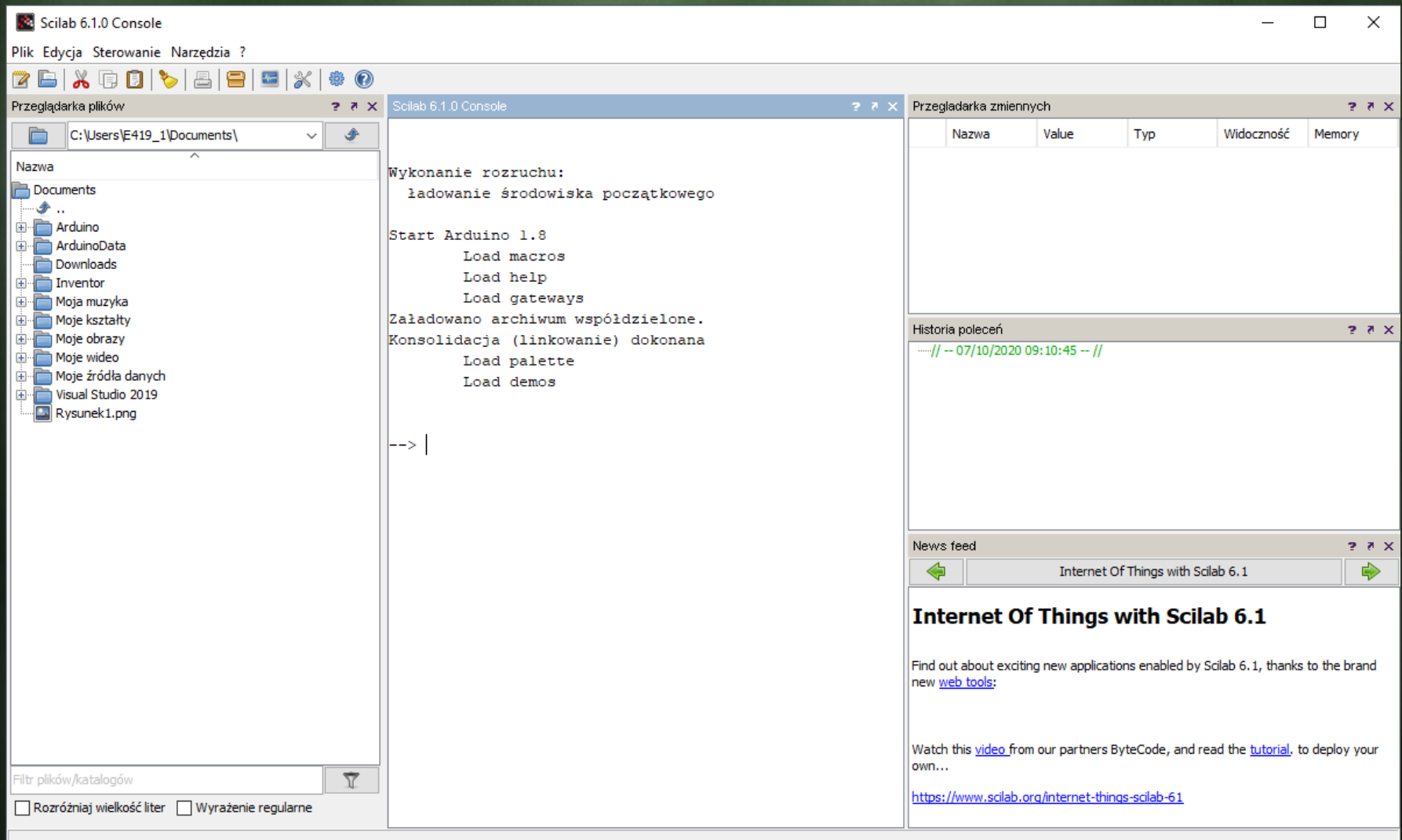
This version has been compiled by Dassault Systèmes and other builds are available on [Gitlab](#).

Scilab 2023.10 - Linux 64 bits (tarxz)

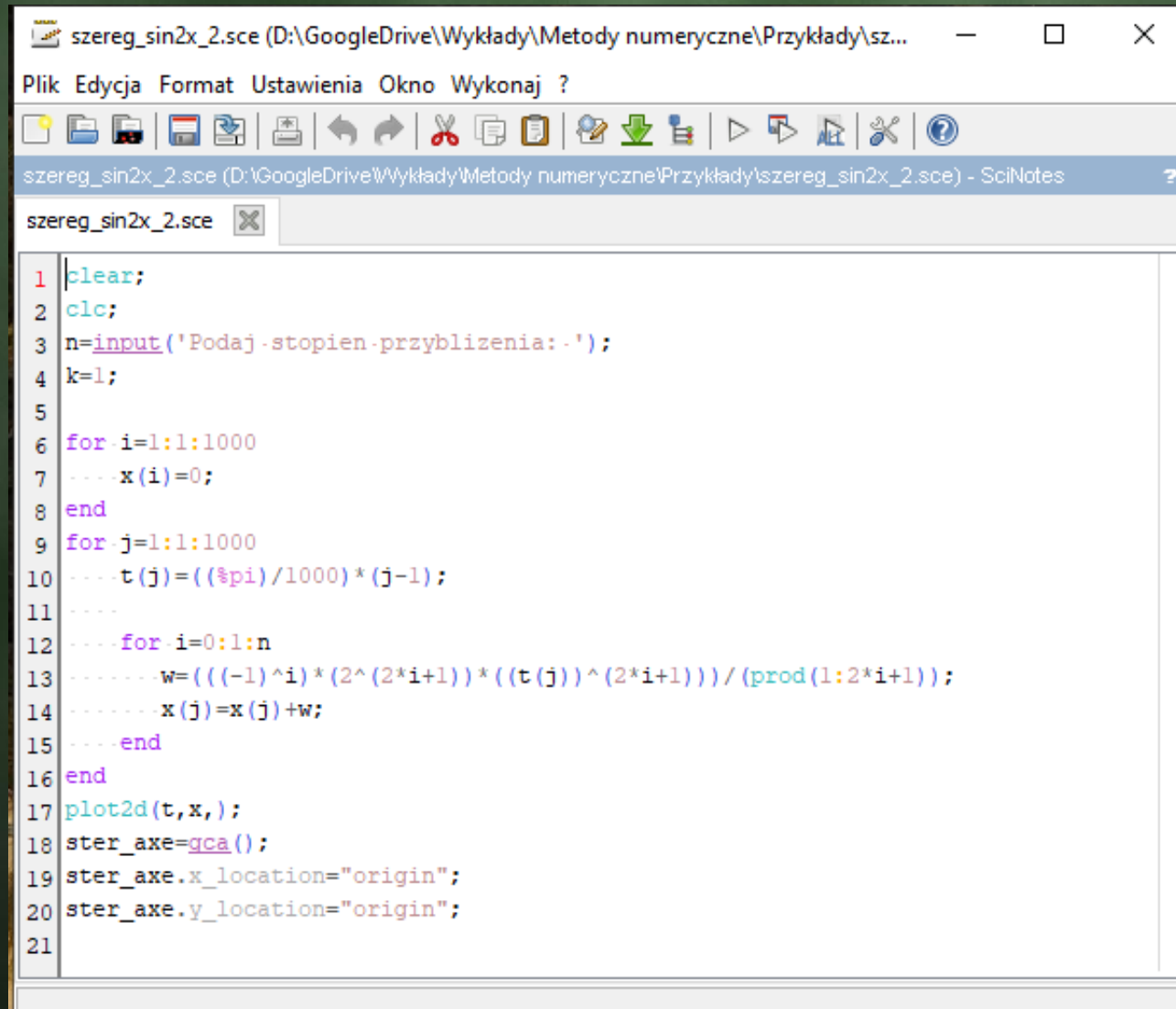
This version has been compiled by Dassault Systèmes and other builds are available on [Gitlab](#).

Scilab 2023.1.0 - macOS 64 bits (dmg)

This version has been compiled by University of Technology of Compiègne (UTC) and other builds are available on [UTC website](#).



Scilab - Scinotes

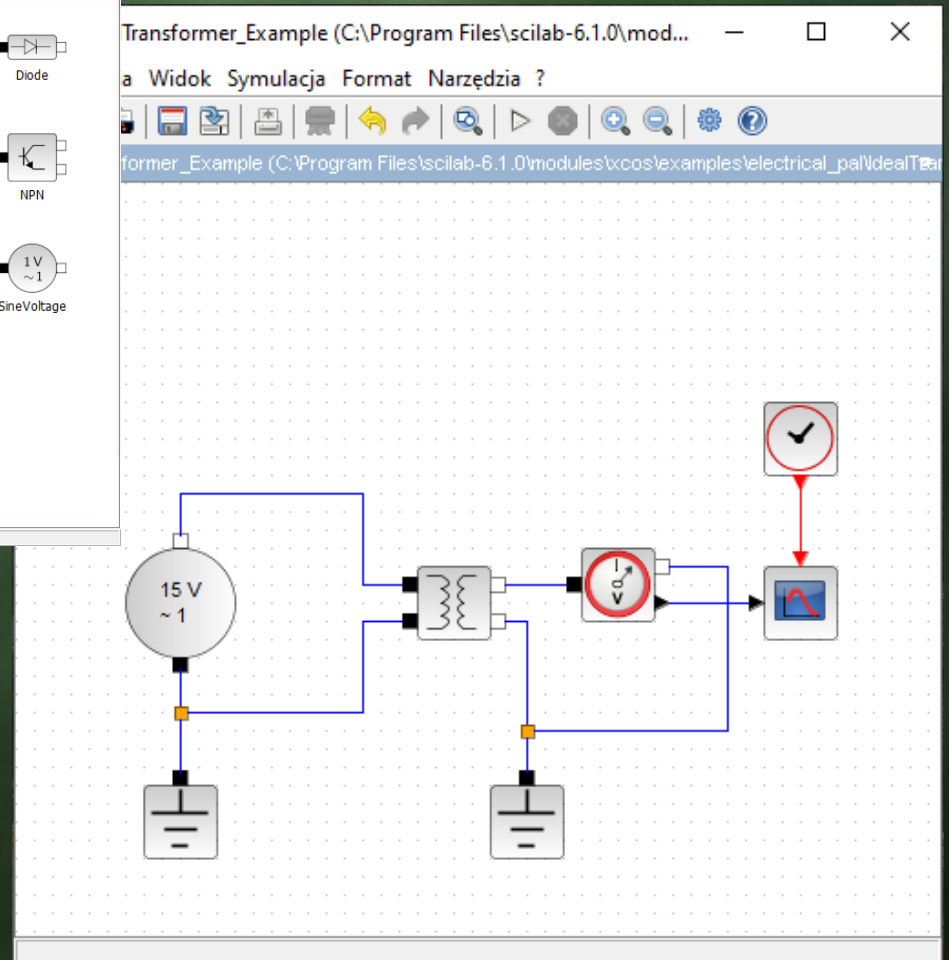
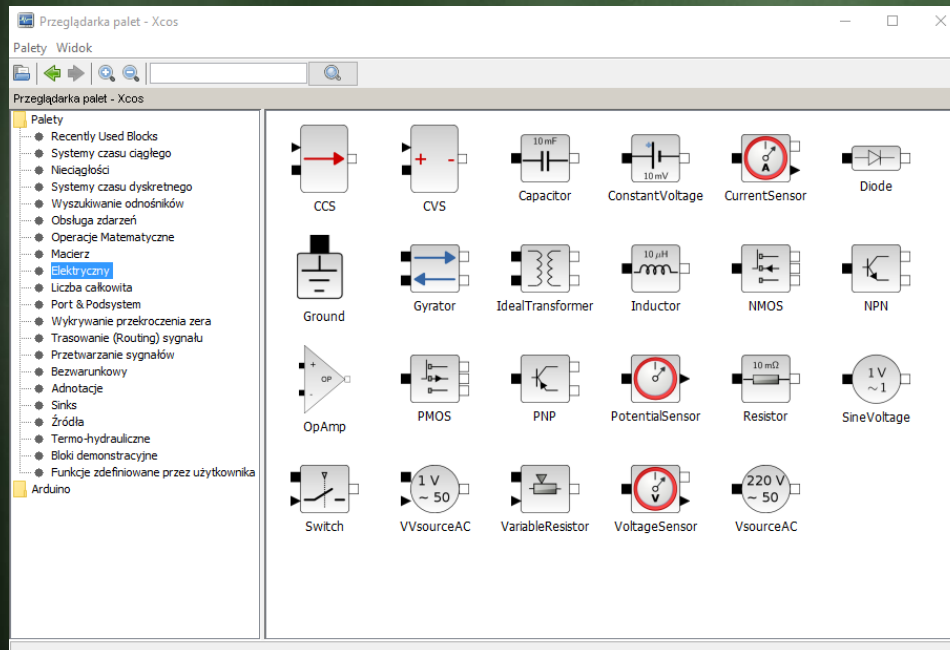


The screenshot shows the Scilab Scinotes editor window. The title bar indicates the file is 'szereg_sin2x_2.sce' located at 'D:\GoogleDrive\Wyklady\Metody numeryczne\Przyklady\sz...'. The menu bar includes 'Plik', 'Edycja', 'Format', 'Ustawienia', 'Okno', and 'Wykonaj'. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and execution. The main text area displays a MATLAB script with 21 lines of code. The script initializes variables, loops through indices to calculate terms of a series, and plots the result.

```
1 clear;
2 clc;
3 n=input('Podaj stopien przyblizenia: ');
4 k=1;
5
6 for i=1:1:1000
7     x(i)=0;
8 end
9 for j=1:1:1000
10    t(j)=(pi/1000)*(j-1);
11
12    for i=0:1:n
13        w=((-1)^i)*(2^(2*i+1))*((t(j))^(2*i+1))/(prod(1:2*i+1));
14        x(j)=x(j)+w;
15    end
16 end
17 plot2d(t,x);
18 ster_axe=gca();
19 ster_axe.x_location="origin";
20 ster_axe.y_location="origin";
21
```

Scilab - XCos

15:20



Główne kategorie - ATOMS

Plik ?

