

Metody numeryczne

Wykład 2



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://m.lanczont.pollub.pl>

Zakres wykładu – część I

Metody skończone rozwiązywania układów równań liniowych:

1. Rozkład LU
2. Rozkład LL^T
3. Eliminacja Gaussa z wyborem elementów głównych
4. Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

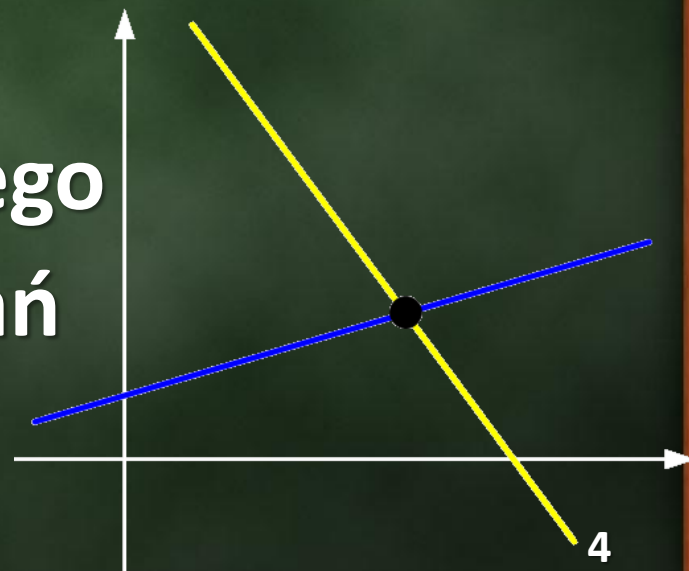
Zakres wykładu – część II

Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych:

- 1) Richardsona
- 2) Jacobiego
- 3) Gaussa-Seidela
- 4) Nadrelaksacji

Równania liniowe

- Wychodząc z geometrii euklidesowej rozpatrywać można punkt na płaszczyźnie wyznaczony przez dwie proste.
- Mogą one wyznaczać prostą (nieskończenie wiele rozwiązań), punkt, lub zbiór pusty
- Algebraiczną postacią tego problemu jest układ równań liniowych.



Układ równań liniowych

- Teoria układów równań liniowych jest działem algebry liniowej.
- Numeryczne rozwiązywanie układów równań liniowych odgrywa ważną rolę w inżynierii, fizyce, chemii, informatyce czy ekonomii.
- W wielu przypadkach skomplikowane problemy opisane układami równań nieliniowych sprowadza się do dużo prostszych w metodyce rozwiązania układów równań liniowych. Proces ten nazywa się linearyzacją problemu.

Układy równań liniowych

Równanie liniowe **1** rzędu

$$Ax + b = 0$$

Układ **n** równań liniowych w postaci:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Układy równań liniowych

Układ **n** równań liniowych w postaci macierzowej można zapisać:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

W postaci ogólnej jest on następujący:

$$A \cdot x = b$$

Metody skończone

- Metody skończone rozwiązywania układów równań liniowych stosowane są dla stosunkowo niewielkich liczbowo układów równań.
- Zastosowanie tych metod dla układu $n \times n$ wymaga n^2 komórek w pamięci operacyjnej oraz wykonania rzędu n^3 działań arytmetycznych.
- Jeśli więc tylko n nie jest zbyt duże i układ jest dostatecznie dobrze uwarunkowany, to rozwiązanie zadania jest stosunkowo proste.

Układy równań liniowych

Postacie uproszczone równań

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/a_{1,1} \\ b_2/a_{1,1} \\ \vdots \\ b_n/a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jeżeli $a_{i,i}=0$ i $b_i=0$ to odpowiadające im x_i przyjmuje dowolną wartość, natomiast jeżeli $a_{i,i}=0$ i $b_i \neq 0$ to układ równań nie ma rozwiązania

Układy równań liniowych

Postacie uproszczone równań

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Przy założeniu że $a_{i,i} \neq 0$, wtedy z pierwszego równania wyznacza się x_1 , a znając go można z drugiego wyznaczyć x_2 . Powtarzając algorytm wyznacza się pozostałe wartości x aż do x_n

Układy równań liniowych

Algorytm rozwiązywania układu równań liniowych dla macierzy **A** w układzie trójkątnym dolnym:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

for i = 1 to n

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}}$$

Jest to tzw. Algorytm podstawienia w przód

Układy równań liniowych

Analogiczna sytuacja ma miejsce dla macierzy trójkątnej górnej. W tym przypadku stosujemy algorytm podstawienia wstecz.

for $i = n$ to 1 step $- 1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Przykład 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```

1 A=[1,0,0,0,0;2,-2,0,0,0;3,1,2,0,0;3,3,-4,3,0;2,-3,1,4,1];
2 b=[3;-2;1;0;5];
3 x=[0;0;0;0;0];
4 for i=1:5
5     z=0;
6     for j=1:i-1
7         z=z+A(i,j)*x(j);
8     end
9     x(i)=(b(i)-z)/A(i,i);
10 end

```

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -15 \\ 77 \end{bmatrix}$$

Rozkłady LU

Rozwiązanie układu równań liniowych przy konfiguracji macierzy **A**:

- trójkątnej dolnej,
- trójkątnej górnej,

jest zagadnieniem numerycznie łatwym do realizacji. Dlatego też dąży się do tego aby problem równania **$Ax=b$** sprowadzić do zadania rozwiązania macierzy trójkątnych.

Rozkład LU

Jeżeli wszystkie minory główne macierzy A są nieosobliwe to dana macierz ma rozkład LU, $\det A_k \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

Jeżeli tylko jest to możliwe (nie zachodzi dzielenie przez 0) dąży się do zastąpienia macierzy **A** iloczynem macierzy trójkątnej dolnej **L** i trójkątnej górnej **U**: **$A=L \cdot U$** .

W efekcie problem sprowadza się wtedy do dwustopniowego rozwiązywania układu równań liniowych

1. **$L \cdot \underline{z} = b$**
2. **$U \cdot \underline{x} = z$**

Rozkład LU

Dla danej macierzy **A**, poszukuje się macierzy **L** i **U**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

Opracowanie metody wyznaczania macierzy **L** i **U** rozpoczyna się od określenia zależności na mnożenie macierzy:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n l_{is} \cdot u_{sj}$$

przyjmując założenie że **$l_{is}=0$** dla **$s>i$** oraz **$u_{sj}=0$** dla **$s>j$** .

Rozkład LU

Zakładając, że w k -tym kroku wyznaczono już $k-1$ wierszy macierzy U i $k-1$ kolumn macierzy L , można zapisać:

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} \cdot u_{sk} + l_{kk} \cdot u_{kk}$$

Przyjmując jedną z wartości l_{kk} lub u_{kk} można z wcześniejszego równania obliczyć drugą z nich, a następnie z powyższego pozostałe wartości k -go wiersza macierzy U i k -tej kolumny macierzy L .

Rozkład LU

Algorytm obliczeń przyjmuje postać:

for $k = 1$ *to* n

$$l_{kk}u_{kk} = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk}$$

for $j = k$ *to* n

Liczbowo $i=j=k$

a_{ij} jest macierzą

kwadratową

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj}}{l_{kk}}$$

$$l_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{js}u_{sk}}{u_{kk}}$$

Przykład 2

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$[L] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix} \quad [U] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Przykład 2

Wprowadzenie danych do modelu:

```

1 clear;
2 clc;
3 A=[2,1,1,0;4,3,3,1;8,7,9,5;6,7,9,8];
4 b=[5;11;25;21];
5 x=[0;0;0;0];
6 y=x;
7 n=4
8 U=eye(n,n);
9 L=U;

```

A	=	b	=	U	=			
2.	1.	1.	0.	5.	1.	0.	0.	0.
4.	3.	3.	1.	11.	0.	1.	0.	0.
8.	7.	9.	5.	25.	0.	0.	1.	0.
6.	7.	9.	8.	21.	0.	0.	0.	1.

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     U(k,k)=(A(k,k)-z)/L(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(k,s)*U(s,j);
20         end
21         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(j,s)*U(s,k);
25         end
26         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
27     end
28 end

```

L =

1.	0.	0.	0.
2.	1.	0.	0.
4.	3.	1.	0.
3.	4.	1.	1.

U =

2.	1.	1.	0.
0.	1.	1.	1.
0.	0.	2.	2.
0.	0.	0.	2.

Rozkład Doolittle'a

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     L(k,k)=(A(k,k)-z)/U(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(j,s)*U(s,k);
20         end
21         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(k,s)*U(s,j);
25         end
26         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
27     end
28 end

```

L =

2.	0.	0.	0.
4.	1.	0.	0.
8.	3.	2.	0.
6.	4.	2.	2.

U =

1.	0.5	0.5	0.
0.	1.	1.	1.
0.	0.	1.	1.
0.	0.	0.	1.

Rozkład Crouta

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     L(k,k)=(A(k,k)-z)/U(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(k,s)*U(s,j);
20         end
21         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(j,s)*U(s,k);
25         end
26         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
27     end
28 end

```

L =

2.	0.	0.	0.
4.	3.	0.	0.
8.	9.	9.	0.
6.	12.	9.	8.

U =

1.	0.5	0.5	0.
0.	0.333	0.333	0.333
0.	0.	0.222	0.222
0.	0.	0.	0.25

Przykład 2

Wyznaczenie macierzy L i U:

```

10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     U(k,k)=(A(k,k)-z)/L(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(j,s)*U(s,k);
20         end
21         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(k,s)*U(s,j);
25         end
26         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
27     end
28 end

```

L =

1.	0.	0.	0.
2.	0.333	0.	0.
4.	1.	0.222	0.
3.	1.333	0.222	0.25

U =

2.	1.	1.	0.
0.	3.	3.	3.
0.	0.	9.	9.
0.	0.	0.	8.