Wszystkie moduły

- Bioinformatics
- Contributed Scilab builds
- Data Analysis
- Data Handling
- Documentation
- Domain-Specific
- Education
- GUI
- Graphics
- Graphs
- Image Processing
- Instruments Control
- Linear algebra
- Manuals
- Modeling
- Numerical Maths
- Optimization
- Parallel Computing
- Physics
- Real-Time
- Scilab development
- Przetwarzanie sygnałów
- Windows Tools
- Xcos

Arduino

Translate blocks interfaces and error messages

- * Translate demos

CHANGES 1.5 => 1.6.2

=====

BUGS FIXED

- * toolbox_arduino_v4.ino file shipped in the module was bad. Replaced with the right file.
- * ARDUINO_pre_simulate() was expecting arduino_v3.ino instead of arduino_v4.ino and yielded an error 'Il faut charger avec le logiciel arduino le sketch toolbox_arduino_v3.ino dans la carte Arduino' when actually dealing with the v.4
- * The DESCRIPTION file that was removed from v.1.4 is actually needed to install the module offline. Restored.
- * Demos: Examples for Scilab 6.0 are displayed with wrong ports positions with Scilab 5.5. The versions for Arduino 1.1 are restored in the binary for the Scilab 5.5.

TODO:

- * Extend the module to Linux users (through the serial toolbox based on TCL)
- * Translate help pages in english
- * Translate blocks interfaces and error messages
- * Translate demos

Zobacz także

- <http://atoms.scilab.org/toolboxes/arduino/1.8>
- <http://www.scilab-enterprises.com/>

Data wydania

2020-02-16

Wielkość pliku pobranego

1.7 MB

☒ Autoload

Zainstaluj

Usuń

Powrót

Scilab 6.1.0 Console

Plik Edycja Sterowanie Narzędzia ?

Przeglądarka plików

C:\Users\E419_1

Nazwa

- Documents
- ..
- Arduino
- ArduinoData
- Downloads
- Inventor
- MATLAB

SciNotes

Xcos

Translator Matlab do Scilab

ATOMS - menadżer modułów zewn.

Przeglądarka zmiennych

Historia poleceń

Przeglądarka plików

Matlab

<https://www.pollub.pl/pl/uczelnia/organizacja-uczelni/jednostki-ogolnouczelniane/ci/matlab>

Does your school have a MATLAB? | History | Lublin University of Technology

https://www.mathworks.com/academia/tah-support-program/ Szukaj

AstroCenter - AstroPri... Setup

MathWorks® Get MATLAB

Academia

Campus-Wide License

See if your school has a MATLAB campus license

The Campus-Wide License offers an effective way for students, faculty, and researchers to get access to a comprehensive set of MATLAB and Simulink products. To find out if your school is covered under a Campus-Wide License, complete the form below.

* Indicates required information

Information

* University

Lublin University of Technology

Enter the official name.

* Email

Adres e-mail z domeny @pollub.edu.pl

Use your official university email address, which is required for license verification.

Submit

United States

Patents | Trademarks | Privacy Policy | Preventing Piracy | Application Status

© 1994-2020 The MathWorks, Inc.

Join the conversation

Licencja czasowa, odnawiana co trzy lata.

**R2020b**

Advanced Options ▾



LICENSING

DESTINATION

PRODUCTS

OPTIONS

CONFIRMATION

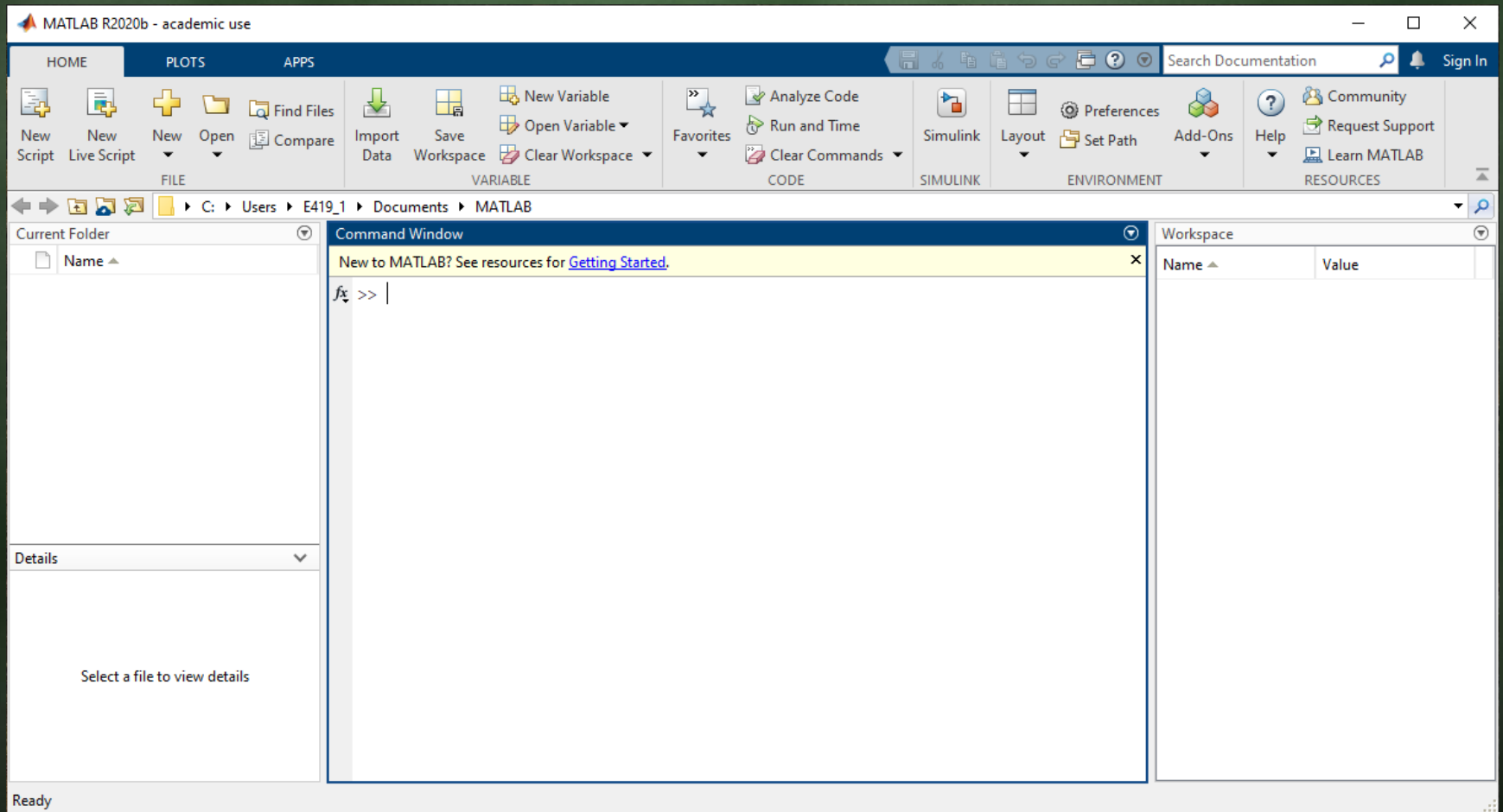
Select products (recommended products are preselected)

☐	Select All
☒	MATLAB
☒	Simulink
☐	5G Toolbox
☐	Aerospace Blockset
☐	Aerospace Toolbox
☐	Antenna Toolbox
☐	Audio Toolbox
☐	Automated Driving Toolbox
☐	AUTOSAR Blockset
☐	Bioinformatics Toolbox
☐	Communications Toolbox

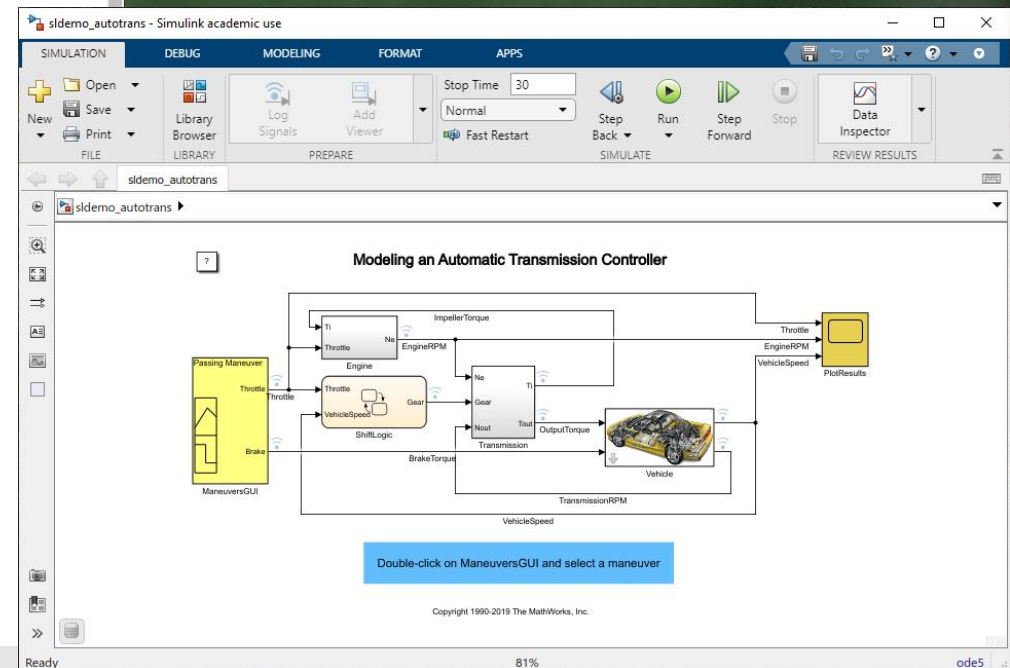
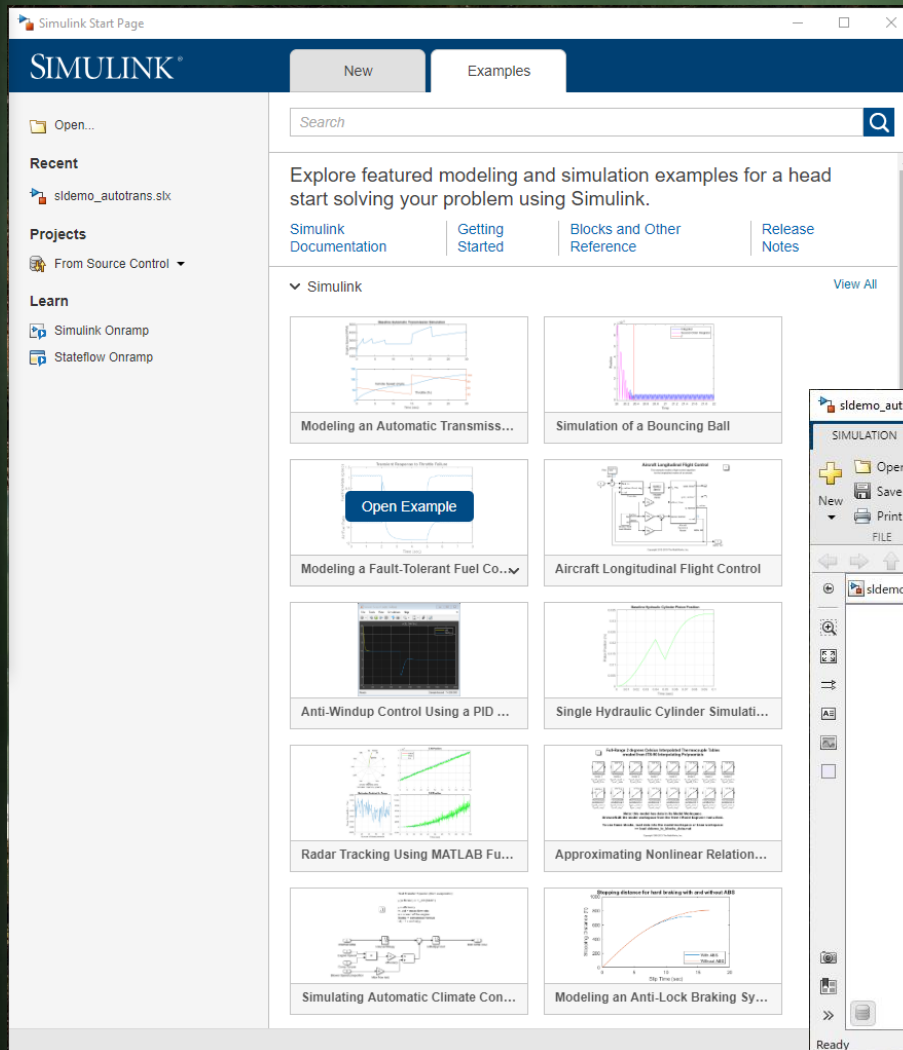
Next

Matlab

15:20



Matlab - Simulink



Metody numeryczne

- Metody rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach.
- Otrzymywane tą drogą wyniki są na ogół przybliżone, jednak dokładność obliczeń może być **z góry określona i dobiera się ją zależnie od potrzeb.**
- Metody numeryczne wykorzystywane są wówczas, gdy badany problem **nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego** (danego równaniem) lub korzystanie z takich rozwiązań jest **uciążliwe** ze względu na ich złożoność.

Zastosowanie

- całkowania
- znajdowania miejsc zerowych wielomianów stopnia większego niż 2 (**korzystanie ze wzorów na dokładne wartości pierwiastków równań stopnia 3 i stopnia 4 jest niepraktyczne, dla równań stopnia wyższego niż 4 wzorów już nie ma**)
- rozwiązywania układów równań liniowych dla większej liczby równań i niewiadomych
- rozwiązywania równań różniczkowych i układów takich równań
- znajdowania wartości i wektorów własnych
- aproksymacji i interpolacja

Znaczenie analizy numerycznej

Właściwie dobrane i zastosowane metody numeryczne umożliwiają symulację zjawisk rzeczywistych.