Przykład 2

Rozwiązanie równania $L \cdot y = b$

```
29 for i=1:n
30     z=0;
31     k=(i-1);
32     for j=1:k
33         z=z+L(i,j)*y(j);
34     end
35     y(i)=(b(i)-z)/L(i,i);
36 end
```

y =

5.
1.
2.
0.

Przykład 2

Rozwiązanie równania $U \cdot x = y$

37	<code>for i=n:-1:1</code>	$x \rightarrow A \cdot x$
38	<code> z=0;</code>	$ans = b =$
39	<code> k=i+1;</code>	2.
40	<code> for j=k:n</code>	0. 5. 5.
41	<code> z=z+U(i,j)*x(j);</code>	1. 11. 11.
42	<code> end</code>	0. 25. 25.
43	<code> x(i)=(y(i)-z)/U(i,i);</code>	21. 21.
44	<code>end</code>	

Sprawdzenie poprawności równania $A \cdot x = b$

Wszystkie rozkłady **LU** dają poprawne rozwiązanie.

Rozkład LU – Scilab

W środowisku obliczeniowym scilab zdefiniowano funkcję realizującą rozkład LU macierzy kwadratowej.

$[L, U] = \text{lu}(A) ;$

L1 =

0.25	-0.429	0.333	1.
0.5	-0.286	1.	0.
1.	0.	0.	0.
0.75	1.	0.	0.

U1 =

8.	7.	9.	5.
0.	1.75	2.25	4.25
0.	0.	-0.857	-0.286
0.	0.	0.	0.667

--> L1*U1

ans =

2.	1.	1.	0.
4.	3.	3.	1.
8.	7.	9.	5.
6.	7.	9.	8.

lusolve

W środowisku Scilab'a dostępna jest funkcja rozwiązująca układy równań liniowych metodą rozkładów LU.

Wymaga ona przekształcenia macierzy A do postaci macierzy rzadkiej, za pomocą funkcji:

```
A_s=sparse(A) ;
```

Wywołanie metody:

```
x=lusolve(A_s,b) ;
```

Lusolve

```

1 clear;
2 clc;
3 A=[2,1,1,0;4,3,3,1;8,7,9,5;6,7,9,8];
4 b=[5;11;25;21];
5 A_s=sparse(A);
6 x=lusolve(A_s,b);
7 disp(x,'Rozwiązanie układu równań metodą rozkładu LU');

```

Rozwiązanie układu równań metodą rozkładu LU

2.
0.
1.
0.

```

A_s =
( 4, 4) sparse matrix

( 1, 1)      2.
( 1, 2)      1.
( 1, 3)      1.
( 2, 1)      4.
( 2, 2)      3.
( 2, 3)      3.
( 2, 4)      1.
( 3, 1)      8.
( 3, 2)      7.
( 3, 3)      9.
( 3, 4)      5.
( 4, 1)      6.
( 4, 2)      7.
( 4, 3)      9.
( 4, 4)      8.

```

Rozkład Cholesky'ego

- Odmianą rozkładu **LU** która jest użyteczna w pewnych sytuacjach obliczeniowych jest rozkład Cholesky'ego.
- Zaproponował on rozkład $\tilde{L}\tilde{L}^T$.
- Rozkład ten jest możliwy jeżeli macierz A jest rzeczywista i dodatnio określona

Rozkład Cholesky'ego

Rozkład ten można uzyskać przekształcając macierze **LU** uzyskane z rozkładu Doolittle'a dla macierzy **A** spełniających określone warunki.

- Macierz **U** rozbija się na iloczyn macierzy **D** i **L^T**.
- Macierz **D** jest macierzą diagonalną zawierającą na przekątnej elementy występujące na przekątnej w macierzy **U**
- Jednocześnie mnożąc macierz **L** i **D** uzyskujemy rozkład **Crouta** macierzy **LU**

Rozkład Cholesky'ego

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

Rozkład Cholesky'ego

$$A = LD^{0.5}D^{0.5}L^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{60} & \sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{60} & \sqrt{5} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{60} & \frac{1}{2}\sqrt{60} & \frac{1}{3}\sqrt{60} \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

Rozkład Cholesky'ego

Algorytm wyznaczania macierzy L jest następujący:

for k = 1 to n

```

8  for k=1:n
9      z=0;
10     for s=1:(k-1)
11         z=z+(L(k,s)^2);
12     end
13     L(k,k)=sqrt(A(k,k)-z);
14     for i=(k+1):n
15         z=0;
16         for s=1:(k-1)
17             z=z+L(i,s)*L(k,s);
18         end
19         L(i,k)=(A(i,k)-z)/L(k,k);
20     end
21 end

```

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2}$$

for i = k + 1 to n

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks}}{l_{kk}}$$

Przykład 3

09:56

```
1 clear;
2 clc;
3 A=[60,30,20;30,20,15;20,15,12];
4 x=[0;0;0];
5 y=x;
6 n=3;
7 L=eye(n,n);
```

$$\sqrt{60} = 7.7459667$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{60} = 3.8729833$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{60} = 2.5819889$$

$$\sqrt{5} = 2.236068$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773503$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{60} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{60} & \sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{60} & \sqrt{5} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}$$

--> L

L =

7.7459667	0.	0.
3.8729833	2.236068	0.
2.5819889	2.236068	0.5773503

--> L'

ans =

7.7459667	3.8729833	2.5819889
0.	2.236068	2.236068
0.	0.	0.5773503

Metoda eliminacja Gaussa

- Rozkłady **LU** są pewną wersją eliminacji Gaussa.
- Eliminacja Gaussa polega na sprowadzeniu równania macierzowego zapisanego w postaci **$Ax=b$** do postaci **$Ux=z$** , gdzie **U** jest macierzą trójkątną górną
- Eliminację prowadzi się za pomocą przekształceń elementarnych

Metoda eliminacji Gaussa

- Procedurę najwygodniej zautomatyzować dążąc do uzyskania na przekątnej macierzy trójkątnej górnej jedynki. Nie jest to jednak warunek konieczny.

Przykład 4

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 2a_{1j} \\ 0.5a_{1j} \\ -a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 - 2 \cdot 6 & -8 + 2 \cdot 2 & 6 - 2 \cdot 4 & 10 - 2 \cdot 4 \\ 3 - 0.5 \cdot 6 & -13 + 0.5 \cdot 2 & 9 - 0.5 \cdot 2 & 3 - 0.5 \cdot 4 \\ -6 + 6 & 4 - 2 & 1 + 2 & -18 + 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 - 2 \cdot 12 \\ 27 - 0.5 \cdot 12 \\ -38 + 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 3a_{2j} \\ -0.5a_{2j} \end{array} \right.$$

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 + 3 \cdot 4 & 8 - 3 \cdot 2 & 1 - 3 \cdot 2 \\ 0 & 2 - 0.5 \cdot 4 & 3 + 0.5 \cdot 2 & -14 + 0.5 \cdot 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 - 3 \cdot 10 \\ -26 + 0.5 \cdot 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \Big| 2a_{3j}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 - 2 \cdot 2 & -13 + 2 \cdot 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 + 2 \cdot 9 \end{bmatrix}$$

Przykład 4

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 = \frac{12 - (4 \cdot 1 + 2 \cdot -2 - 2 \cdot -3)}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{10 - (2 \cdot 1 + 2 \cdot -2)}{-4} = -3 \\ x_3 = \frac{-9 - (-5 \cdot 1)}{2} = -2 \\ x_4 = \frac{-3}{-3} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algorytm metody Gaussa

for $i = 1:n$

$$D = A(i, i)$$

for $j = i:n$

$$A(i, j) = \frac{A(i, j)}{D}$$

$$b(i) = \frac{b(i)}{D}$$

for $k = i + 1:n$

$$M = A(k, i)$$

for $s = i:n$

$$A(k, s) = A(k, s) - M * A(i, s)$$

$$b(k) = b(k) - M * b(i)$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} -a_{1j} \cdot 12 \\ -a_{1j} \cdot 3 \\ -a_{1j} \cdot -6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 12 - 12 & -8 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 12\right) & 6 - \left(\frac{1}{3} \cdot 12\right) & 10 - \left(\frac{2}{3} \cdot 12\right) \\ 3 - 3 & -13 - \left(-\frac{1}{3} \cdot 3\right) & 9 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) & 3 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) \\ -6 + 6 & 4 - \left(-\frac{1}{3} \cdot -6\right) & 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot -6\right) & -18 - \left(\frac{2}{3} \cdot -6\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 - (2 \cdot 12) \\ 27 - (2 \cdot 3) \\ -38 - (2 \cdot -6) \end{bmatrix}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \Bigg|_{/(-4)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -12 + 12 & 8 - \left(-12 \cdot -\frac{1}{2}\right) & 1 - \left(-12 \cdot -\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 2 - 2 & 3 - \left(2 \cdot -\frac{1}{2}\right) & -14 - \left(2 \cdot -\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ 21 - \left(-12 \cdot -\frac{10}{4}\right) \\ -26 - \left(2 \cdot -\frac{10}{4}\right) \end{bmatrix} \Bigg|_{\begin{matrix} -a_{2j} \cdot -12 \\ -a_{2j} \cdot 2 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \Bigg|_{/2}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 - 4 & -13 - \left(4 \cdot -\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{4} \\ \frac{9}{2} \\ -21 - \left(4 \cdot -\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix} \Bigg|_{-a_{3j} \cdot 4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{10}{4} \\ \frac{9}{2} \\ -3 \end{bmatrix} \Bigg|_{/-3}$$

Przykład 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 9 \\ -\frac{2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{3} \cdot -3 - \frac{1}{3} \cdot -2 - \frac{2}{3} = 1 \\ -\frac{10}{4} + \frac{1}{2} \cdot -2 + \frac{1}{2} = -3 \\ -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 5

1.	-0.33333333	0.33333333	0.66666667
0.	1.	-0.5	-0.5
0.	0.	1.	-2.5
0.	0.	0.	1.