Katastrofa rakiety Ariane 5
500 milionów \$ (4.06.1996)

Błędna konwersja 64-bit
liczby zmiennoprzecinkowej
na 16-bit liczbę całkowitą

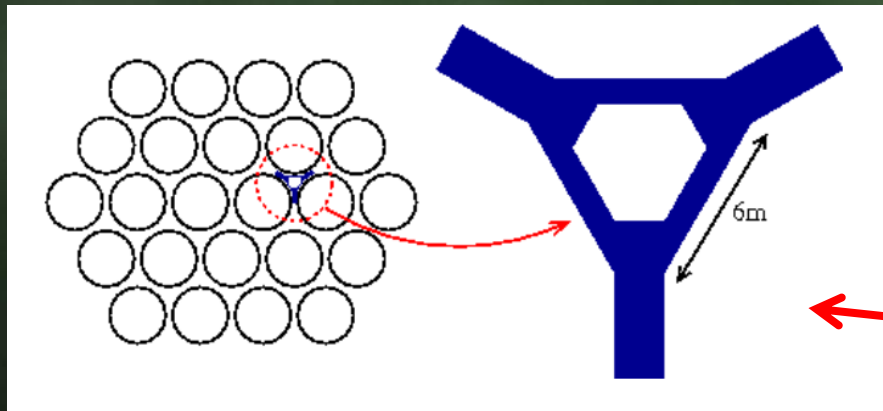


Znaczenie analizy numerycznej

Zatonięcie platformy wiertniczej Sleipner A na Morzu Północnym (23.08.1991)

Koszt – 1 miliard \$

Przyczyna: Niedokładność zamodelowania elementu konstrukcji za pomocą metody elementów skończonych.



Znaczenie analizy numerycznej

Tragedia w Dhahran w Arabii
Saudyjskiej

21.02.1991 – zginęło 28 osób

Błąd w pomiarze czasu (w momencie
wyststrzału wynosił $1/3$ s) spowodował
błąd w pozycjonowaniu celu o 687 m.

Gotowa poprawka systemu dotarła dzień
po tragedii.



Znaczenie analizy numerycznej

NASA Mars Climate Orbiter

23.09.1999 uległ zniszczeniu w atmosferze Marsa MCO, 700 milionów \$

Przyczyna: błąd w oprogramowaniu komunikacyjnym między napędami MCU spowodowany stosowaniem innym jednostek metrycznych przez NASA i firmę brytyjską która napisała oprogramowanie.



Pojęcia podstawowe

Analiza numeryczna – tworzenie, badanie i analiza algorytmów, w celu otrzymania rozwiązania numerycznego różnorodnych zadań matematycznych

Metody numeryczne – tworzenie i badanie algorytmów (procedur) obliczeniowych umożliwiających przeprowadzenie analizy numerycznej

Pojęcia podstawowe

Rozwiązanie analityczne danego zadania może być odmienne od jego rozwiązania numerycznego.

Rozwiązanie analityczne przy adaptacji bezpośredniej do algorytmu numerycznego może być wolno zbieżne, długotrwałe w obliczeniach, a więc kłopotliwe lub bezużyteczne w analizie numerycznej.

Pojęcia podstawowe

Metody numeryczne stosuje się gdy stawiany problem nie posiada rozwiązania analitycznego (określonego wzorem) lub stosowanie takich wzorów jest kłopotliwe ze względu na ich złożoność.

Pojęcia podstawowe

Obliczenia numeryczne

Obliczenia wykonywane są bezpośrednio na liczbach

Obliczenia symboliczne

Przekształcenia zgodne z regułami matematycznymi wykonywane są na symbolach reprezentujących liczby

$$\frac{(35.3)^2 - 1}{35.3 + 1} = 34.3$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

Pojęcia podstawowe

Rozwiązanie analityczne

Dokładny wynik numeryczny lub symboliczny
(z wykorzystaniem symboli i funkcji matematycznych)

Rozwiązanie numeryczne

Wynik w postaci numerycznej, z określoną
dokładnością

$$\frac{1}{4} \longrightarrow 0.25$$

$$\pi \longrightarrow 3.14159 \dots$$

$$\frac{2}{3} \longrightarrow 0.66667 \dots \quad \text{tg}(36) \longrightarrow 7.75047 \dots$$

Obliczenia

Algorytm obliczeniowy zazwyczaj umożliwia wyznaczenie poszukiwanej wartości z określoną dokładnością δ

Obliczanie pierwiastka kwadratowego metodą Babilońską

$$a = \sqrt{X}$$

$$a_n = \frac{\left(a_{n-1} - \frac{X}{a_{n-1}}\right)}{2}$$

$$\delta \leq |X - a_n^2|$$

Przykład

```

1 clear; clc; clf;
1 function w = pierwiastek(x, c)
2 .....
3 endfunction
5 disp('Program wyznacza wartość pierwiastka kwadratowego z liczby');
6 nazwa = ['1'];
7 kolor = [1];
8 wyniki = [0];
9 for i=1:5
10     X = input('X=');
11     wynik(i) = sqrt(X);
12     nazwa(i) = sprintf('sqrt(%d)', X);
13     kolor(i) = randi(4);
14 end
15 legend(nazwa);
16 disp(nazwa);

```

Scilab 2

"Pr

X=15

X=35

X=156

X=24

X=36

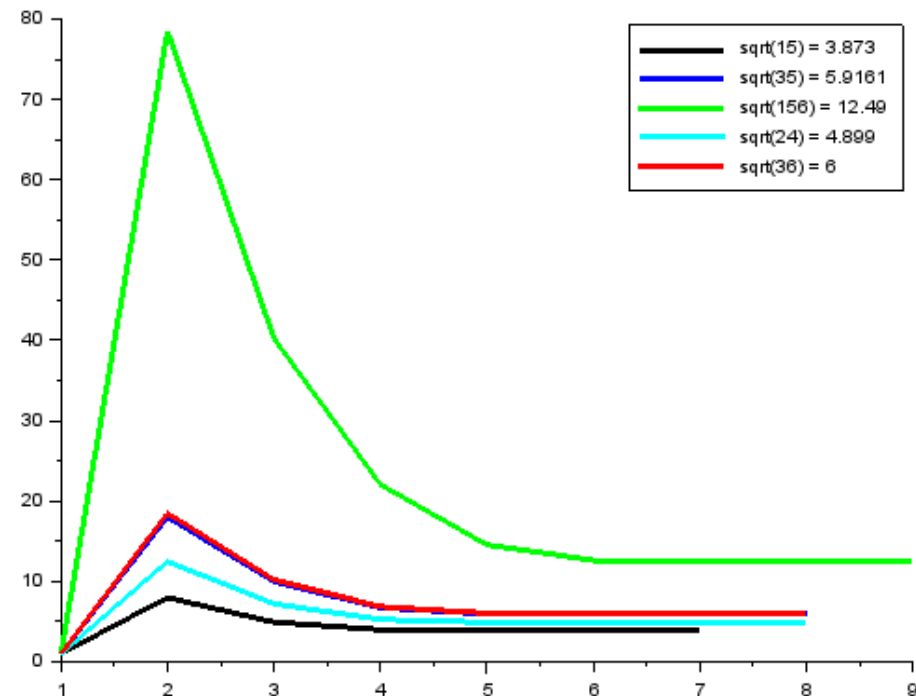
"sq

"sq

"sq

"sq

"sq

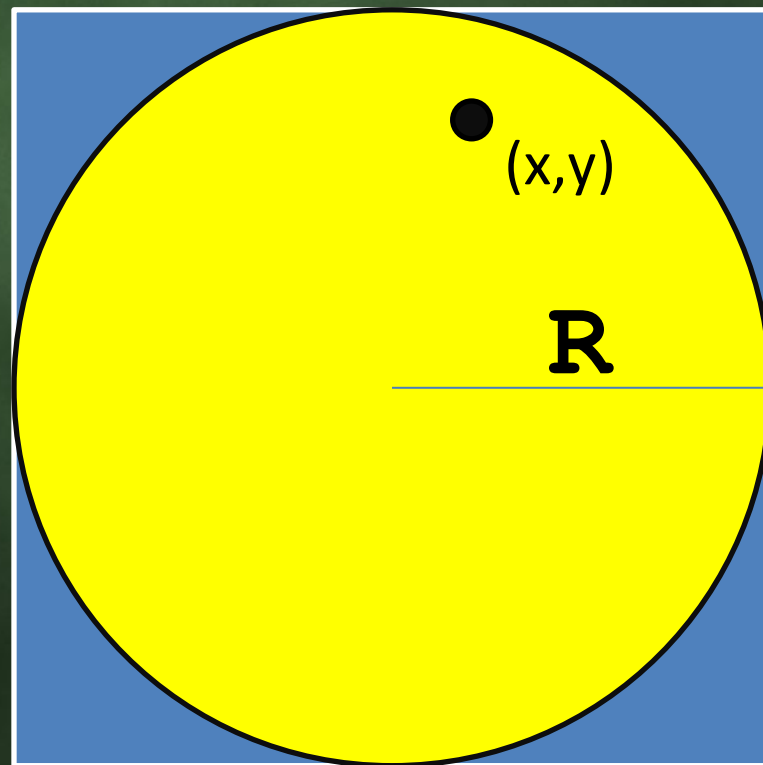


Wyznaczanie liczby π

$$\frac{N_o}{N_{\blacksquare}} \approx \frac{\pi R^2}{4R^2}$$

$$\pi \approx 4 \frac{N_o}{N_{\blacksquare}}$$

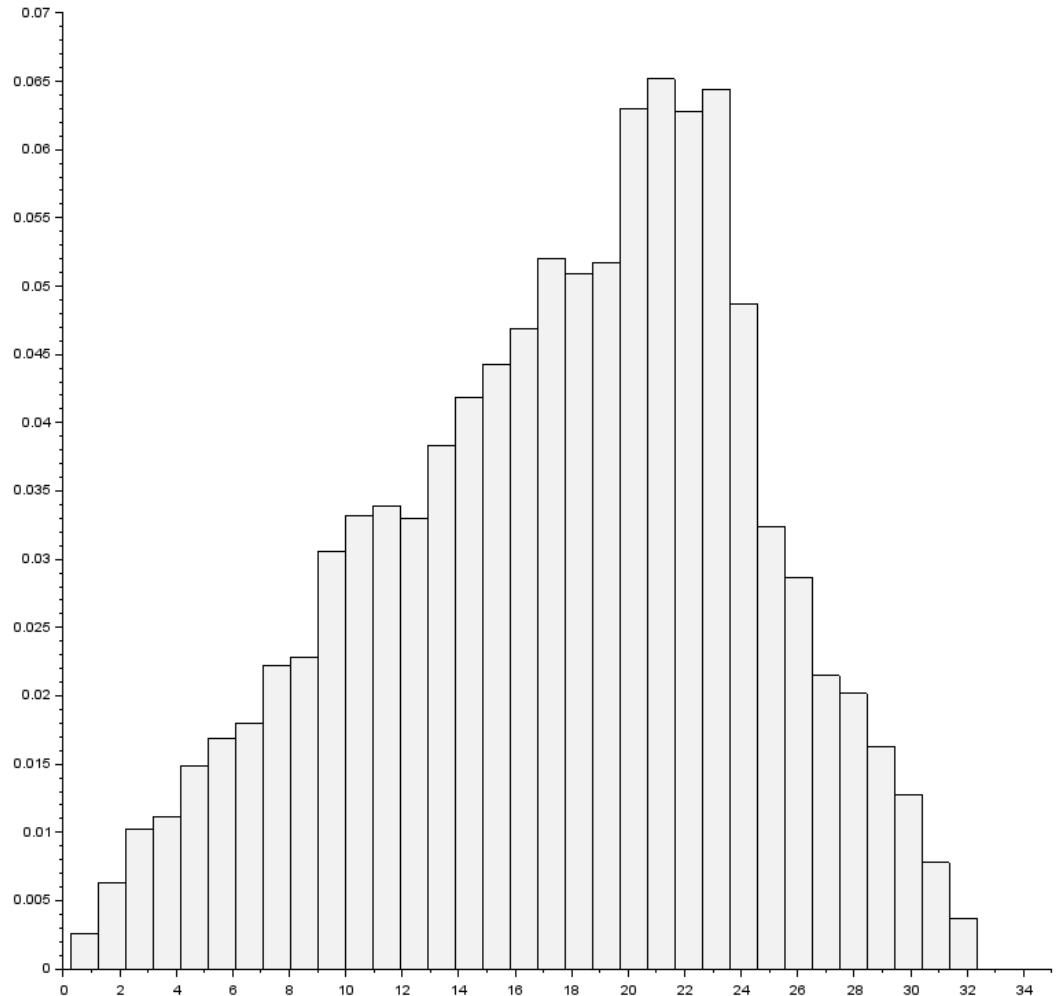
$$(x^2 + y^2) \leq R^2$$



```

1 clear; clc; clf;
2 format('v',6);
3 t=0;
4 N=5555;
5 R=23;
6 rand("uniform")
7 for i=1:N
8     x=-R+rand()*2*R;
9     y=-R+rand()*2*R;
10    xi(i)=x;
11    yi(i)=y;
12    ri(i)=sqrt(x^2+y^2);
13    if ri(i)<=R then
14        t=t+1;
15    end
16 end
17 pi=(4*t)/N;
18 subplot(1,2,1);
19 mprintf('Liczba pi= %1.6f',pi);
20 plot2d(xi,yi,style=-5);
21 z=-R:0.01:R;
22 plot2d(z,sqrt(R^2-z^2),5)
23 e=gce();
24 e.children.thickness=-3;
25 plot2d(z,-sqrt(R^2-z^2),5)
26 e=gce();
27 e.children.thickness=-3;
28 title('N=' + string(N) + ', R=' + string(R) + ', Liczba PI=' + string(pi));
29 subplot(1,2,2);
30 histplot(ceil(R*sqrt(2)),ri);

```



Pojęcia podstawowe

Wzór Taylora

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w przedziale $[a,b]$ pochodną rzędu $n-1$ oraz pochodną rzędu n w przedziale (a,b) wówczas istnieje $c \in (a,b)$, takie że

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(c) (x - c)^k + E_n(x)$$

Pojęcia podstawowe

Dla pewnego punktu α zawartego w przedziale (c, x) można określić :

$$E_n(x) = \frac{(x - c)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\alpha)$$

zwaną resztą **Lagrange'a** wzoru **Taylora**

Definiuje ona dokładność otrzymanego przybliżenia

Pojęcia podstawowe

Szczególny przypadek wzoru Taylora dla $c=0$ określany jest wzorem Maclaurina

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + E_n(x)$$

$$E_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha)$$

Pojęcia podstawowe

Pochodne

$$(a)' = 0 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a), a > 0 \quad (\sin(x))' = \cos(x)$$

$$\cos(x)' = -\sin(x) \quad (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Pojęcia podstawowe

Szereg Taylora

Na podstawie wzoru Taylora
wyprowadza się szereg wielomianowy
Taylora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$
$$= f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots$$

Pojęcia podstawowe

Szereg Taylora

1. im wyższy jest jego stopień, tym lepiej (zwykle) aproksymuje funkcję,
2. twierdzenie Taylora, daje informację o błędzie aproksymacji (reszta),
3. wielomiany to funkcje elementarne, które bardzo łatwo wyznaczać numerycznie - z tego względu szereg kalkulatorów (czy programów / języków programowania) implementuje funkcje takie jak $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , itp. poprzez odpowiednie wielomiany Taylora,

Pojęcia podstawowe

Szereg Taylora

4. wielomiany z łatwością poddają się różniczkowaniu i całkowaniu,
5. wielomiany można zapisać w postaci iloczynowej, ułatwiając rozwiązywanie szeregu równań i nierówności,
6. wielomiany są określone na całej prostej rzeczywistej (zespólonej), co umożliwia analityczne "przedłużanie" wartości funkcji na dziedzinę, w której wyjściowa funkcja jest nieokreślona.