2.
-2.5
-4.5
1.

```

... D(K)=D(K)-D^D(1);
... end
... disp(A,b);
... end

```

1.
-3.
-2.
1.

Metoda eliminacji Gaussa

- W sytuacji gdy na przekątnej macierzy **A** występuje **0**, konieczne staje się przestawienie (zamianę wierszy układu) w celu eliminacji problemu dzielenia przez **0**.

Przykład 6

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 34 \\ 12 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} = a_{3j} \\ \\ = a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -13 & 9 & 3 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 34 \\ 12 \\ -38 \end{bmatrix} \Big| /3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{13}{4} & 3 & 1 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 1 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ -12 \\ -20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.046 \\ -0.73 \\ 1.262 \\ 2.004 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa

- Problemy w obliczeniach mogą pojawić się także gdy występują duże różnice w rzędach wielkości pomiędzy elementami macierzy
- Mogą wówczas podczas obliczeń wystąpić problemy podczas obliczeń spowodowanych dużą różnicą rzędów wielkości pomiędzy liczbami
- Rozwiązaniem problemu może w takim przypadku być również przestawienie wierszy
- Algorytm rozwiązywania się wtedy bardzo komplikuje i jest trudny do implementacji numerycznej

Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

09:56

- Metoda Gaussa zapewnia uzyskanie wyników z niewielkim błędem, jeżeli tylko wartości na głównej przekątnej nie są bliskie zero.
- Gdyby moduł któregoś z dzielników był mały w porównaniu z innymi współczynnikami, to mógłby powstać znaczny błąd numeryczny.
Istnienie zera na przekątnej wykluczałoby rozwiązanie metodą eliminacji Gaussa.
- Aby tego uniknąć, stosuje się jedną z metod wyboru elementu głównego:
 - Wybór częściowy elementu głównego
 - Wybór pełny elementu głównego

Metoda eliminacji Gaussa z

09:56

wyborem elementów głównych

Wybór częściowy elementu głównego:

- W **k**-tym kroku eliminacji poszukuje się największego elementu co do modułu w **k**-tym wierszu lub kolumnie, a następnie przestawia wskazaną kolumnę lub wiersz **k**-tą kolumną lub wierszem
- W przypadku przestawiania kolumn należy pamiętać o odpowiadającej im zmianie kolejności zmiennych.

Przykład 7 Wybór częściowy

Wybór elementu podstawowego w kolumnie:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 6 \\ 12 \\ 3 \\ 6 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 12 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 - \frac{6}{12} \cdot (-8) & 2 - \frac{6}{12} \cdot (6) & 4 - \frac{6}{12} \cdot (10) \\ 0 & -13 - \frac{3}{12} \cdot (-8) & 9 - \frac{3}{12} \cdot (6) & 3 - \frac{3}{12} \cdot (10) \\ 0 & 4 + \frac{6}{12} \cdot (-8) & 1 + \frac{6}{12} \cdot (6) & -18 + \frac{6}{12} \cdot (10) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 12 - \frac{6}{12} \cdot (34) \\ 27 - \frac{3}{12} \cdot (34) \\ -38 + \frac{6}{12} \cdot (34) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ -5 \\ \frac{37}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 2 \\ 11 \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ \frac{37}{2} \\ -5 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ \text{nie trzeba} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{15}{2}\right) & -1 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ -5 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{37}{2}\right) \\ 2 \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{2} \\ \frac{37}{2} \\ -\frac{18}{11} \\ -21 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 11 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{10}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{2} \\ \frac{37}{2} \\ -21 \\ -\frac{18}{11} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{11} - \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-13) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{2} \\ \frac{37}{2} \\ -21 \\ -\frac{18}{11} - \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-21) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 37 \\ 2 \\ -21 \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34 - 10 - 6 \cdot -2 + 8 \cdot -3}{12} = 1 \\ \frac{\frac{37}{2} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{15}{2}}{-11} = -3 \\ \frac{-21 + 13}{4} = -2 \\ \frac{\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{3}}{1} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

Wybór elementu podstawowego w wierszu:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 6 & 2 & 2 & 4 \end{matrix}$$

Nie przestawia się kolumn

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -8 - \frac{12}{6} \cdot (-2) & 6 - \frac{12}{6} \cdot (2) & 10 - \frac{12}{6} \cdot (4) \\ 0 & -13 - \frac{3}{6} \cdot (-2) & 9 - \frac{3}{6} \cdot (2) & 3 - \frac{3}{6} \cdot (4) \\ 0 & 4 + (-2) & 1 + (2) & -18 + (4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 - \frac{12}{6} \cdot (12) \\ 27 - \frac{3}{6} \cdot (12) \\ -38 + (12) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

09:56

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

4 2 2
Nie przestawia się kolumn

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

nie zmieniamy
nie zmieniamy
 $a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j}$
 $a_{4j} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{2j}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 - \frac{12}{4} \cdot (2) & 1 - \frac{12}{4} \cdot (2) \\ 0 & 0 & 4 + (2) & -14 + (2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 - \frac{13}{4} \cdot (12) \\ -26 + (1) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

09:56

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{Konieczna jest} \\ \text{Zamiana kolumny} \\ \text{4 z 3} \end{array} \right. \quad 2 \quad \boxed{5}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \frac{13}{5} \cdot (2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -60 - \frac{13}{5} \cdot (-9) \end{bmatrix}$$

Przykład 7 Wybór częściowy

09:56

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 - 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}{6} = 1 \\ \frac{10 - 2 \cdot (-2) - 2}{-4} = -3 \\ \frac{-9 - 2 \cdot (-2)}{-5} = 1 \\ \frac{12}{5} \cdot -\frac{5}{6} = -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

09:56

Wybór pełny elementu głównego :

- W k -tym kroku eliminacji poszukuje się największego elementu co do modułu zawartego w elementach macierzy złożonej z elementów a_{rs} , takich że $k \leq r \leq n$ oraz $k \leq r \leq n$
- Następnie kolumnę i wiersz zawierające największy element zamienia się z k -tym wierszem i k -tą kolumną
- Należy pamiętać że przy przestawieniu kolumny konieczne jest także przestawienie odpowiadających im zmiennych

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} 4 \text{ wiersz z } 1 \\ 4 \text{ kolumna z } 1 \\ x_4 \text{ z } x_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 10 & -8 & 6 & 12 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 34 \\ 27 \\ 12 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -8 - \frac{10}{-18} \cdot 4 & 6 - \frac{10}{-18} \cdot 1 & 12 - \frac{10}{-18} \cdot -6 \\ 0 & -13 - \frac{3}{-18} \cdot 4 & 9 - \frac{3}{-18} \cdot 1 & 3 - \frac{3}{-18} \cdot -6 \\ 0 & -2 - \frac{4}{-18} \cdot 4 & 2 - \frac{4}{-18} \cdot 1 & 6 - \frac{4}{-18} \cdot -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 34 - \frac{10}{-18} \cdot -38 \\ 27 - \frac{3}{-18} \cdot -38 \\ 12 - \frac{4}{-18} \cdot -38 \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{52}{9} & \frac{59}{9} & \frac{26}{3} \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{116}{9} \\ \frac{62}{3} \\ \frac{32}{9} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} -\frac{37}{3} \text{ jest największe} \\ 3 \text{ wiersz z } 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & -\frac{52}{9} & \frac{59}{9} & \frac{26}{3} \\ 0 & -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{116}{9} \\ \frac{32}{9} \end{bmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ a_{4j} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{2j} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{59}{9} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{55}{6}\right) & \frac{26}{3} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)(2) \\ 0 & 0 & \frac{20}{9} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{55}{6}\right) & \frac{14}{3} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{116}{9} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{62}{3}\right) \\ \frac{32}{9} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{62}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{251}{111} & \frac{286}{37} \\ 0 & 0 & \frac{155}{111} & \frac{166}{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ \frac{188}{111} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{286}{37} \text{ jest największe} \\ 4 \text{ kolumna z 3} \\ x_1 \text{ z } x_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & \frac{166}{37} & \frac{155}{111} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ \frac{188}{111} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{155}{111} - \left(\frac{166}{37}\right)\left(\frac{37}{286}\right)\left(\frac{251}{111}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ \frac{188}{111} - \left(\frac{166}{37}\right)\left(\frac{37}{286}\right)\left(\frac{356}{111}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład 8 - Wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{143} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ -\frac{24}{143} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-38 - (4)(-3) - (-6)(1) - (1)(-2)}{-18} = 1 \\ \frac{\frac{62}{3} - \left(\frac{55}{6}\right)(-2) - (2)(1)}{-\frac{37}{3}} = -3 \\ \frac{\frac{356}{111} - \frac{251}{111}(-2)}{\frac{286}{37}} = 1 \\ -\frac{24}{143} \left(\frac{143}{12}\right) = -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

09:56

- Jest to zmodyfikowana metoda eliminacji Gaussa równań $Ax=b$
- Dąży się do sprowadzenia macierzy A do postaci diagonalnej jedynekowej
- Wtedy w wyniku przekształceń wektor b będzie zawierał wartości przyporządkowywane x w wyniku rozwiązania
- Przed przystąpieniem do obliczeń w przypadku gdy na przekątnej znajdują się elementy zerowe należy odpowiednio przekształcić macierz A
- Metoda ta w literaturze występuje jako metoda Jordana lub metoda eliminacji zupełnej

Metoda eliminacji

09:56

Gaussa-Jordana

Algorytm rozwiązywania

1. Dzieli się wszystkie elementy macierzy **A** i wektora **b** z **i=1** wiersza przez element **a₁₁**
2. Od każdego elementu **i=2,3..n** wiersza macierzy **A** i wektora **b** odejmuje się pierwszy element wiersza pomnożony przez odpowiadający mu element pierwszego wiersza
3. W kolejnych krokach powtarza się czynność traktując elementy z przekątnej jako wyjściowe
4. W efekcie elementy poza przekątną macierzy **A** są zerowane, a na przekątnej przyjmują wartość 1, natomiast elementy wektora **b** dążą do rozwiązywania układu równań

Algorytm metody

for $i = 1 : n$

$dzielnik = A(i, i)$

for $j = i : n$

$$A(i, j) = \frac{A(i, j)}{dzielnik}$$

$$b(i) = \frac{b(i)}{dzielnik}$$

for $j = 1 : n$

if $j \neq i$

$mnoznik = A(j, i)$

for $k = i : n$

$$A(j, k) = A(j, k) - mnoznik \cdot A(i, k)$$

$$b(k) = b(k) - mnoznik \cdot b(i)$$

Przykład 9

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \begin{array}{l} /a_{11} \text{ (w pierwszej kolejności)} \\ a_{2i} - a_{21} * a_{1i} \\ a_{3i} - a_{31} * a_{1i} \\ a_{4i} - a_{41} * a_{1i} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 6/6 & -2/6 & 2/6 & 4/6 \\ 12 - 12/1 & -8 - 12(-2/6) & 6 - 12(2/6) & 10 - 12(4/6) \\ 3 - 3/1 & -13 - 3(-2/6) & 9 - 3(2/6) & 3 - 3(4/6) \\ -6 + 6/1 & 4 + 6(-2/6) & 1 + 6(2/6) & -18 + 6(2/6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/6 \\ 34 - 12(12/6) \\ 27 - 3(12/6) \\ -38 + 6(2/6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \begin{array}{l} a_{1i} - a_{12} * a_{2i} \\ /a_{22} \text{ (w pierwszej kolejności)} \\ a_{3i} - a_{32} * a_{2i} \\ a_{4i} - a_{42} * a_{2i} \end{array}$$

Przykład 9

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & -4/-4 & 2/-4 & 2/-4 \\ 0 & -12 - (-12)(1) & 8 - (-12)\left(-\frac{1}{2}\right) & 1 - (-12)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 2 - (2)(1) & 3 - (2)\left(-\frac{1}{2}\right) & -14 - (2)\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 10/-4 \\ 21 - (-12)\left(-\frac{5}{2}\right) \\ -26 - (2)\left(-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ 5 \\ -\frac{5}{2} \\ -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i} - a_{13} * a_{3i} \\ a_{2i} - a_{23} * a_{3i} \\ /a_{33} \text{ (w pierwszej kolejności)} \\ a_{4i} - a_{43} * a_{3i} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} - \frac{1}{6} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 0 & 0 & 2/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 4 - 4 & -13 - 4\left(-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ -9/2 \\ -21 - 4\left(-\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix}$$

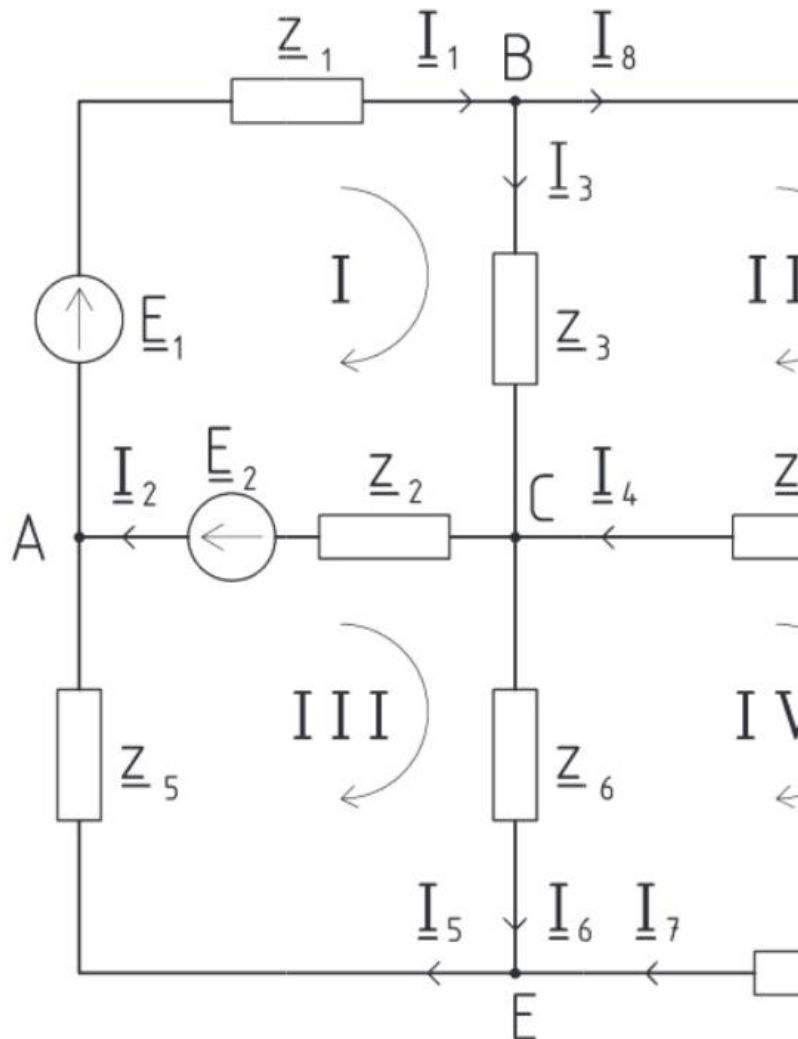
Przykład 9

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} \\ \frac{19}{4} \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i} - a_{14} * a_{4i} \\ a_{2i} - a_{24} * a_{4i} \\ a_{3i} - a_{34} * a_{4i} \\ /a_{44} \text{ (w pierwszej kolejności)} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} - \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} + \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3/-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} - \frac{11}{12} \\ \frac{19}{4} - \frac{7}{4} \\ 9 - \frac{5}{2} \\ -3/-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Weryfikacja metod



"Wyniki z metody prądów oczkowych:"

"wartości zespolone prądów:"

I	$7.7876106 + 3.1858407i$
II	$12.256637 + 6.1504425i$
III	$5.4424779 + 8.3628319i$
I	$1.5929204 - 3.8938053i$
II	$-4.4690265 - 2.9646018i$
III	$-5.2212389 - 1.6814159i$
I	$0.7522124 - 1.2831858i$
II	$2.3451327 - 5.1769912i$

"wartości skuteczne prądów:"

I	8.4140632
II	13.713245
III	9.9778516
I	4.2070316
II	5.3629341
III	5.4852981
I	1.4874103
II	5.6833868

Układ równań liniowych

09:56

$$\begin{array}{rcccccccl} I_1 Z_1 & + & I_2 Z_2 & + & I_3 Z_3 & = & E_1 + E_2 \\ -I_3 Z_3 & + & I_4 Z_4 & + & I_8 Z_8 & = & 0 \\ -I_2 Z_2 & + & I_5 Z_5 & + & I_6 Z_6 & = & -E_2 \\ -I_4 Z_4 & - & I_6 Z_6 & + & I_7 Z_7 & = & 0 \\ -I_1 & + & I_2 & + & I_5 & = & 0 \\ I_1 & - & I_3 & - & I_8 & = & 0 \\ -I_4 & - & I_7 & + & I_8 & = & 0 \\ -I_5 & + & I_6 & + & I_7 & = & 0 \end{array}$$

1. Zgodnie z I prawem Kirchhoffa układu się o jedno równanie mniej niż jest węzłów
2. Zgodnie z II prawem Kirchhoffa układu się tyle równań ile jest oczek niezależnych

Macierzowy układ równań

$$\begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_3 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & Z_8 \\ 0 & -Z_2 & 0 & 0 & Z_5 & Z_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z_4 & 0 & -Z_6 & Z_7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 + E_2 \\ 0 \\ -E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Macierzowy układ równań

```
//Wektor Napięć i Prądów Źródłowych
```

```
b=[E1+E2;0;-E2;0;0;0;0;0];
```

```
nb=[E1+E2;-E2;0;0;0;0;0;0];
```

```
0,-Z2,0,0,Z5,Z6,0,0; //3
```

```
...0,0,0,-Z4,0,-Z6,Z7,0; //4
```

```
...-1,1,0,0,1,0,0,0; //5
```

```
...1,0,-1,0,0,0,0,-1; //6
```

```
...0,0,0,-1,0,0,-1,1; //7
```

```
...0,0,0,0,-1,1,1,0]; //8
```

```
nZ=[Z1,Z2,Z3,0,0,0,0,0; //1
```

```
...0,-Z2,0,0,Z5,Z6,0,0; //3
```

```
...1,0,-1,0,0,0,0,-1; //6
```

```
...0,0,-Z3,Z4,0,0,0,Z8; //2
```

```
...-1,1,0,0,1,0,0,0; //5
```

```
...0,0,0,0,-1,1,1,0; //8
```

```
...0,0,0,-Z4,0,-Z6,Z7,0; //4
```

```
...0,0,0,-1,0,0,-1,1]; //7
```

$$\begin{array}{ccc|c}
 0 & 0 & 0 & I_1 \\
 Z_6 & 0 & 0 & I_2 \\
 0 & 0 & -1 & I_3 \\
 0 & 0 & Z_8 & I_4 \\
 0 & 0 & 0 & I_5 \\
 1 & 1 & 0 & I_6 \\
 -Z_6 & Z_7 & 0 & I_7 \\
 0 & -1 & 1 & I_8
 \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} E_1 + E_2 \\ -E_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Metoda rozkładu LU

```
--> round(L*U)
```

```
ans =
```

```

10. + 0.i    0. + 10.i    0. - 10.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. - 10.i    0. + 0.i    0. + 0.i    10. + 0.i    0. - 10.i    0. + 0.i    0. + 0.i
1. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 10.i    20. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 10.i
-1. + 0.i    1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    1. + 0.i    1. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -20. + 0.i    0. + 0.i    0. + 10.i    20. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    1. + 0.i