Pojęcia podstawowe

Szereg Maclaurina

Dla $x_0=0$ szereg Taylora przyjmuje postać:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$
$$= f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

Przykład 1

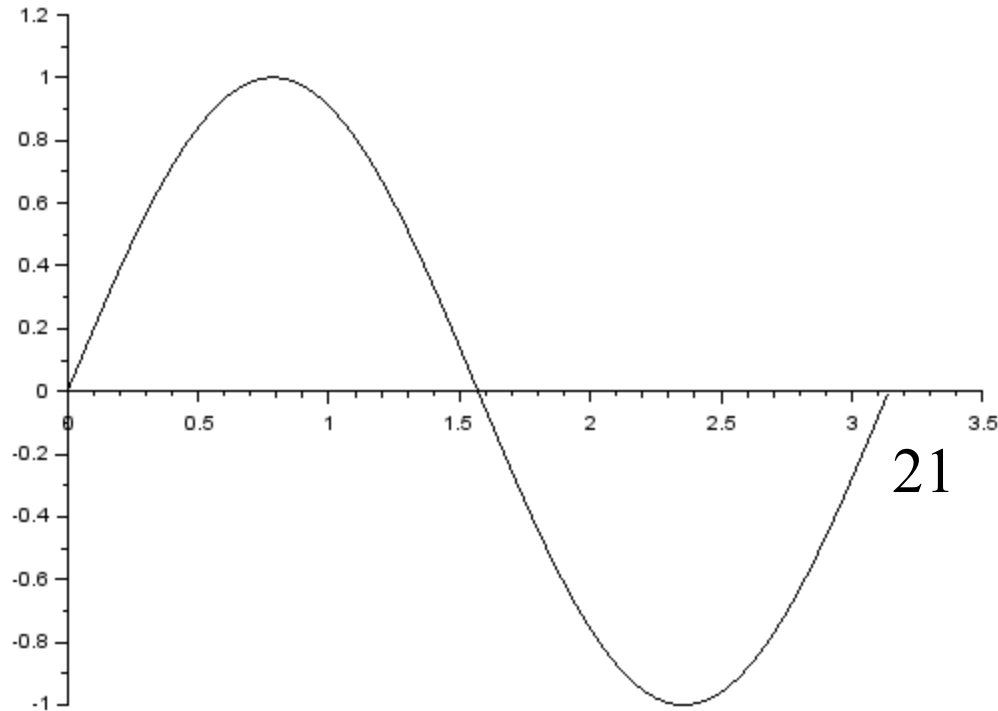
Rozwinięcie w szereg Maclaurina

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

n – przyjmuje tylko wartości z szeregu
2k+1

(1, 3, 5, 7, ..., 2k+1)

Przykład 1



Stopnie przybliżenia:

$$n=2k+1=1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$$

Pojęcia podstawowe

Rozwinięcia w szereg Taylora podstawowych funkcji matematycznych

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sqrt{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)(n!)^2 4^n} x^n, |x| < 1$$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}, |x| \leq 1$$

Przykład 2

Za pomocą wzoru Taylora można wyznaczać przybliżone wartości funkcji.

$$\sqrt{x} = \sum_{k=0}^n \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$\sqrt{10}$, można wyznaczyć dla $x_0=9$

$$\sqrt{10} = \sum_{k=0}^n \frac{(10 - 9)^k}{k!} (\sqrt{9})^{(k)} = \sum_{k=0}^n \frac{(\sqrt{9})^{(k)}}{k!}$$

Przykład 2

Kolejne iteracje rozwinięcia:

$$k = 0 \rightarrow \sqrt{9} \qquad k = 1 \rightarrow \frac{(\sqrt{9})^{(1)}}{1!} = \frac{1}{2\sqrt{9}}$$

$$k = 2 \rightarrow \frac{(\sqrt{9})^{(2)}}{2!} = -\frac{1}{8\sqrt{9}^3}$$

$$k = 3 \rightarrow \frac{(\sqrt{9})^{(3)}}{3!} = \frac{3}{48\sqrt{9}^5}$$

$$k = 4 \rightarrow \frac{(\sqrt{9})^{(4)}}{4!} = -\frac{15}{384\sqrt{9}^7}$$

Przykład 2

Wynika ostateczny

$$\sqrt{10} = \sqrt{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{3}{11664} - \frac{15}{7558272}$$

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888} - \frac{5}{2519424}$$

$$\sqrt{10} = \underline{3,162292254}$$

Pojęcia podstawowe

Inny warianty wzoru Taylora można osiągnąć zamieniając **x** na **x+h** i **c** na **x**

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^k(x) + E_n(h)$$

$$E_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\alpha)$$

Punkt **α** leży pomiędzy **x** i **x+h**

Przykład 3

W oparciu o przedstawiony wariant wzoru Taylora można obliczyć przybliżoną wartość funkcji dla wartości rzeczywistej.

Obliczyć $\sqrt{134.65}$

Najbliższym znanym całkowitym rozwiązaniem pierwiastka dającym wynik całkowity jest $\sqrt{144} = 12$

Przykład 3

$$\sqrt{144 - 9.35} = \sum_{k=0}^n \frac{(-9.35)^k}{k!} (\sqrt{144})^{(k)}$$

$$12 + \frac{(-9.35)}{2\sqrt{144}} - \frac{(-9.35)^2}{2! 4(\sqrt{144})^3} + \frac{3(-9.35)^3}{3! 8(\sqrt{144})^5}$$

$$12 - 0.38958 - 0.006324 - 0.00021$$

$$\sqrt{144 - 9.35} = 11.60389$$

$$\sqrt{134.65} = 11.60388$$

Pojęcia podstawowe

W obliczeniach numerycznych często zamiast ostatecznego wyniku otrzymuje się ciąg przybliżonych rozwiązań, zazwyczaj coraz dokładniejszych.

Rozwiązanie określamy wtedy jako:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L,$$

a wynik określamy w sytuacji gdy :

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

Pojęcia podstawowe

Rozwiązania obliczeń numerycznych posiadają zazwyczaj więc rozwiązanie w postaci ciągu zbieżnego.

Poszukiwane rozwiązanie może być zbieżne:

1. liniowo
2. nadliniowo
3. kwadratowa
4. rzędu α

Pojęcia podstawowe

Zbieżność liniowa

Jeżeli istnieje stała $c < 1$ i liczba całkowita N takie że:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c |x_n - x^*| \quad (n \geq N)$$

gdzie, x^* jest wartością (rzeczywistą) do jakiej zbieżny jest ciąg rozwiązań.

Pojęcia podstawowe

Zbieżność nadliniowa

Jeżeli istnieje ciąg ε_n zbieżny do zera i liczba całkowita N takie że:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \varepsilon_n |x_n - x^*| \quad (n \geq N)$$

gdzie, x^* jest wartością (rzeczywistą) do jakiej zbieżny jest ciąg rozwiązań.

Pojęcia podstawowe

Zbieżność kwadratowa

Jeżeli istnieją stała $C > 0$ i liczba całkowita N takie że:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2 \quad (n \geq N)$$

gdzie, x^* jest wartością (rzeczywistą) do jakiej zbieżny jest ciąg rozwiązań.

Pojęcia podstawowe

Zbieżność rzędu α

Jeżeli istnieją stała $C > 0$, stała $\alpha > 1$ oraz liczba całkowita N takie że:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^\alpha \quad (n \geq N)$$

gdzie, x^* jest wartością (rzeczywistą) do jakiej zbieżny jest ciąg rozwiązań.

Dla α wynoszących:

$1 < \alpha < 2$ – superliniowa

$\alpha = 3$ – kubiczna

Pojęcia podstawowe

Równania różnicowe

Pod pojęciem równania różnicowego rozumiemy związek pomiędzy kilkoma elementami ciągu rekurencyjnego, natomiast jego rozwiązaniem jest **n**-ty wyraz tego ciągu.

Ciągiem rekurencyjnym określamy taki ciąg którego każdy kolejny wyraz zdefiniowany jest poprzez odwołanie do poprzednich .

Przykład 4

W chwili $t=0$ pewna populacja liczy $P(0)$. Roczny wskaźnik urodzeń wynosi b , a współczynnik umieralności d . Zapisać równanie różnicowe opisujące przyrost populacji.

Jeżeli dla n -tego roku stan populacji wynosi $P(n)$ to:

$$\begin{aligned} P(n+1) &= P(n) + b \cdot P(n) - d \cdot P(n) = \\ &= P(n)(1 + b - d) \end{aligned}$$

Przykład 4

Dążąc do postaci ogólnej ciągu $P(n)$
wprowadzamy oznaczenie $r=b-d$

$$P(n+1) = P(n)(1+r)$$

$$P(n+2) = P(n+1)(1+r) =$$

$$P(n)(1+r)(1+r) = P(n)(1+r)^2$$

Można więc zaproponować postać
ogólną równania różnicowego:

$$P(n) = A(1+r)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Przykład 4

Na podstawie warunku początkowego dla $n=0$, $P(n)=P(0)$ można wyznaczyć wartość stałej A :

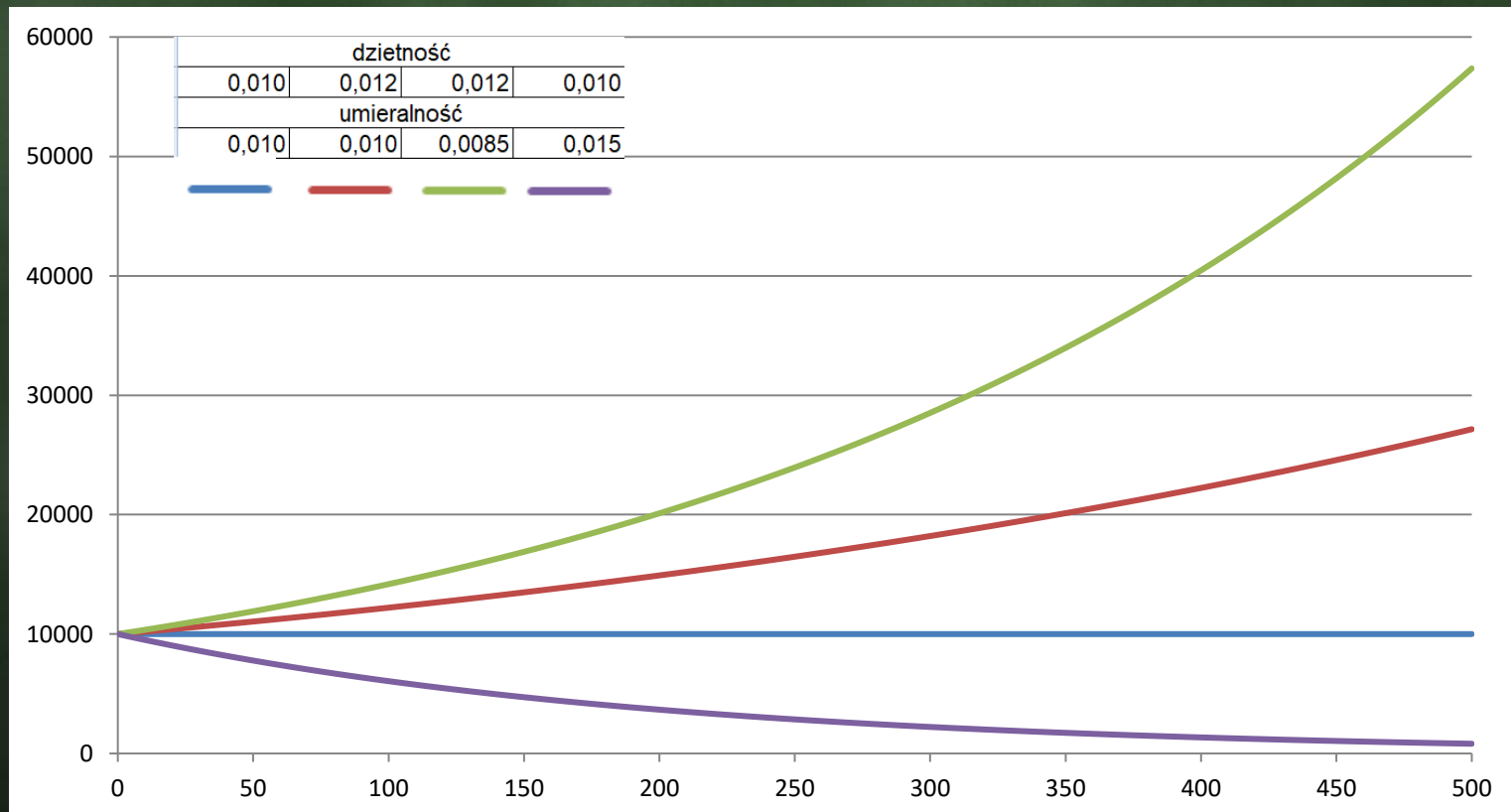
$$P(0) = A(1 + r)^0 = A$$

Równanie różnicowe dla postawionego problemu przyjmie więc postać:

$$P(n) = P(0)(1 + r)^n$$

Przykład 4

Dla $P(0)=10\ 000$ oraz dzietnością i umieralnością opisanymi w tabeli można wykreślić rodzinę krzywych wzrostu populacji.