```

```
--> round(U*100)/100
```

```
--> nZ
```

```
nZ =
```

```

10. + 0.i    0. + 10.i    0. - 10.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. - 10.i    0. + 0.i    0. + 0.i    10. + 0.i    0. - 10.i    0. + 0.i    0. + 0.i
1. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 10.i    20. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 10.i
-1. + 0.i    1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    1. + 0.i    1. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -20. + 0.i    0. + 0.i    0. + 10.i    20. + 0.i    0. + 0.i
0. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    0. + 0.i    0. + 0.i    -1. + 0.i    1. + 0.i

```

```
22 .....end
```

```
23 ....end
```

```
24 endfunction
```

Obliczanie prądów

09:56

```
7.7876106 + 3.1858407i  
12.256637 + 6.1504425i  
5.4424779 + 8.3628319i  
1.5929204 - 3.8938053i  
-4.4690265 - 2.9646018i  
-5.2212389 - 1.6814159i  
0.7522124 - 1.2831858i  
2.3451327 - 5.1769912i
```

```
8.4140632  
13.713245  
9.9778516  
4.2070316  
5.3629341  
5.4852981  
1.4874103  
5.6833868
```

"Wyniki z metody prądów oczkowych:"

"wartości zespolone prądów:"

```
7.7876106 + 3.1858407i  
12.256637 + 6.1504425i  
5.4424779 + 8.3628319i  
1.5929204 - 3.8938053i  
-4.4690265 - 2.9646018i  
-5.2212389 - 1.6814159i  
0.7522124 - 1.2831858i  
2.3451327 - 5.1769912i
```

"wartości skuteczne prądów:"

```
8.4140632  
13.713245  
9.9778516  
4.2070316  
5.3629341  
5.4852981  
1.4874103  
5.6833868
```

domych

Obliczanie funkcjami

09:56

```
Nan + Nani ))/100
```

```
Nan + Nani
```

```
Nan + Nani
```

```
Nan + Nani 10. 0. 0. 0. 0. 0.
```

```
Nan + Nani 0. 0. 10. 10. 0. 0.
```

```
Nan + Nani 10. 20. 0. 0. 0. 10.
```

```
Nan + Nani 0. 20. 0. 10. 20. 0.
```

```
Nan + Nani 0. 0. 2.236068 1. 2. 1.
```

```
Nan + Nani 0. 0. 0. 0.6324555 2. 0.6324555
```

```
0. 0. 0. 0. 3.6055513 1.
```

```
Nan 0. 0. 0. 0. 0. 1.474136
```

```
Nan
```

```
Nan I) ;
```

```
Nan OS (I1) ) ;
```

```
Nan
```

```
Nan
```

```
Nan
```

```
Nan
```

ci urojonej

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

09:56

"Wyniki z metody prądów oczkowych:"

"wartości zespolone prądów:"

```
7.7876106 + 3.1858407i
12.256637 + 6.1504425i
5.4424779 + 8.3628319i
1.5929204 - 3.8938053i
-4.4690265 - 2.9646018i
-5.2212389 - 1.6814159i
0.7522124 - 1.2831858i
2.3451327 - 5.1769912i
```

"wartości skuteczne prądów:"

```
8.4140632
13.713245
9.9778516
4.2070316
5.3629341
5.4852981
1.4874103
5.6833868
```

```
6    -2    2
2    -8    6
3   -13    9
-6     4    1
```

x,y)-D*A(i,y);

(i);

```
7.7876106 + 3.1858407i
12.256637 + 6.1504425i
5.4424779 + 8.3628319i
1.5929204 - 3.8938053i
-4.4690265 - 2.9646018i
-5.2212389 - 1.6814159i
0.7522124 - 1.2831858i
2.3451327 - 5.1769912i
```

```
8.4140632
13.713245
9.9778516
4.2070316
5.3629341
5.4852981
1.4874103
5.6833868
```

Część II

Linsolve

○W środowisku obliczeniowym Scilab dostępna jest funkcja rozwiązująca dowolne układy równań liniowych zapisanych w postaci równania macierzowego $Ax+b=0$

○Składnia polecenia:

$x=linsolve(A,b)$;

○Gdzie: parametrami wejściowymi jest macierz A i wektor b .
Macierz i wektor muszą mieć zgodną liczbę kolumn i wierszy.
Macierz A jest macierzą kwadratową.

○Przy powszechnie stosowanym zapisie układu równań liniowych $Ax=b$ funkcję wywołuje się:

$x=linsolve(A,-b)$;

○W efekcie działania otrzymujemy wektor wartości stanowiących rozwiązanie układu równań.

Testowe układy równań

$$A \rightarrow \begin{vmatrix} 15 & 1 & -8 & -6 \\ 1 & -6 & 4 & 3 \\ -8 & 4 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$B \rightarrow \begin{vmatrix} 15 & 1 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$C \rightarrow \begin{vmatrix} 15 & -4 & 2 & -6 \\ 8 & -6 & 4 & 3 \\ -8 & -4 & 4 & 1 \\ -6 & 9 & -1 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Szacowanie błędu

Za pomocą funkcji Scilab'a wyznaczającego normę można w prosty sposób oszacować błąd obliczeń sprawdzając rozwiązanie równania: $d = \text{norm}(A \cdot x - b)$;

```

1 clear;clc;
2 A=[15,1,-8,-6;1,-6,4,3;-8,4,4,1;-6,3,1,9];
3 B=[15,1,-8,-6;0,-6,4,3;0,0,4,1;0,0,0,9];
4 C=[15,-4,2,-6;8,-6,4,3;-8,-4,4,1;-6,9,-1,9];
5 b=[10;-10;20;5];
6 x1=linsolve(A,-b);
7 n1=norm(A*x1-b);
8 x2=linsolve(B,-b);
9 n2=norm(B*x2-b);
10 x3=linsolve(C,-b);
11 n3=norm(C*x3-b);
12 disp('Rozwiązanie równania 1:',x1);
13 disp('Błąd obliczeń norm='+string(n1));
14 disp('Rozwiązanie równania 2:',x2);
15 disp('Błąd obliczeń norm='+string(n2));
16 disp('Rozwiązanie równania 3:',x3);
17 disp('Błąd obliczeń norm='+string(n3));

```

"Rozwiązanie równania 3:"

-0.7910943

4.8626243

9.2325912

-3.8086215

"Błąd obliczeń norm=2.752D-14"

Metody iteracyjne

- W praktyce obliczeniowej pojawiają się jednak dość często układy równań liniowych, których wymiar (macierzy **A**) jest rzędu **10^3** lub nawet większy.
- Prawie zawsze macierze wielkich układów liniowych nie są macierzami pełnymi, ale rzadkimi, tzn. mają niewiele elementów niezerowych.
- Jednym ze sposobów rozwiązywania wielkich układów równań jest stosowanie metod iteracyjnych.

Metody iteracyjne

- Metody iteracyjne zwracają przybliżony wynik rozwiązania po określonej liczbie kroków, lub po osiągnięciu żądanej dokładności
- W metodach iteracyjnych dochodzi się wyznaczając kolejne przybliżenia rozwiązania.
- Wymagane jest więc przyjęcie wartości początkowych obliczeń,

Metody iteracyjne

- Określenie ε jako warunku zbieżności uzyskanego rozwiązania (określana jest graniczna różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami rozwiązania)
- Jeżeli oczekiwana dokładność ε nie jest zbyt duża można bardzo szybko dojść do rozwiązania.

Ogólna metoda iteracyjna

○ Dla ustalonej macierzy Q równanie $Ax=b$ można zapisać w postaci iteracyjnej:

$$x^{(k)} = (I - Q^{-1}A) x^{(k-1)} + Q^{-1}b, \text{ dla } k \geq 1$$

○ Wektor początkowy $x^{(0)}$ może być dowolny, ale wskazane jest ustawienie wartości przewidywanych

○ Metoda iteracyjna jest zbieżna, jeżeli ciąg $\{x^{(k)}\}$ jest zbieżny do x dla dowolnego wektora startowego $x^{(0)}$

Ogólna metoda iteracyjna

Macierz Q powinna spełniać więc następujące warunki:

1. Obliczanie przybliżeń $\mathbf{x}^{(k)}$ powinno być matematycznie łatwe

2. Ciąg $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ powinien być szybko zbieżny

Warunek będzie spełniony w sytuacji gdy macierz Q^{-1} jest dobrym przybliżeniem macierzy A^{-1}

Aby istniało rozwiązanie macierze A i Q muszą być nieosobliwe i na przekątnej diagonalnej posiada elementy niezerowe.

Metody iteracyjne

Znalezienie rozwiązania układu równań liniowych opisanych równaniem macierzowym:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

srowadza się do przekształcenia powyższego równania do postaci:

$$\mathbf{x}^*=\mathbf{Bx}+\mathbf{c}$$

gdzie sposób wyznaczenia macierzy $\mathbf{B}$ i wektora $\mathbf{c}$ jest uzależniony od zastosowanej metody.

Warunkiem wystarczającym zbieżności metody iteracyjnej jest aby dowolna norma macierzy $\mathbf{B}$ była mniejsza od jedności.

Metoda Richardsona

W metodzie Richardsona za macierz Q przyjmuje się macierz jednostkową

Równanie iteracyjne przyjmuje postać:

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{r}^{(k-1)}$$

$$\text{gdzie } \mathbf{r}^{(k-1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}$$

Warunkiem zbieżności rozwiązania jest spełnienie nierówności $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\| < 1$

Algorytm metody Richardsona

Dane wejściowe $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$,

n – liczba równań (niewiadomych)

for $i = 1:n$

$$suma(i) = b(i) - \sum_{j=1}^n a(i,j) \cdot x_k(i)$$

$$x_{k+1}(i) = x_k(i) + suma(i)$$

Metoda Richardsona

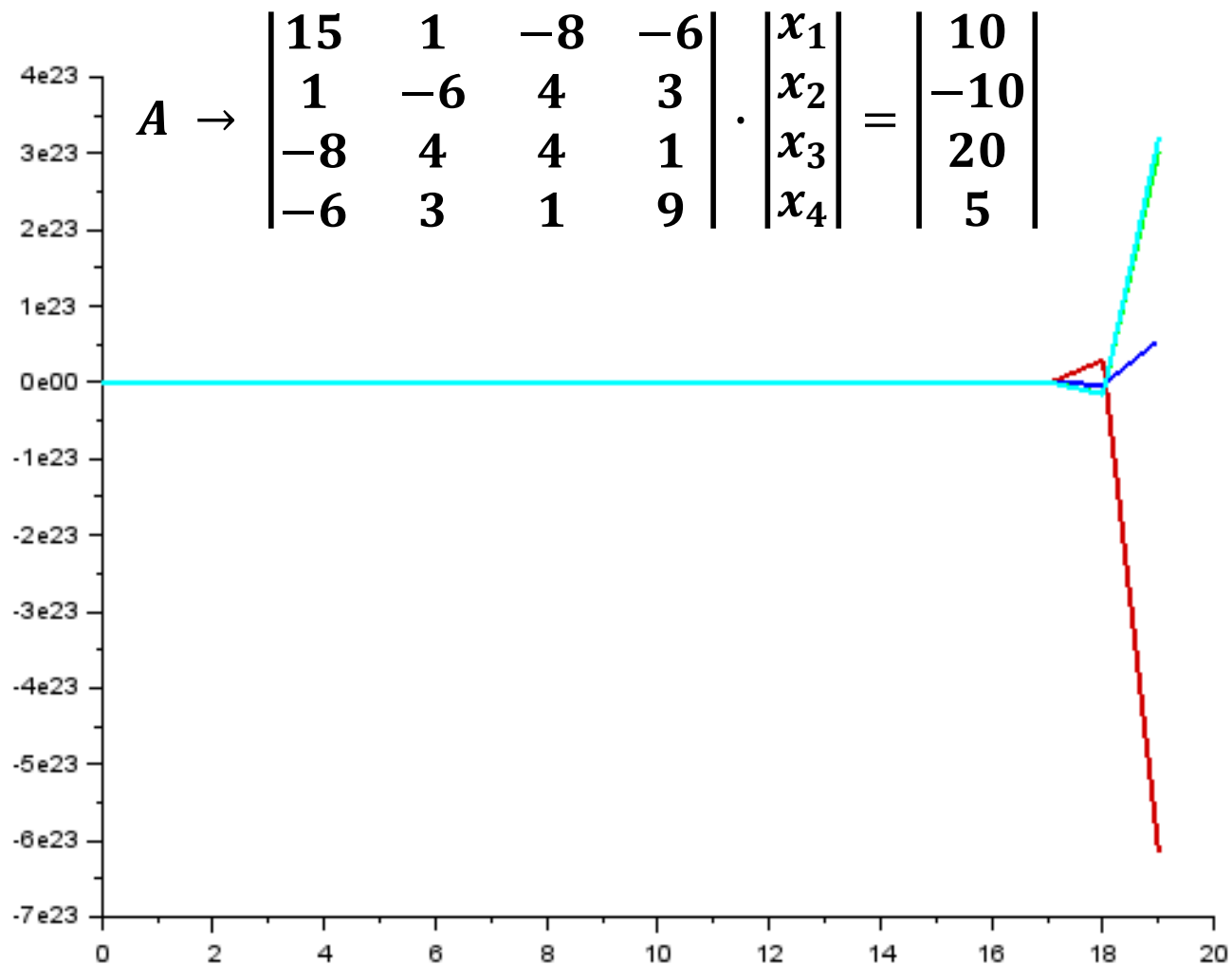
09:56

```
7  for k=1:m-1
8      for i=1:4
9          c=0
10         for j=1:4
11             c=c+A(i,j)*x(j,k);
12         end
13         r(i)=b(i)-c;
14     end
15     for i=1:4
16         x(i,k+1)=x(i,k)+r(i);
17     end
18 end
```

```
for i=1:M
    x=(I-A)*xm+b;
    xm=x;
end
```