Arytmetyka zmiennopozycyjna

- Systemy komputerowe pracują w oparciu o system dwójkowy.
- Ze względu na to że w powszechnym użyciu stosujemy system dziesiętny w systemach komputerowych następuje konwersja pomiędzy tymi systemami,
 - na wejściu
 - na wyjściu danych.
- Z tego względu mogą pojawić się błędy z tym związane.

Arytmetyka zmiennopozycyjna

W systemie dziesiętnym każda liczba rzeczywista zapisywana jest w postaci ciągu, wraz z odpowiednim znakiem (+/-):

$$23.679 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$$

W układzie dwójkowym stosuje się tylko cyfry 0 i 1

$$\begin{aligned}(1001.11101)_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + \\ &1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = \\ &= (9.90625)_{10}\end{aligned}$$

Arytmetyka zmiennopozycyjna

Pozostałe stosowane systemy liczbowe:

1. Ósemkowy – N_8 – cyfry 0 – 7
2. Szesnastkowym – N_{16} – cyfry 0 – 9 i litery A – F

Można w zależności od potrzeb zbudować dowolny system liczbowy którego postać ogólna N_β w oparciu o zakres liczbowy 0 – $(\beta-1)$ i podstawie $\beta > 1$

Arytmetyka zmiennopozycyjna

Systemy komputerowe z racji swoich ograniczeń nie potrafią operować na nieskończonych rozwinięciach liczb w systemie binarnym.

$$\frac{1}{10} = (0.0\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ \dots)_2$$

Przy konwersji na system 10 z dokładnością do 40 cyfr dziesiętnych otrzymamy:

0.10000 00014 90116 11938 47656 25000 00000 00000

Zaokrąglenia

Zaokrąglanie jest istotnym zagadnieniem obliczeń naukowych

Podstawowy system zaokrąglania do n -tej cyfry:

- Jeżeli cyfra $n+1$ ma wartość 0, 1, 2, 3, 4 to n cyfra pozostaje bez zmiany
- Jeżeli cyfra $n+1$ ma wartość 5, 6, 7, 8, 9 to wartość n -tej cyfry zostaje zwiększona o 1
- Jeżeli cyfra $n+1$ ma wartość 5, to czasami zwiększenie o 1 realizuje się tylko w sytuacji gdy zwiększenie n -tej liczby da w wyniku liczbę parzystą

Zaokrąglenia

Zaokrąglenie liczby siedmiocyfrowej
do liczby czterocyfrowej:

0.1783**4**98 $\longrightarrow$ 0.1783

0.9999**5**00 $\longrightarrow$ 1.0000

0.4321**4**09 $\longrightarrow$ 0.4321

0.5767**5**23 $\longrightarrow$ 0.5768

0.5768**5**23 $\longrightarrow$ 0.5768

Liczby zmiennopozycyjne

W systemie **dziesiętnym** każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci zmiennopozycyjnej (zmiennoprzecinkowej):

$$x = \pm r \times 10^n$$

gdzie $r \in [1,10]$ (lub czasami $r \in [0.1,1]$), a n jest liczbą całkowitą $+$, $-$ lub 0 .

Jeżeli $x=0$ to $r=0$, a n przyjmuje wartość dowolną.

Liczby zmiennopozycyjne

W systemie **binarnym** zmiennopozycyjna postać liczby ($x \neq 0$) zapisana jest analogicznie jak w systemie dziesiętnym:

$$x = (-1)^z m \times 2^c$$

gdzie $m \in [1, 2]$ (lub czasami $q \in [0.5, 1]$), a c jest liczbą całkowitą. Przyjmuje się, że mantysa m i cecha c są wyrażone w układzie dwójkowym, z jest bitem znaku.

Liczby w systemach komputerowych opisane są jak wyżej, z ograniczeniami wartości m i c wynikającymi z długości słowa

Liczby zmiennopozycyjne

Zgodnie ze standardem IEEE (Nr. 754 z 1985 r.)
liczba zmiennopozycyjna binarna składa się:

Format zapisu zmiennopozycyjnego IEEE 754			
32 bity Pojedyncza precyzja	(1 bit) b_{31}	(8 bitów) (BIAS=127) $b_{30} \dots b_{23}$	(23 bitów) $b_{22} \dots b_0$
64 bity Podwójna precyzja	(1 bit) b_{63}	(11 bitów) (BIAS=1023) $b_{62} \dots b_{52}$	(52 bitów) $b_{51} \dots b_0$
Opis pól bitowych	Bit znaku z	Bity kodu cechy c	Bity ułamkowe mantysy m

Liczby w tej postaci określa się często jako
liczby maszynowe

Liczby zmiennopozycyjne

Dla systemu 32 bitowego możliwe jest zapamiętanie liczb z przedziału:

$$2^{-126} \rightarrow (2 - 2^{-23})2^{127}$$

$$1.2 \times 10^{-38} \rightarrow 3.4 \times 10^{38}$$

Dla liczb dodatnich i ujemnych

Liczby zmiennopozycyjne

Przyjmuje się, że cecha **c** może przyjmować wartości całkowite z zakresu $[-126, 127]$, stąd $(c+127) \in [1, 254]$. Na 8 bitach można zapisać liczby z zakresu $[0, 255]$.

$$0 \rightarrow (00\ 000\ 000)_2$$

$$255 \rightarrow (11\ 111\ 111)_2$$

Liczby zmiennopozycyjne

Mantysa liczby różnej od zera ma z definicji część całkowitą równą 1, z tego względu zapamiętuje się tylko część ułamkową:

1 → 00 000 000 000 000 000 000 000 000

$2 \cdot 2^{-23}$ → 11 111 111 111 111 111 111 111

Przykład 1

Przeliczanie liczby 125.5 z systemu dziesiętnego na binarny zmiennopozycyjny.

1. Wyznaczenie cechy **c** i mantysy **m** (dziesiętny)
2. Konwersja cechy **c** na system binarny
3. Konwersja mantysy **m** w na system binarny
4. Zapisanie liczby w postaci binarnej zmiennopozycyjnej

Przykład 1

Wyznaczanie cechy i mantysy

$$125.5 \times 2^0$$

Mantysa $m = 0.9609375$

$$62.75 \times 2^1$$

Cecha $c = 5 + 127 = 132$

$$31.375 \times 2^2$$

Bit znaku $z = 0$

$$15.6875 \times 2^3$$

$$7.84375 \times 2^4$$

$$1.9609375 \times 2^5$$

Przykład 1

Konwersja mantysy realizowana jest poprzez mnożenie części ułamkowej liczby przez 2. Jeżeli wynik jest większy od zera składnik mantysy ustawiamy na 1, jeżeli mniejszy od jedynki ustawiamy 0.

Przykład 1

Określanie binarnej postaci mantysy

1. $0.9609375 \times 2 = 1,921875 \rightarrow 1$
2. $0.921875 \times 2 = 1,84375 \rightarrow 1$
3. $0.84375 \times 2 = 1,6875 \rightarrow 1$
4. $0.6875 \times 2 = 1,375 \rightarrow 1$
5. $0.375 \times 2 = 0.75 \rightarrow 0$
6. $0.75 \times 2 = 1,5 \rightarrow 1$
7. $0.5 \times 2 = 1,0 \rightarrow 1$
8. $0 \times 2 = 0 \rightarrow 0$

Przykład 1

Określanie binarnej postaci cechy

$$132 \text{ div } 2 = 66; \quad 132 \text{ mod } 2 = 0 \quad \rightarrow 0$$

$$66 \text{ div } 2 = 33; \quad 66 \text{ mod } 2 = 0 \quad \rightarrow 0$$

$$33 \text{ div } 2 = 16; \quad 33 \text{ mod } 2 = 1 \quad \rightarrow 1$$

$$16 \text{ div } 2 = 8; \quad 16 \text{ mod } 2 = 0 \quad \rightarrow 0$$

$$8 \text{ div } 2 = 4; \quad 8 \text{ mod } 2 = 0 \quad \rightarrow 0$$

$$4 \text{ div } 2 = 2; \quad 4 \text{ mod } 2 = 0 \quad \rightarrow 0$$

$$2 \text{ div } 2 = 1; \quad 2 \text{ mod } 2 = 0 \quad \rightarrow 0$$

$$1 \text{ div } 2 = 0; \quad 1 \text{ mod } 2 = 1 \quad \rightarrow 1$$

$$c = 10000100$$

Przykład 1

Ostateczna liczba 125.5 ma postać
binarną zmiennopozycyjną 32 bit:

125.5=

0 10000100 111101100000000000000000

Przykład 2

Przeprowadzić konwersję liczby binarnej zmiennopozycyjnej na postać dziesiętną.

1 10001100 100111100100101000000000

z=1

c=10001100

m=100111100100101000000000

Przykład 2

Po identyfikacji elementów, mantysy, cechu i bitu znaku, należy przeprowadzić konwersję z postaci binarnej na dziesiętną mantysy i cechy. Należy pamiętać że mantysa przechowuje informację o części ułamkowej i należy po konwersji dodać do niej 1, natomiast od wyznaczonej wartości cechy należy odjąć 127.

Przykład 2

Przeliczanie cechy $c=10001100$

$$c=2^2+2^3+2^7-127=4+8+128-127=13$$

Przeliczanie mantysy

$m=10011100100101$

$$m=1+2^{-1}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-7}+2^{-10}+2^{-13}+2^{-15}$$

$$=1,618316650390625$$

Przykład 3

Liczba binarna zmiennopozycyjna:

1 10001100 100111100100101000000000

po konwersji wynosi:

$$(-1)^z \times m \times 2^c =$$

$$=(-1)^1 \times 1,618316650390625 \times 2^{13} =$$

$$=-13257.25$$

Liczby zmiennopozycyjne

Nie każdą liczbę da się przedstawić w postaci zmiennopozycyjnej bitowej o skończonym rozwinięciu jak w przykładach wcześniejszych. W efekcie nie da się zapisać liczby w sposób dokładny. Powoduje to że zapis na możliwie bliska liczbę maszynową jest obarczony błędem.

W przypadku postaci 32 bitowej mamy 23 bity mantysy, natomiast 64 bitowej liczba bitów mantysy wynosi 52.

Przykład 3

Przeprowadzić konwersję liczby **0.01** do postaci zmiennopozycyjnej binarnej.

Bit znaku **$z=0$** **$c=-7+127=120$** **$m=0.28$**

$$0,01 * 2^0 = 0,01$$

$$0,02 * 2^{-1} = 0,01$$

$$0,04 * 2^{-2} = 0,01$$

$$0,08 * 2^{-3} = 0,01$$

$$0,16 * 2^{-4} = 0,01$$

$$0,32 * 2^{-5} = 0,01$$

$$0,64 * 2^{-6} = 0,01$$

$$1,28 * 2^{-7} = 0,01$$

Przykład 3

15:21

c			
1	120	60	0
2	60	30	0
3	30	15	0
4	15	7,5	1
5	7	3,5	1
6	3	1,5	1
7	1	0,5	1
8	0	0	0

c = 01111000

m			
1	0,28	0,56	0
2	0,56	1,12	1
3	0,12	0,24	0
4	0,24	0,48	0
5	0,48	0,96	0
6	0,96	1,92	1
7	0,92	1,84	1
8	0,84	1,68	1
9	0,68	1,36	1
10	0,36	0,72	0
11	0,72	1,44	1
12	0,44	0,88	0
13	0,88	1,76	1
14	0,76	1,52	1
15	0,52	1,04	1

29	0,68	1,36	1
30	0,36	0,72	0
31	0,72	1,44	1
32	0,4400001	0,88	0
33	0,8800001	1,76	1
34	0,7600002	1,52	1
35	0,5200005	1,040001	1
36	0,0400009	0,080002	0
37	0,0800018	0,160004	0
38	0,1600037	0,320007	0
39	0,3200073	0,640015	0
40	0,6400146	1,280029	1
41	0,2800293	0,560059	0
42	0,5600586	1,120117	1

15:21

m=01000111101011100001010

19	0,32	0,64	0
20	0,64	1,28	1
21	0,28	0,56	0
22	0,56	1,12	1
23	0,12	0,24	0
24	0,24	0,48	0
25	0,48	0,96	0
26	0,96	1,92	1
27	0,92	1,84	1
28	0,84	1,68	1

43	0,4804088	0,960938	0
46	0,9609375	1,921875	1
47	0,921875	1,84375	1
48	0,84375	1,6875	1
49	0,6875	1,375	1
50	0,375	0,75	0
51	0,75	1,5	1
52	0,5	1	1
53	0	0	0

Przykład 3

0.01=

0 01111000 01000111101011100001010

W celu określenia błędu konwersji należy przeliczyć liczbę zmiennopozycyjną na postać dziesiętną.