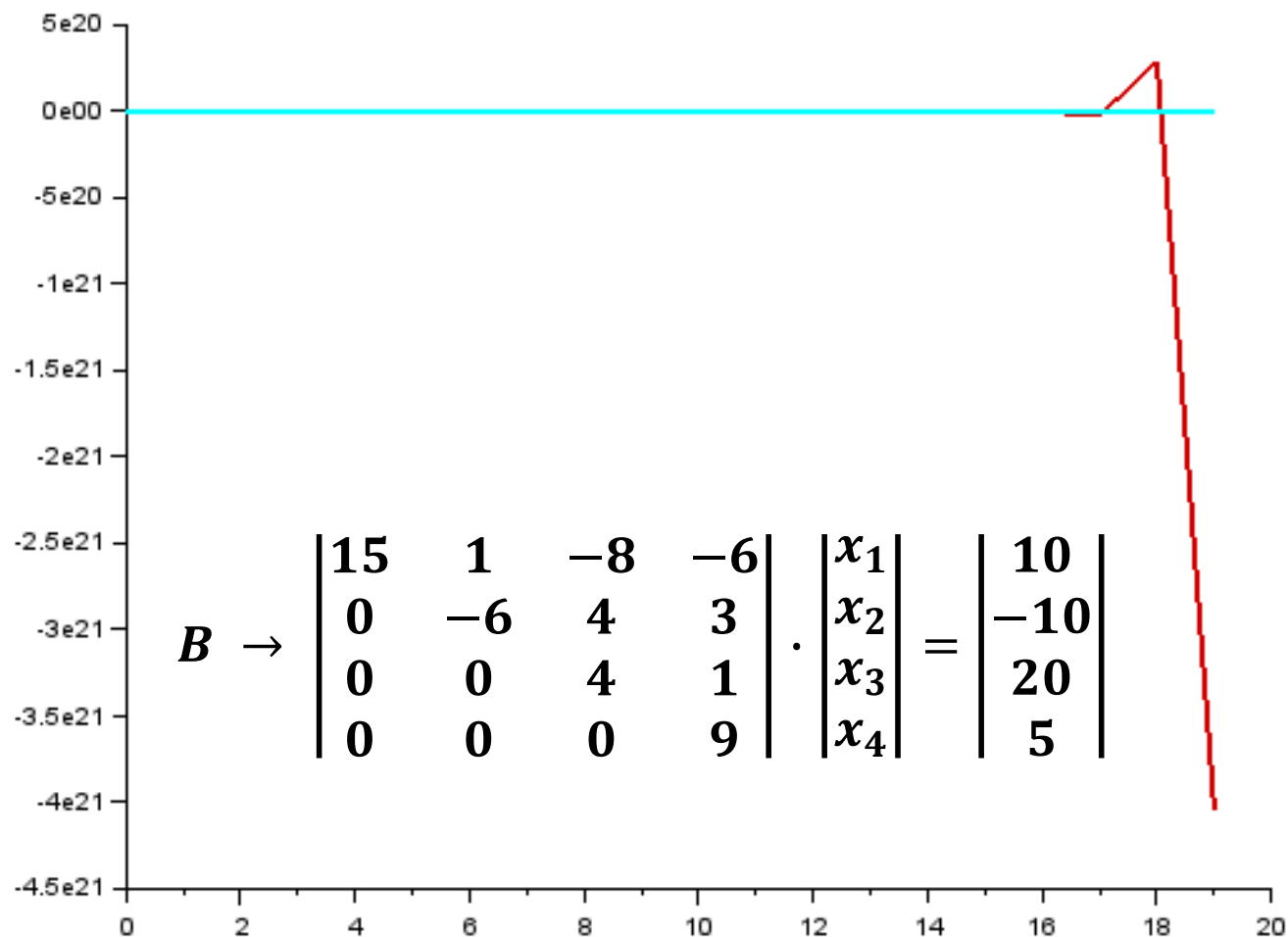
Przykład A

09:56



Przykład B

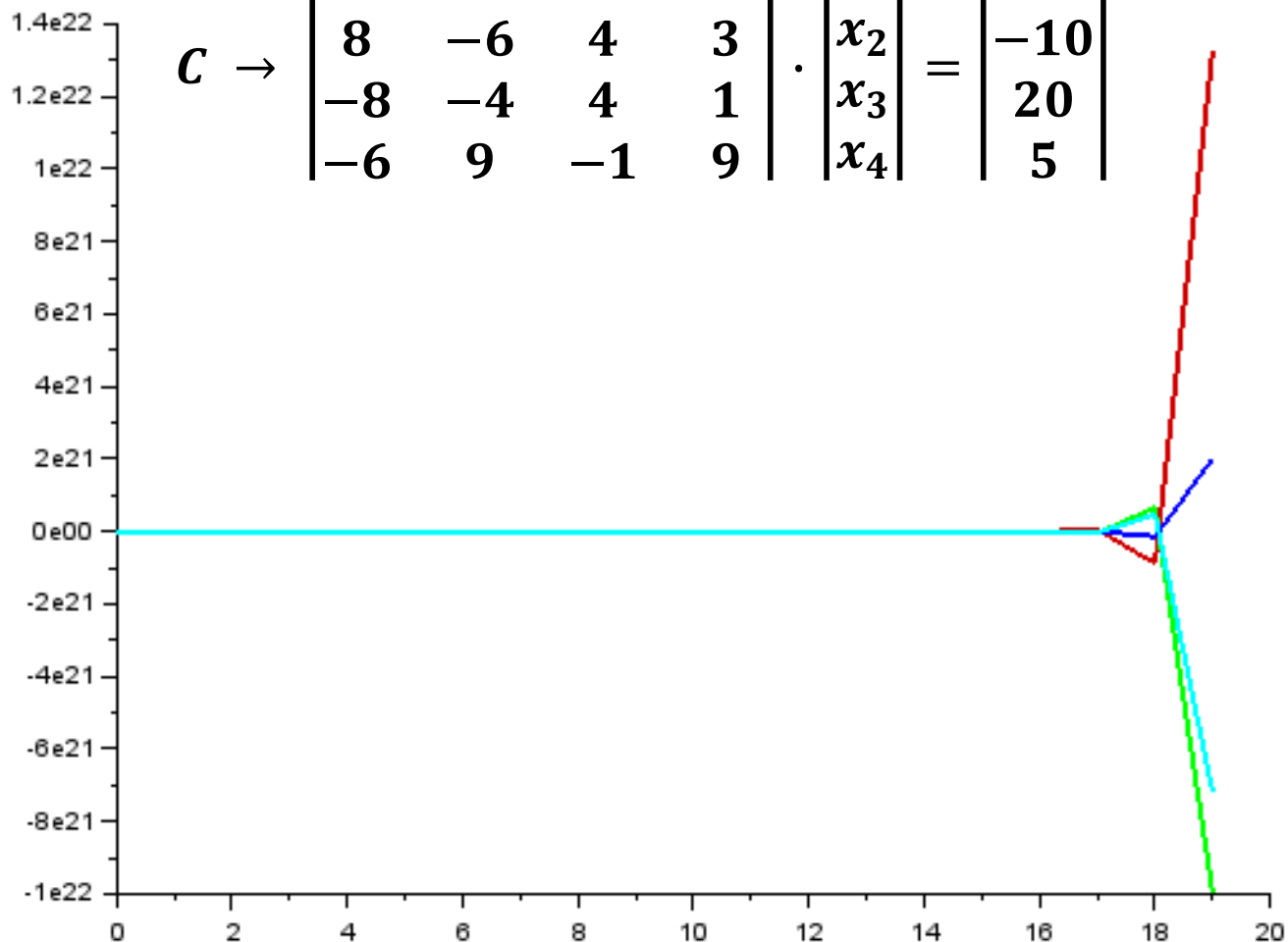
09:56



Przykład C

09:56

$$C \rightarrow \begin{vmatrix} 15 & -4 & 2 & -6 \\ 8 & -6 & 4 & 3 \\ -8 & -4 & 4 & 1 \\ -6 & 9 & -1 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$



Metoda Jacobiego

W pierwszym kroku zastępuje się macierz **A** układem równoważnym w postaci **L + D + U**

Gdzie **L** jest macierzą trójkątną dolną, **D** – macierzą diagonalną, a **U** macierzą trójkątną górną.

Układ równań w postaci **Ax=b** można więc zapisać jako:

$$(L+D+U) \mathbf{x}=\mathbf{b}$$

Metoda Jacobiego

Układ równań $(L+D+U)x=b$ można przekształcić do postaci:

$$Dx^* = -(L+U)x + b$$

Jeżeli macierz D jest nieosobliwa możemy układ równań zapisać jako:

$$x^* = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \rightarrow Bx + c$$

Istotne jest więc takie przekształcenie macierzy A (działaniami elementarnymi) aby na przekątnej nie było wyrazów 0 .

Metoda Jacobiego

Równanie macierzowe można zapisać w postaci iteracyjnej:

$$D\mathbf{x}^{(i+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b}$$

otrzymujemy:

$$a_{kk}x_k^{(i+1)} = -\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j^{(i)} + \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j^{(i)}\right) + b_k, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n$$

w efekcie końcowy dochodzimy do:

$$x_k^{(i+1)} = \frac{-\sum_{(j=1, j \neq k)}^n a_{kj}x_j^{(i)} + b_k}{a_{kk}}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n; a_{kk} \neq 0$$

Metoda Jacobiego - zbieżność

Rozwiązanie danego równania $Ax=b$ metodą Jacobiego jest zbieżne jeżeli macierz A jest nieredukowalna i diagonalnie dominująca.

Metoda Jacobiego

Macierz A jest nieredukowalna, jeżeli poprzez przestawienie wierszy i kolumn nie można jej sprowadzić do postaci blokowej górnej trójkątnej.

Macierz A o wymiarze $n \times n$ nazywamy diagonalnie dominującą, jeśli dla $i=1,2,\dots,n$ zachodzi nierówność:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1 \atop (j \neq i)}^n |a_{ij}|$$

Algorytm metody Jacobiego

Dane wejściowe $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$,

n – liczba równań (niewiadomych)

for $i = 1:n$

$$suma(i) = \sum_{j=1, (j \neq i)}^n a(i, j) \cdot x_k(j)$$

$$x_{k+1}(i) = \frac{b(i) - suma(i)}{a(i, i)}$$

Metoda Jacobiego

09:56

```
7 for k=2:m
8     for i=1:4
9         c=0
10        for j=1:4
11            if j==i then continue;
12        end
13        c=c+(A(i,j)*x(j,k-1));
14    end
15    x(i,k)=(b(i)-c)/A(i,i);
16 end
17 end
18 plot2d(t, [x(1,:) ', x(2,:) ', x(3,:) ', x(4,:) ']);
```

Metoda Jacobiego

09:56

```
10 for i=1:M
11     x=-D^-1*(L+U)*xm+D^-1*b;
12     xm=x;
13 end
```

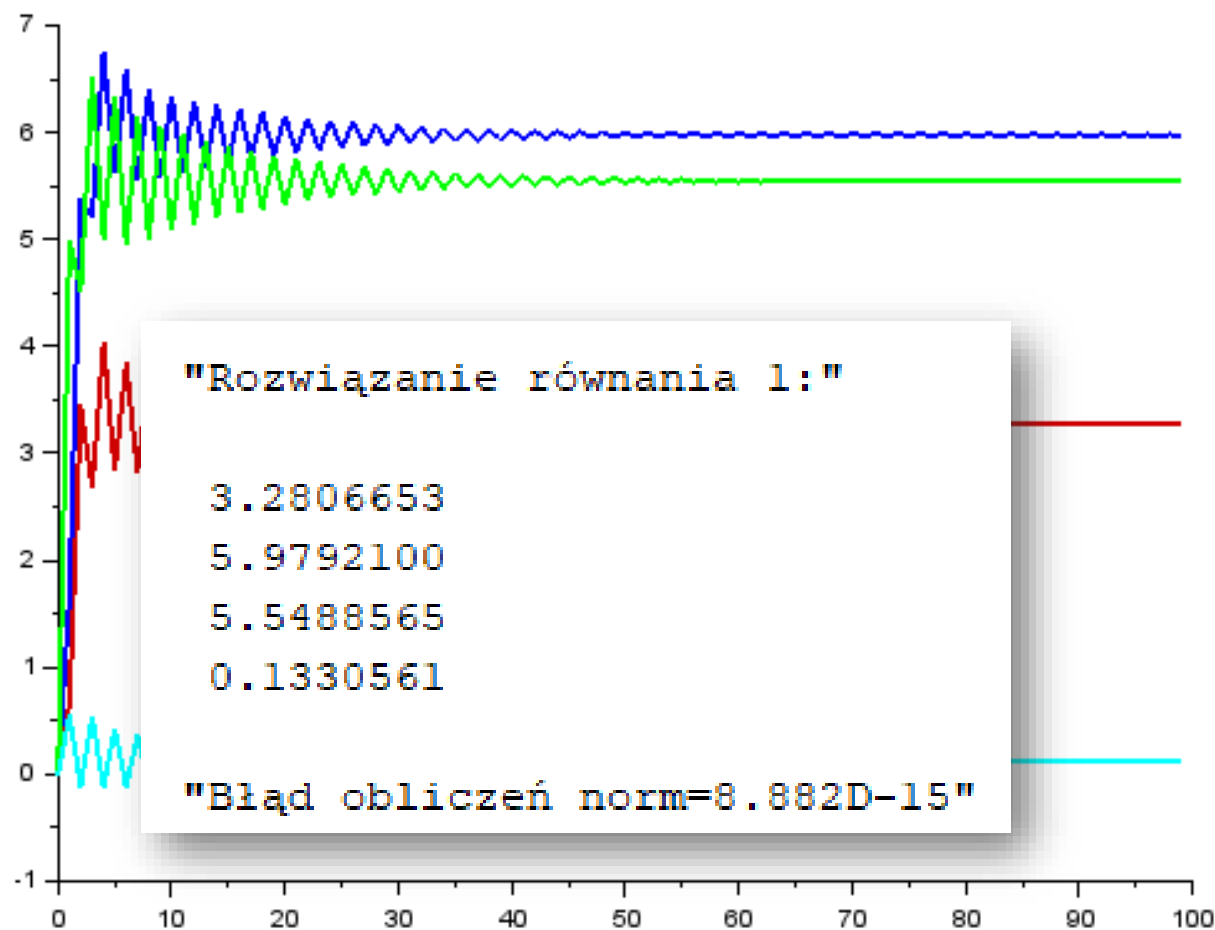
$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 1 & -8 & -6 \\ 1 & -6 & 4 & 3 \\ -8 & 4 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