$$m = 1 + 2^{-2} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-11} + 2^{-13} + 2^{-14} + 2^{-15} + 2^{-22} + 2^{-22} =$$

$$= 1.2799999971$$

$$0,01 = (-1)^0 \times 1.2799999971 \times 2^{(120-127)}$$

$$= 0.009999999977648258$$

Liczby zmiennopozycyjne

W standardzie IEEE 754 przewidziano także istnienie zera w dwóch post 0^+ i 0^- . Związane są z sytuacją gdy wynik obliczeń posiada cechę mniejszą od -126. Mówi się wtedy o niedomiarze. (bit znaku odpowiednio 0 lub 1, cecha i mantysa same 0)

Analogiczna sytuacja ma miejsce z nieskończonością w dwóch postaciach $+\infty$ i $-\infty$. Stosuje się je wtedy gdy cecha osiąga wartość większą od 127. (bit znaku odpowiednio 0 lub 1, cecha same 1, mantysa same 0)

Dodatkowo przewidziano także konieczność stosowania symbolu NaN (Not a Number) dla sytuacji gdy działanie jest niewykonalne: $0/0$,

$\infty - \infty$, $x + \text{NaN}$. (bit znaku 0 lub 1, cecha same 1, mantysa dowolna poza samymi 0)

Liczby zmiennopozycyjne

Typ	Bit znaku	Cecha	Mantysa	Wartość
0	0	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0000	0.0
0 ₋	1	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0000	-0.0
1	0	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	1.0
-1	1	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	-1.0
Najmniejsza niedomiarowa liczba	*	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0001	$\pm 2^{-23} \times 2^{-126} = \pm 2^{-149} \approx \pm 1.4 \times 10^{-45}$
Średnia niedomiarowa liczba	*	0000 0000	100 0000 0000 0000 0000 0000	$\pm 2^{-1} \times 2^{-126} = \pm 2^{-127} \approx \pm 5.88 \times 10^{-39}$
Największa niedomiarowa liczba	*	0000 0000	111 1111 1111 1111 1111 1111	$\pm (1 - 2^{-23}) \times 2^{-126} \approx \pm 1.18 \times 10^{-38}$
Najmniejsza liczba znormalizowana	*	0000 0001	000 0000 0000 0000 0000 0000	$\pm 2^{-126} \approx \pm 1.18 \times 10^{-38}$
Największa liczba znormalizowana	*	1111 1110	111 1111 1111 1111 1111 1111	$\pm (2 - 2^{-23}) \times 2^{-127} \approx \pm 3.4 \times 10^{38}$
$+\infty$	0	1111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	$+\infty$
$-\infty$	1	1111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	$-\infty$
Wartość nieokreślona	*	1111 1111	Nie same zera	NaN

Liczby zmiennopozycyjne

- Nie każdą liczbę rzeczywistą można przedstawić w postaci maszynowej. W takim wypadku stosując tzw. obcięcie wyznacza się najbliższą jej liczbę maszynową.
- Można zaokrąglić w dół lub w górę.
- Zaokrąglenie w dół powstaje poprzez obcięcie, natomiast zaokrąglenie w górę poprzez zwiększenie ostatniego bitu mantysy.
- Szacując błąd przybliżenia można wybrać dokładniejsze przybliżenie.

Działania na liczbach zmiennopozycyjnych

Działania arytmetyczne (+, -, ×, ÷) wykonywane na maszynach liczących są obarczone błędem wynikającym z dokładności arytmetyki ε , zależną od konstrukcji maszyny liczącej.

Działania wykonane na dwóch liczbach maszynowych obarczone są błędem wynikającym z aproksymacji wyniku obliczeń.

$$fl(x \ominus y) = (x \ominus y)(1 + \delta) \text{ gdzie } |\delta| \leq \varepsilon$$

Utrata cyfr znaczących

Utrata **cyfr znaczących** (ograniczenie cyfr przechowywanych w mantysie) występuje w przy działaniach algebraicznych.

$$x = 0.3721478693 \quad y = 0.3720230572$$

$$x - y = 0.0001248121$$

$$fl(x) = 0.37215 \quad fl(y) = 0.37202$$

$$fl(x) - fl(y) = 0.00013 = 0.13000 \times 10^{-3}$$

$$\left| \frac{(x - y) - (fl(x) - fl(y))}{(x - y)} \right| = \left| \frac{0.0001248121 - 0.00013}{0.00013} \right| \approx 0.04$$

Odejmowanie liczb bliskich

Programując zadania obliczeniowe należy unikać sytuacji w których pojawi się ryzyko odejmowania liczb bliskich.

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - 1$$

$$y = \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

W pierwszym równaniu dla małych **x** zachodzi odejmowanie liczb bliskich i ryzyku utraty cyfr znaczących w wyniku.

Arytmetyka przedziałowa

- Rozwiązaniem problemu utraty cyfr znaczących wydaje się stosowanie arytmetyki przedziałowej.
- Zamiast na liczbach operuje się w niej na przedziałach zawierających dokładne wartości.
- W przypadku idealnym operuje się na bardzo małych przedziałach.
- Ze względu na duże koszty działania oraz problemem rozszerzania się tworzonych przedziałów, metodę tą stosuje się tylko w sytuacjach gdy dokładne informacje o wynikach mają szczególne znaczenie.

Stabilność algorytmów

Algorytm uznawany jest za stabilny wtedy gdy rozwiązanie zadania jakie generuje obarczone jest błędem tego samego rzędu co optymalny poziom błędu rozwiązania danego zadania.

Oznacza to że otrzymywany z algorytmu błąd jest na poziomie błędu wynikającego z przybliżonej reprezentacji danych i wyniku.

Stabilność algorytmów

Algorytmem niestabilnym określić można algorytm numeryczny w którym niewielkie błędy popełniane na jakimś etapie przenoszą się i rosną na kolejnych etapach obliczeń, powodując znaczące zniekształcenie ostatecznego wyniku obliczeń.

Część II

Pojęcia podstawowe

Macierzą rzeczywistą **A** o wymiarach **m** × **n** nazywamy prostokątną tablicę zawierającą elementy rzeczywiste, ustawione w **m** wierszach i **n** kolumnach.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Pojęcia podstawowe

- Macierze oznacza się zazwyczaj dużymi literami alfabetu: **A**, **B**, **X**, natomiast elementy macierzy małymi literami z indeksami oznaczającymi numer wiersza i kolumny: **$a_{i,j}$** , **$b_{i,j}$** , **$x_{i,j}$** .
- Macierz **A** można także zapisać **$[a_{i,j}]_{m \times n}$** lub **$[a_{i,j}]$** .
- Macierz **$A=[a_{i,j}]_{1 \times n}$** lub **$A=[a_{i,j}]_{m \times 1}$** nazywa się wektorem.
- Macierz o wymiarze **$n \times n$** określa się jako macierz kwadratowa.

Pojęcia podstawowe

- Macierz której wszystkie elementy są **0** nazywa się **zerową**.
- Macierz kwadratową której wszystkie elementy poza leżącymi na przekątnej są **0** określa się jako macierz **diagonalną**.
- Macierz diagonalna w której wszystkie elementy leżące na przekątnej są równe **1**, nazywa się macierzą **jednostkową** n -tego stopnia i oznacza I_n .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pojęcia podstawowe

Macierz **trójkątną dolną** lub **górną** określa się macierz której wszystkie elementy leżące **nad** lub **pod** przekątną są równe **0**.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Własności macierzy

Sumą macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ i $B=[b_{i,j}]_{m \times n}$ nazywa macierz $C=[c_{i,j}]_{m \times n}$ gdzie $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

Iloczyn macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ nazywa macierz $C=[c_{i,j}]_{m \times n}$ gdzie $c_{i,j}=\alpha \times a_{i,j}$

Własności macierzy

Dla macierzy **A**, **B** i **C** tego samego wymiaru, oraz liczb rzeczywistych **α** i **β** zachodzą zależności:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A + (-A) = 0$$

$$\alpha \times (A + B) = \alpha \times A + \alpha \times B$$

$$(\alpha + \beta) \times A = \alpha \times A + \beta \times A$$

$$1 \times A = A$$

$$(\alpha \times \beta) \times A = \alpha \times (\beta \times A)$$

Własności macierzy

Iloczynem macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ i $B=[b_{i,j}]_{n \times k}$ nazywa macierz $C=[c_{i,j}]_{m \times k}$ gdzie

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 34 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}$$

Przemienność mnożenia macierzy nie
zawsze zachodzi $AB \neq BA$

Własności macierzy

Jeżeli macierze **A**, **B** i **C** są odpowiednich wymiarów, a **α** jest liczbą rzeczywistą to:

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(A+B)C = AC+BC$$

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$AI_n = I_m A = A$$

$$A^n A^m = A^{n+m}$$

Własności macierzy

Macierzą transponowaną do macierzy $A=[a_{i,j}]_{m \times n}$ nazywamy macierz $B=[b_{i,j}]_{n \times m}$ taką że: $b_{i,j} = a_{j,i}$

Macierz transponowaną do macierzy A oznacza się A^T

Przy transponowaniu macierzy kolejne jej wiersze stają się kolumnami macierzy transponowanej.

Własności macierzy

Dla macierzy **A**, **B** odpowiednich wymiarów, **α** liczby rzeczywistej oraz **n** liczby całkowitej:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(\alpha \times A)^T = \alpha \times A^T$$

$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

$$(A^n)^T = (A^T)^n$$

Macierz kwadratową **A** nazywamy symetryczną (antysymetryczną), gdy

$$A^T = A \quad (A^T = -A)$$

Pojęcia podstawowe

Macierzą **hermitowską** określamy macierz kwadratową zawierającą elementy rzeczywiste lub zespolone która jest równa swojemu sprzężeniu.

$$A=A^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1-2i & i \\ 1+2i & -3 & 3+2i \\ -i & 3-2i & 5 \end{bmatrix}$$

Pojęcia podstawowe

Własności macierzy hermitowskiej:

1. W głównej przekątnej są wyrazy rzeczywiste
2. Ma rzeczywiste wartości własne
3. Wyznacznik macierzy jest rzeczywisty
4. Macierz o elementach rzeczywistych jest symetryczna

Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej **A** nazywa się funkcję **$|A| = \det A$** przyporządkowująca liczbę rzeczywistą w sposób indukcyjny:

1. Jeżeli macierz **A** ma stopień $n=1$ to:

$$\det A = a_{1,1}$$

2. Jeżeli macierz **A** ma stopień $n \geq 2$ to:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{1,1} \det A_{1,1} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1,n} \det A_{1,n}$$

Wyznacznik macierzy

Dla macierzy kwadratowej A o stopniu $n \geq 2$, można określić dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$ takie że:

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{i,j}$$

Można więc dla macierzy kwadratowej A stopnia $n \geq 2$, oraz $i \geq 1$, $j \leq n$ opisać wyznacznik macierzy jako:

$$\det A = a_{i,1} D_{i,1} + \dots + a_{i,n} D_{i,n} = a_{1,j} D_{1,j} + \dots + a_{n,j} D_{n,j}$$

Wyznacznik macierzy

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 14$$

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

$$|A| = \det A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \cdot 4) =$$

$$= 225 - 225 = 0$$

**Reguły te nie mają zastosowania do obliczania
wyznaczników wyższych rzędów $n > 3$**

Wyznacznik macierzy

Interpretacją geometryczną
wyznacznika II stopnia jest pole
równoległoboku opisanego wektorami
 $\vec{v}=(a,b)$ i $\vec{u}=(c,d)$

Interpretacją geometryczną
wyznacznika III stopnia jest objętość
równoległościanu opisanego wektorami
 $\vec{v}=(a,b,c)$, $\vec{u}=(d,e,f)$ i $\vec{w}=(g,h,i)$.

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy trójkątnej górnej lub dolnej, niezależnie od stopnia macierzy równy jest iloczynowi elementów znajdujących się na przekątnej macierzy.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-8) \cdot 3 \cdot (-1) = 48$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy:

$$\det \begin{bmatrix} A_1 & B & \cdots & B \\ 0 & A_2 & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix} = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \cdots \cdot \det A_k$$

gdzie $A_1, \dots, A_k$ są macierzami kwadratowymi (niekoniecznie tego samego stopnia, 0 oznaczają macierze zerowe, a B dowolne macierze to wyznacznik takiej macierzy liczymy jako iloczyn wyznaczników.

Wyznacznik macierzy

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 11 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \det[4] \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \\ -5 & 11 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$4 \cdot 1 \cdot (-98) = -392$$

Wyznacznik macierzy

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę lub wiersz zerowy wynosi 0.
2. Zmiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn spowoduje że zmieni się znak wyznacznika macierzy
3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie takie same kolumny lub wiersze wynosi 0
4. Jeżeli można z jednego wiersza lub kolumny wydzielić stały współczynnik to można wyłączyć go przed wyznacznik macierzy.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{4}{3} \\ 3 & 5 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy w której w jedną kolumnę lub wiersz opisze się jako sumę liczb można policzyć jako sumę wyznaczników dwóch macierzy w której wskazany wiersz lub kolumna są zastąpione wskazanymi składnikami:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 3-2 \\ 2 & 2+3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierz

Wyznacznik macierzy nie zmieni się jeżeli do wartości dowolnego wiersza lub kolumny dodamy dowolną wielokrotność innego wiersza lub kolumny.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 + 2 \cdot 5 & 5 \\ 3 & 5 + 2 \cdot 6 & 6 \\ 1 & 3 + 2 \cdot 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

1. Wyznacznik macierzy i wyznacznik macierzy do niej transponowanej są sobie równe: $\det A = \det A^T$
2. Jeżeli macierze A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
3. Dla dowolnego n całkowitego:
 $\det(A^n) = (\det A)^n$

Wyznacznik macierzy

Algorytm Gaussa obliczania wyznaczników, dla macierzy kwadratowych stopnia $n \geq 3$ i $a_{1,1} \neq 0$.

$$\det[A] = a_{1,1} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{1,1} \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ 0 & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,n} \end{bmatrix} = a_{1,1} \det \begin{bmatrix} a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,n} \end{bmatrix} = \cdots$$

$$\text{gdzie: } a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,1} \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}$$

Wyznacznik macierzy

15:21

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$a'_{2,1} = a_{2,1} - a_{2,1} \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} = 3 - 3 \frac{1}{1} = 0$$

$$a'_{2,2} = a_{2,2} - a_{2,1} \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} = -4 - 3 \frac{2}{1} = -10$$

$$a'_{2,3} = a_{2,3} - a_{2,1} \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} = 2 - 3 \frac{-3/2}{1} = \frac{13}{2}$$

$$a'_{2,4} = a_{2,4} - a_{2,1} \frac{a_{1,4}}{a_{1,1}} = 2 - 3 \frac{1}{1} = -1$$

Wyznacznik macierzy

$$2 \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \\ 0 & -10 & \frac{13}{2} & -1 \\ 0 & -19 & \frac{31}{2} & -8 \\ 0 & -6 & \frac{2}{2} & -3 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} -10 & \frac{13}{2} & -1 \\ -19 & \frac{31}{2} & -8 \\ -6 & \frac{2}{2} & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= (2 \cdot (-10)) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{13}{20} & \frac{1}{10} \\ -19 & \frac{31}{2} & -8 \\ -6 & \frac{2}{2} & -3 \end{bmatrix} = (-20) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{13}{20} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{63}{20} & -\frac{61}{10} \\ 0 & -\frac{19}{10} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} =$$

Wyznacznik macierzy

$$= (-20) \det \begin{bmatrix} \frac{63}{20} & -\frac{61}{10} \\ 19 & 12 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \left(-20 \cdot \frac{63}{20}\right) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{122}{63} \\ 19 & 12 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= (-63) \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{122}{63} \\ 0 & \frac{383}{63} \\ 0 & -\frac{383}{63} \end{bmatrix} = (-63) \det \begin{bmatrix} -\frac{383}{63} \end{bmatrix} =$$

$$= (-63) \cdot \left(-\frac{383}{63}\right) = 383$$

Przykład

15:21

```

20 ..... clear X;
21 ..... for i=2
22 .....     for
23 .....
24 .....     end
25 ..... end
26 ..... k=k+1;
27 ..... if r>1
28 .....     disp
29 .....     disp
30 ..... end
31 ..... end
32 endfunction
16 .....
17 ..... end
18 ..... end
19 ..... end

```

```

2.      4.      -3.      2.
3.      -4.      2.      2.
9.      -1.      2.      1.
4.      2.      -4.      1.

"Wyznacznik macierzy X=383"

"Etap: 1"

-10.      6.5      -1.
-19.      15.5      -8.
-6.      2.      -3.

"Etap: 2"

3.15      -6.1
-1.9      -2.4

"Etap: 3"

-6.0793651

"Wyznacznik macierzy X=383"

```

);

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A stopnia n określa się macierz A^{-1} spełniającą warunek:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową n -tego stopnia.

Macierz jest odwracalna tylko wtedy gdy jest nieosobliwa, a więc spełniony jest warunek:

$$\det A \neq 0$$

Własności macierzy odwrotnej

Dla macierzy A i B tego samego wymiaru, odwracalnych, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$ to

- $A^{-1}, A^T, AB, \alpha A, A^n$ są odwracalne
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = (1/\alpha)(A^{-1})$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Macierz odwrotna

Macierz odwrotną do A liczy się według zależności:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$$

gdzie D jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A :

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Gdzie M_{ij} jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -kolumny

Przykład 1

15:21

Wyznaczyć macierz odwrotną do A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = (1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$-(0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1) =$$

$$= 9 - (2 + 6) = 1$$

Przykład 1

Należy wyznaczyć macierz dopełnień algebraicznych:

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(3) = -3$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1

Macierz D^T :

$$D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna do A wynosi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład

```

1 function A=odwrotna(B)
2     w=wyznacznik(B);
3     r=size(B,"r");
4     c=size(B,"c");
5     for i=1:r
6         for j=1:c
7             A(i,j)=(1/w) * (
8         end
9     end
10 endfunction

2.    4.   -3.    2.
3.   -4.    2.    2.
9.   -1.    2.    1.
4.    2.   -4.    1.

"Wyznacznik macierzy X=383"
"Wyznacznik macierzy X=383"
"Macierz odwrotna do x:"

-0.0469974  -0.0391645   0.1044386   0.0678851
 0.2088773  -0.1592689   0.0913838  -0.1906005
 0.1436031  -0.0469974   0.1253264  -0.3185379
 0.3446475   0.2872063  -0.0992167  -0.1644909

1 function D=dopelnienie(X,a
2     D=X;
3     D(a,:)=[];
4     D(:,b)=[];
5 endfunction

"Macierz odwrotna do x->inv(x):"

-0.0469974  -0.0391645   0.1044386   0.0678851
 0.2088773  -0.1592689   0.0913838  -0.1906005
 0.1436031  -0.0469974   0.1253264  -0.3185379
 0.3446475   0.2872063  -0.0992167  -0.1644909

```


Przykład 2

Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą Gaussa poprzez przekształcanie układu macierzy $A|I$ do układu $I|A^{-1}$ za pomocą elementarnych przekształceń:

1. Mnożenia macierzy przez stałe różne od zera
2. Dodawania do elementów wiersza odpowiadających ich elementów innego wiersza przemnożonych przez dowolną stałą
3. Przestawianie wierszy

Przykład 2

Za pomocą przekształceń elementarnych można z zależności:

$$AA^{-1}=I$$

Wyznaczyć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - w_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2w_2$$

Przykład 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2w_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2w_3 \\ -w_3 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz blokowa (klatkowa)

Jeżeli elementami macierzy **A** są inne macierze, to taką macierz określa się mianem macierzy blokowej (klatkowej).

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B_{1,1} & B_{1,2} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]$$

Podział na bloki (klatki) może być prowadzony w sposób dowolny.

Macierze blokowe

Dodawanie i mnożenie macierzy blokowych realizowane jest analogicznie jak przy dodawaniu i mnożeniu macierzy, traktując bloki jak elementy macierzy.

Bloki utworzone w macierzach muszą mieć wymiary umożliwiające wykonanie działań:

- Dodawanie – macierze tego samego wymiaru
- Mnożenie – zgodna liczba kolumn w pierwszej i wierszy w drugiej macierzy

Przykład 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 + I 0 \\ 0 B_1 + A_4 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} 13 \\ 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierze blokowe

Macierz diagonalna-blokowa jest macierzą zawierającą na swojej przekątnej macierze, a pozostałe elementy są równe 0.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix}$$

Macierze blokowe

Wyznacznik macierzy blokowej diagonalnej równa się iloczynowi wyznaczników macierzy znajdujących się na przekątnej.

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ i macierze A_1 i A_4 są

kwadratowe to: $\det A = \det A_1 \cdot \det A_4$

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ i macierze A_1 i A_4 są

kwadratowe, nieosobliwe to: $A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_4^{-1} \end{bmatrix}$

Jeżeli $A = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ i B jest dowolną macierzą o

wymiarach $m \times n$ to: $A^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$

Norma wektora

Dla macierzy jednokolumnowej (wektora) określone są następujące normy:

1. Suma modułów: $\|A\| = \sum_{i=1}^n |a_i|$
2. Norma euklidesowa: $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$
3. Norma maksimum: $\|A\|_\infty = \max_i |x_i|$

Normy macierzy

Normy macierzy kwadratowy określa się następująco:

1. Suma kolumny: $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|$

2. Norma euklidesowa: $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$

3. Norma spektralna: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$

$\lambda_{\max}(A)$ – maksymalna wartość wartości własnych macierzy A

4. Sumy wierszy: $\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

Przykład 5

Obliczyć normy wektora:

$$A = [54, -9, 0, 12, 3]$$

$$\|A\| = 54 + 9 + 12 + 3 = 78$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{54^2 + 9^2 + 12^2 + 3^2} = 56.125$$

$$\|A\|_\infty = 54$$

Przykład 6

Obliczyć normy macierzy kwadratowej:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

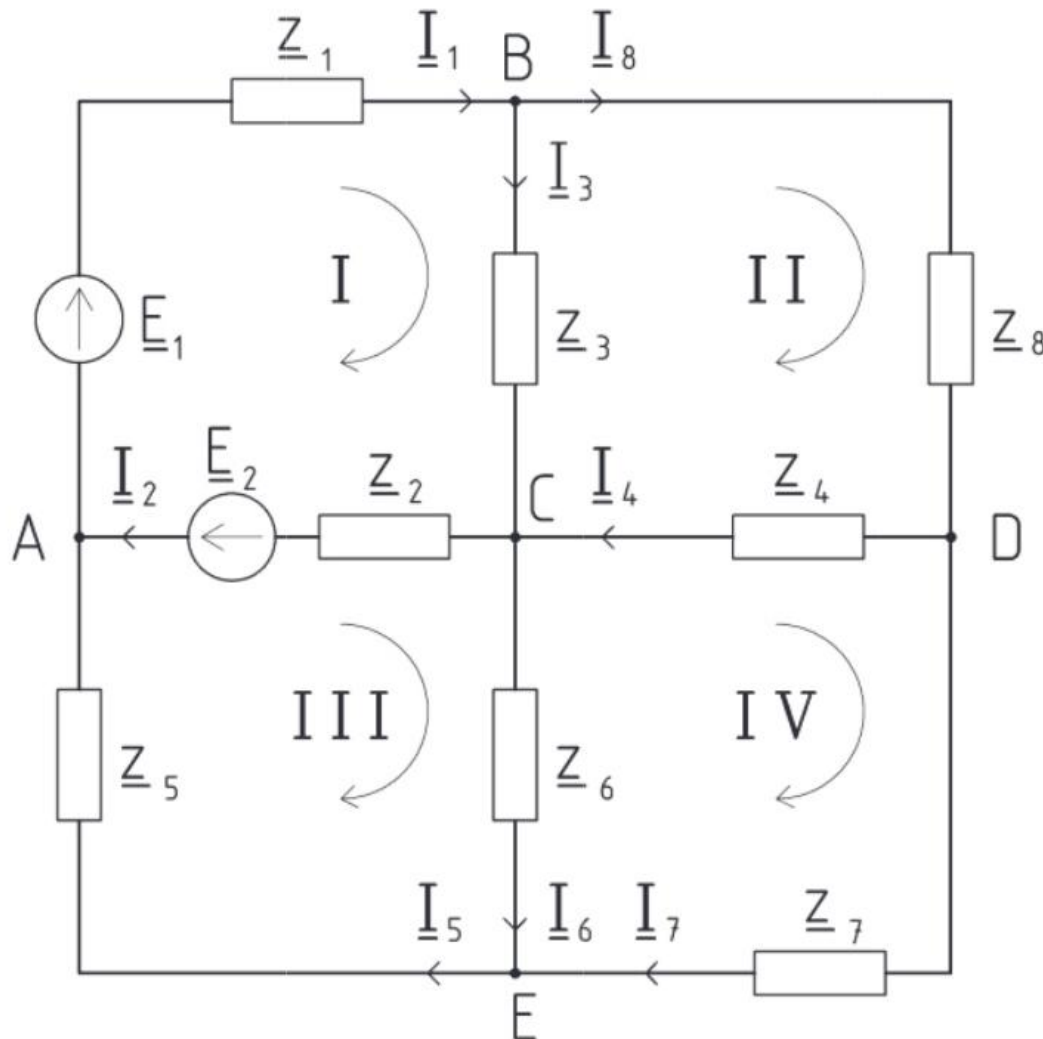
$$\|A\| = \max[5 \quad 5 \quad 3] = 5$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{9 + 4 + 1 + 2 + 2 + 1 + 0 + 1 + 1} = 5$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = 4.858$$

$$\|A\|_{\infty} = \max \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$$

Przykład 7



$$\underline{E}_1 = 100 \text{ V}$$

$$\underline{E}_2 = j100 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_5 = 10 \Omega$$

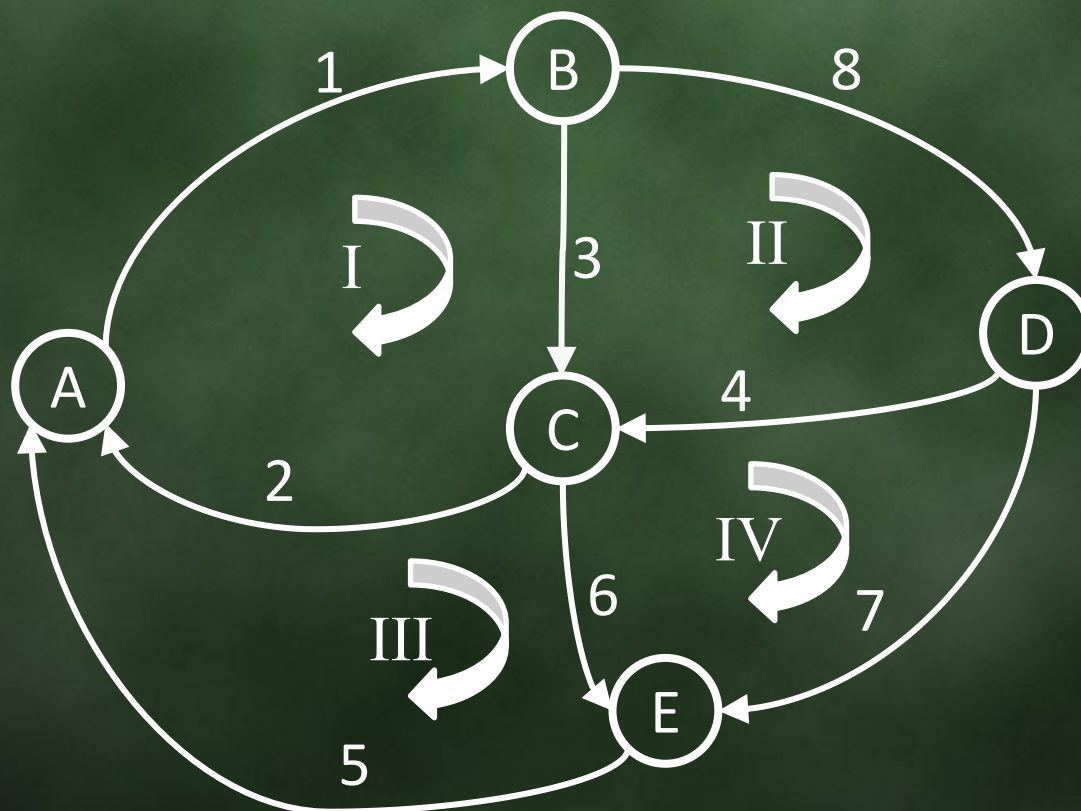
$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_8 = j10 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_6 = -j10 \Omega$$

$$\underline{Z}_4 = \underline{Z}_7 = 20 \Omega$$

Przykład 7

Dla metody prądów oczkowych na podstawie schematu można utworzyć graf zorientowany.



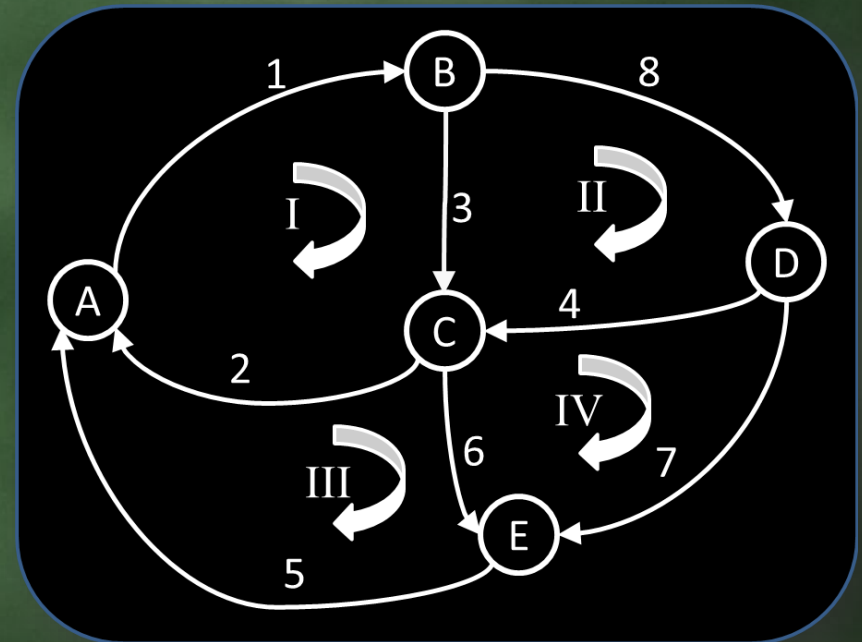
Przykład 7 metoda prądów oczkowych

Na podstawie grafu tworzona jest macierz incydencji.

0 – jeżeli gałąź nie należy do oczka

1 – jeżeli gałąź należy do oczka, a prąd gałęziowy jest zgodny z prądem oczkowym

-1 – jeżeli gałąź należy do oczka, a prąd gałęziowy nie jest zgodny z prądem oczkowym



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 7

Na podstawie struktury obwodu budowana jest macierz diagonalna impedancji.

$$Z_d = \begin{bmatrix} \underline{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_8} \end{bmatrix}$$

Przykład 7

Wektory prądów i napięć źródłowych

0 – jeżeli w gałęzi nie ma źródeł

ten sam znak – jeżeli kierunek (E jest zgodny) (I jest przeciwny) z kierunkiem prądu gałęziowego

znak przeciwny – jeżeli kierunek (E jest przeciwny) (I jest zgodny) z kierunkiem prądu gałęziowego

$$E_g = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 7

1. Macierz impedancji własnych i wzajemnych

$$Z = B \cdot Z_d \cdot B^T$$

1. Prądy oczkowe

$$I_o = Z^{-1} \cdot B \cdot (E_g - Z_d \cdot I_z)$$

1. Prądy wypadkowe gałęzi uogólnionych

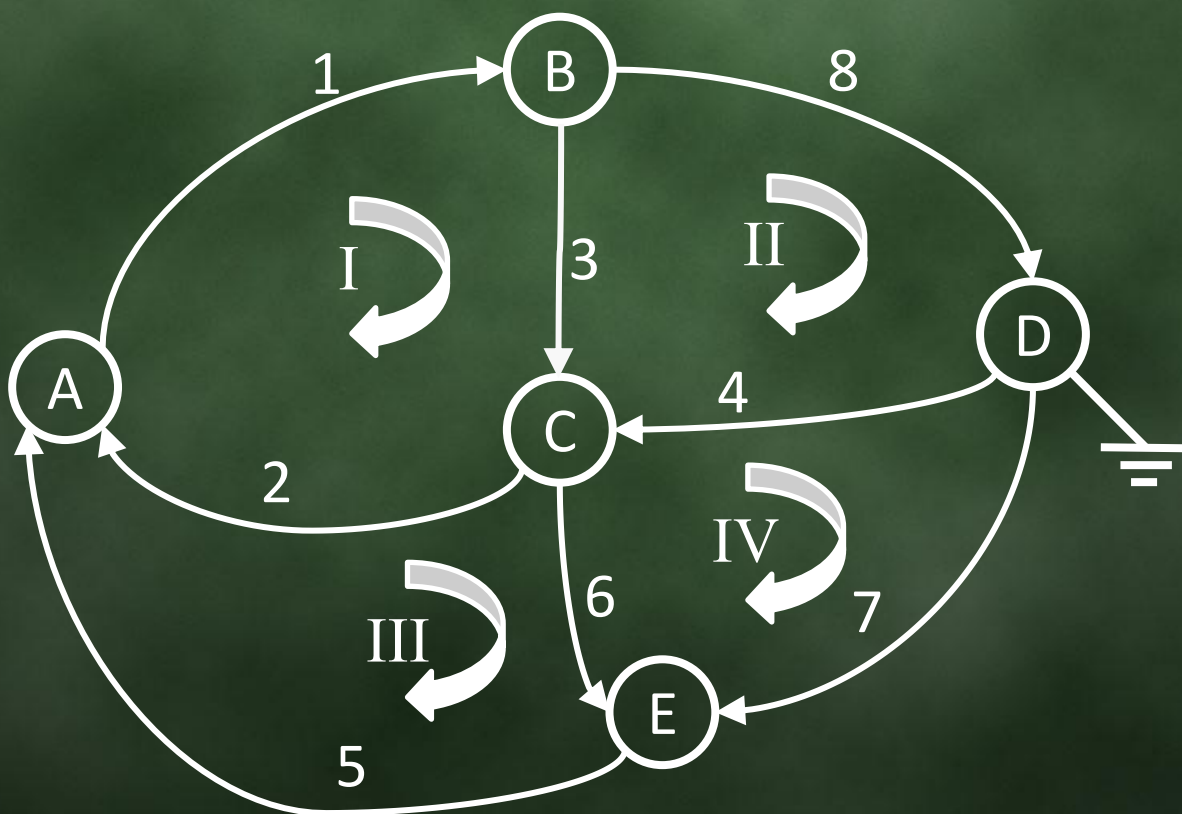
$$I = B^T \cdot I_o$$

1. Prądy gałęziowe

$$I_g = I + I_z$$

Przykład 7

Dla metody potencjałów węzłowych na podstawie schematu można utworzyć graf zorientowany. Jeden z węzłów przyjmuje się jak węzeł odniesienia, poprzez jego uziemieni.



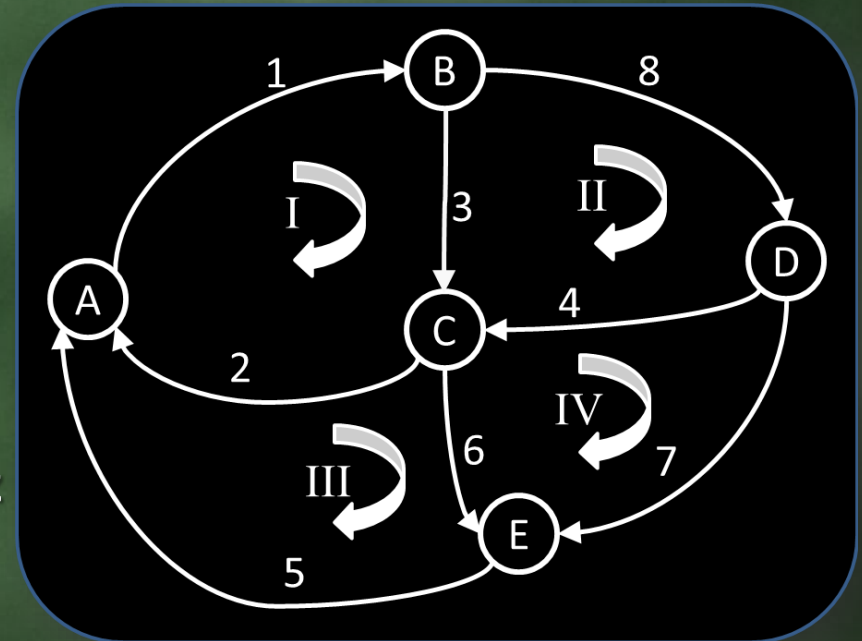
Przykład 7 metoda potencjałów węzłowych

Na podstawie grafu tworzona jest macierz incydencji.

0 – jeżeli gałąź nie ma połączenia z węzłem

1 – jeżeli gałąź jest połączona z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest skierowany od węzła

-1 – jeżeli gałąź jest połączona z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest skierowany do węzła



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 7

Metoda zakłada potraktowanie jednego z węzłów jako węzła odniesienia, poprzez jego uziemienie.

W zdefiniowanej macierzy incydencji należy wybrany wiersz związany z węzłem odniesienia skasować – Węzeł D

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 7

1. Macierz admitancji własnych i wzajemnych

$$Y = A \cdot Y_d \cdot A^T$$

1. Macierz potencjałów węzłowych

$$U_w = Y^{-1} \cdot A \cdot (I_z - Y_d \cdot E_g)$$

1. Napięcia gałęziowe

$$U = A^T \cdot U_w$$

1. Prądy gałęziowe

$$I_g = I + I_z = Y_d(U + E_g)$$

Przykład 7

```
1 clear
2 clc
3 // dane: impedancje gałęzi
4 Z1 = 10;
5 Z5 = Z1;
6 Z2 = 10*i;
7 Z8 = Z2;
8 Z3 = -10*i;
9 Z6 = Z3;
10 Z4 = 20;
11 Z7 = Z4;
12 // dane: parametry źródeł
13 E1 = 100;
14 E2 = 100*i;
15 // macierz diagonalna impedancji
16 Zd = diag([Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6, Z7, Z8]);
17 // macierz diagonalna admitancji
18 Yd = diag([1/Z1, 1/Z2, 1/Z3, 1/Z4, 1/Z5, 1/Z6, 1/Z7, 1/Z8]);
19 // macierz kolumnowa źródeł napięcia
20 Eg = [E1; E2; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
21 // macierz kolumnowa źródeł prądu
22 Iz = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
```


Przykład 7 – weryfikacja

```
23 //macierz·incydencyjna·oczkowa·
24 B=[1,1,1,0,0,0,0,0;
25 ...0,0,-1,1,0,0,0,1;
26 ...0,-1,0,0,1,1,0,0;
27 ...0,0,0,-1,0,-1,1,0];
28 //macierz·incydencji·mężłowa
29 A=[1,-1,0,0,-1,0,0,0;
30 ...-1,0,1,0,0,0,0,1;
31 ...0,1,-1,-1,0,1,0,0;
32 ...0,0,0,1,0,0,1,-1;
33 ...0,0,0,0,1,-1,-1,0];
34 disp('Test·poprawności·macierzy·incydencji·AB`==0·lub·BA`==0');
35 disp(A*B');
36 disp(B*A');
```

Przykład 7 – metoda oczkowa

```
37 // macierz Impedancji własnych i wzajemnych
38 Z=B*Zd*B';
39 // Prądy oczkowe
40 Io=inv(Z)*B*(Eg-Zd*Iz);
41 // Prądy wypadkowe
42 I=B'*Io;
43 // prądy w gałęziach
44 Ig=I+Iz;
45 // wartości skuteczne prądów w gałęziach
46 Igs=abs(Ig);
47 // wyświetlanie wyników
48 disp('Wyniki z metody prądów oczkowych:');
49 disp('wartości zespolone prądów:', Ig);
50 disp('wartości skuteczne prądów:', Igs);
```

Przykład 7 – metoda węzłowa

```
51 //macierz·admitancji·własnych·i·wzajemnych
52 Y=A*Yd*A';
53 //macierz·potencjałów·węzłowych
54 Uw=inv(Y)*A*(Iz-Yd*Eg);
55 //napięcia·gałęziowe
56 U=A'*Uw;
57 //prądy·gałęziowe
58 Igw=Yd*(U+Eg);
59 //wartości·skuteczne·prądów·gałęziowych
60 Igws=abs(Igw);
61 disp('Wyniki·z·metody·potencjałów·węzłowych:');
62 disp('wartości·zespółone·prądów:', Igw);
63 disp('wartości·skuteczne·prądów:', Igws);
```

Przykład 7 - wyniki

"Weryfikacja wyników: $I_g - I_{gw} == 0$ "

metody potencjałów węzłowych:"

-1.776D-15 + 1 --> norm($I_g - I_{gw}$)

-1.776D-15 + 0
ans =

1.776D-15 + 1

4.441D-16 - 4

0. + 1

3.892D-15

1.776D-15 + 6

1.110D-16 - 1

--> norm($I_{gs} - I_{gws}$)

4.441D-16 - 1

ans =

8.4140632

13.713245

9.97

4.20

5.30

5.40

1.40

5.6833868

A – węzeł
odniesienia

3.504D-15

-1.443D-15 - 2.220D-16i

8.882D-16 - 1.776D-15i

5.6833868

D – węzeł
odniesienia

38053i

46010i

Wyników: $I_g - I_{gw} == 0$ "

.776D-15i

.i

.i

.441D-16i

.776D-15i

.882D-16i