U

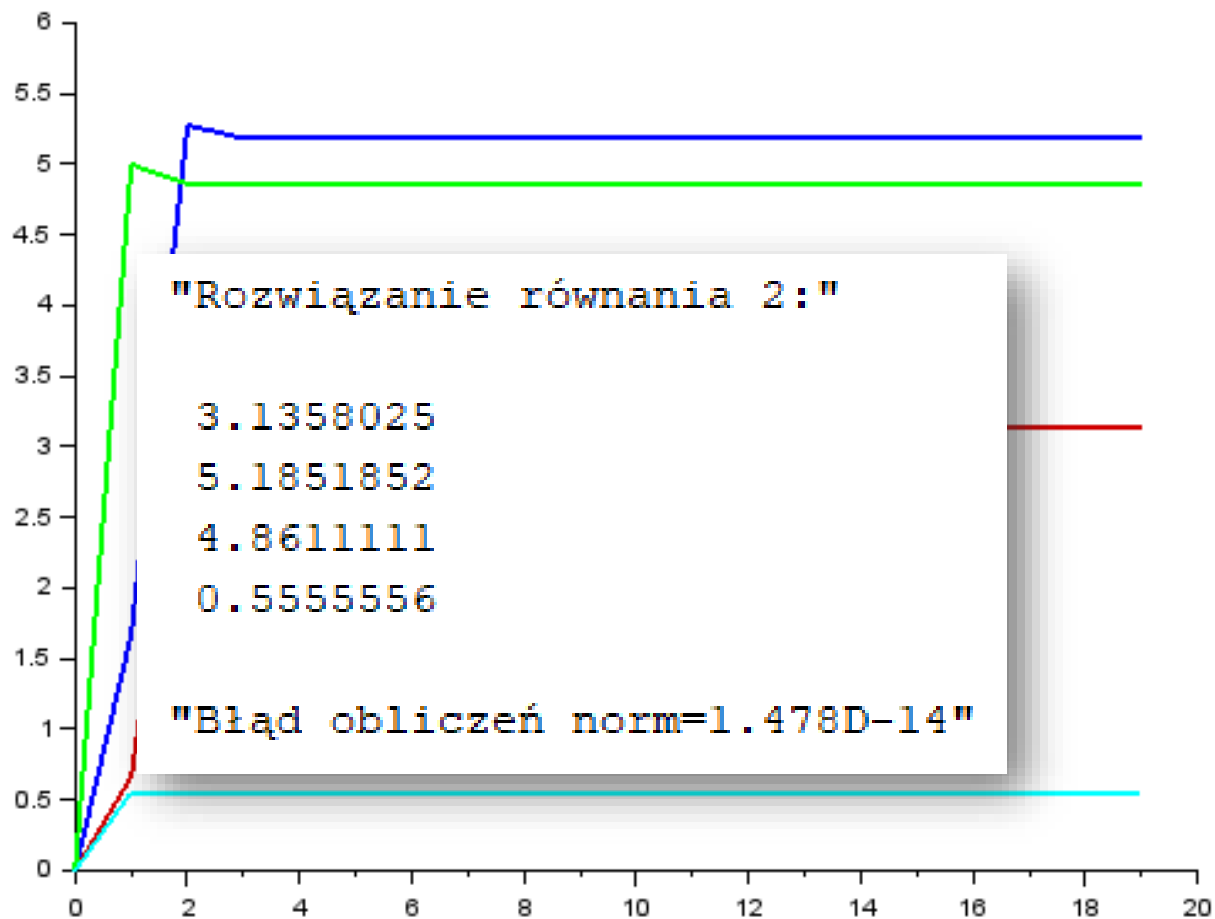
L

D

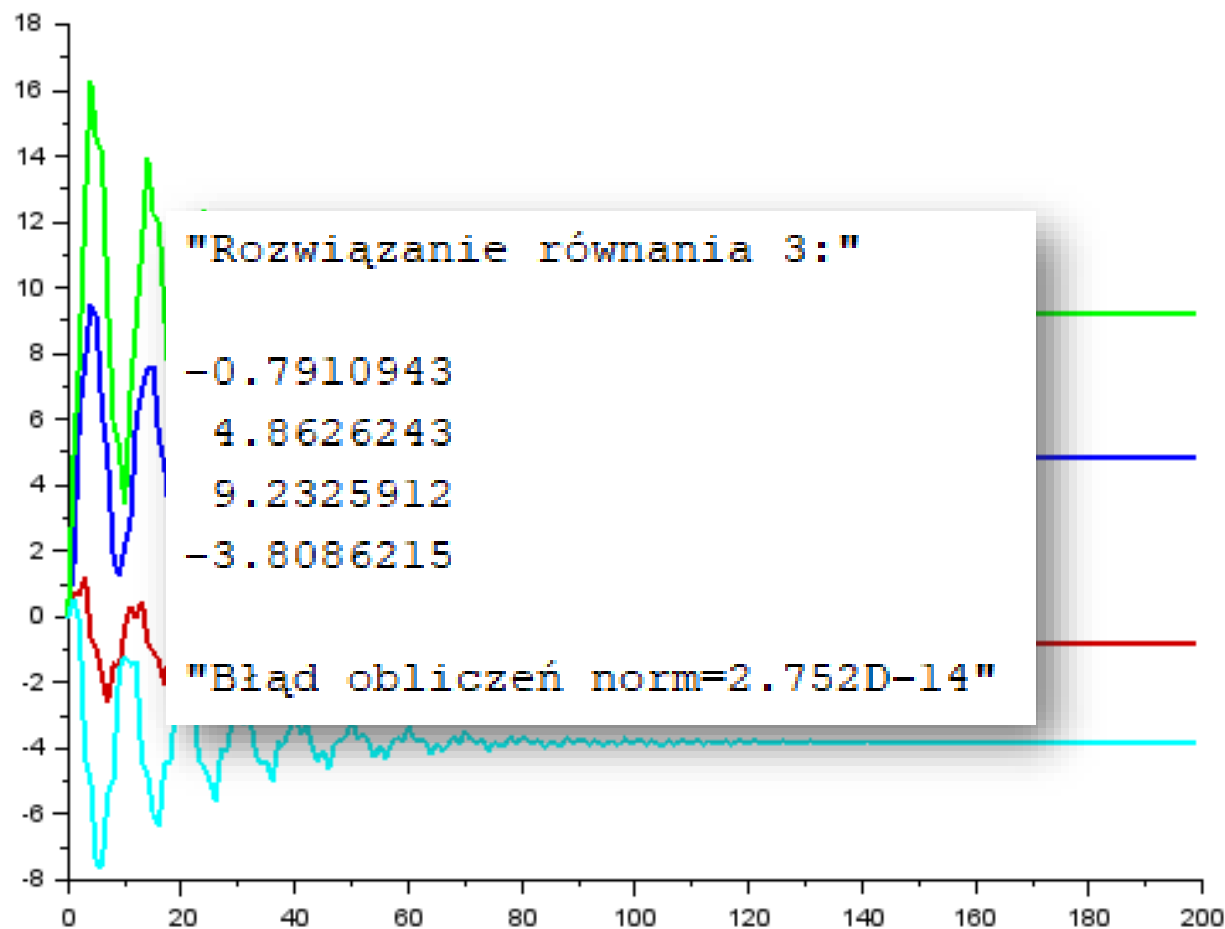
Przykład A



Przykład B



Przykład C



Metoda Gaussa-Seidela

Jest modyfikacją metody Jacobiego.

Wychodząc z równania:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

można zależność tą zapisać w postaci:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \mathbf{x}^{(i+1)} = -\mathbf{U} \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b},$$

a stąd:

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U} \mathbf{x}^{(i)} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{B} \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}$$

Aby macierz $\mathbf{B}$ było dobrze określona $a_{ii} \neq 0$ 112

Metoda Gaussa-Seidela

Ciąg rozwiązań można zapisać:

$$D\mathbf{x}^{(i+1)} = -L\mathbf{x}^{(i+1)} - U\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \\ x_3^{i+1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \\ x_3^{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}x_1^{i+1} = -a_{12}x_2^i - a_{13}x_3^i + b_1$$

$$a_{22}x_2^{i+1} = -a_{21}x_1^{i+1} - a_{23}x_3^i + b_2$$

$$a_{33}x_3^{i+1} = -a_{31}x_1^{i+1} - a_{32}x_2^{i+1} + b_3$$

Metoda Gaussa-Seidela

Iteracyjną postać wyznaczania poszczególnych przybliżeń rozwiązania układu równań liniowych można po przekształceniach zapisać:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$

Algorytm metody Gaussa-Seidela

Dane wejściowe $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$,

n – liczba równań (niewiadomych)

for $i = 1:n$

$$suma_I = \sum_{j=1, (j < i)}^n a(i, j) \cdot x_{k+1}(j)$$

$$suma_{II} = \sum_{j=1, (j > i)}^n a(i, j) \cdot x_k(j)$$

$$x_{k+1}(i) = \frac{b(i) - suma_I - suma_{II}}{a(i, i)}$$

Metoda Gaussa-Seidela

```
7  for k=2:m
8      for i=1:4
9          u=0;
10         v=0;
11         for j=1:4
12             if j>=i then continue; end
13             u=u+A(i,j)*x(j,k);
14         end
15         for j=1:4
16             if j<=i then continue; end
17             v=v+A(i,j)*x(j,k-1);
18         end
19         x(i,k)=(b(i)-v-u)/A(i,i);
20     end
21 end
```

Metoda Gaussa-Seidela

```

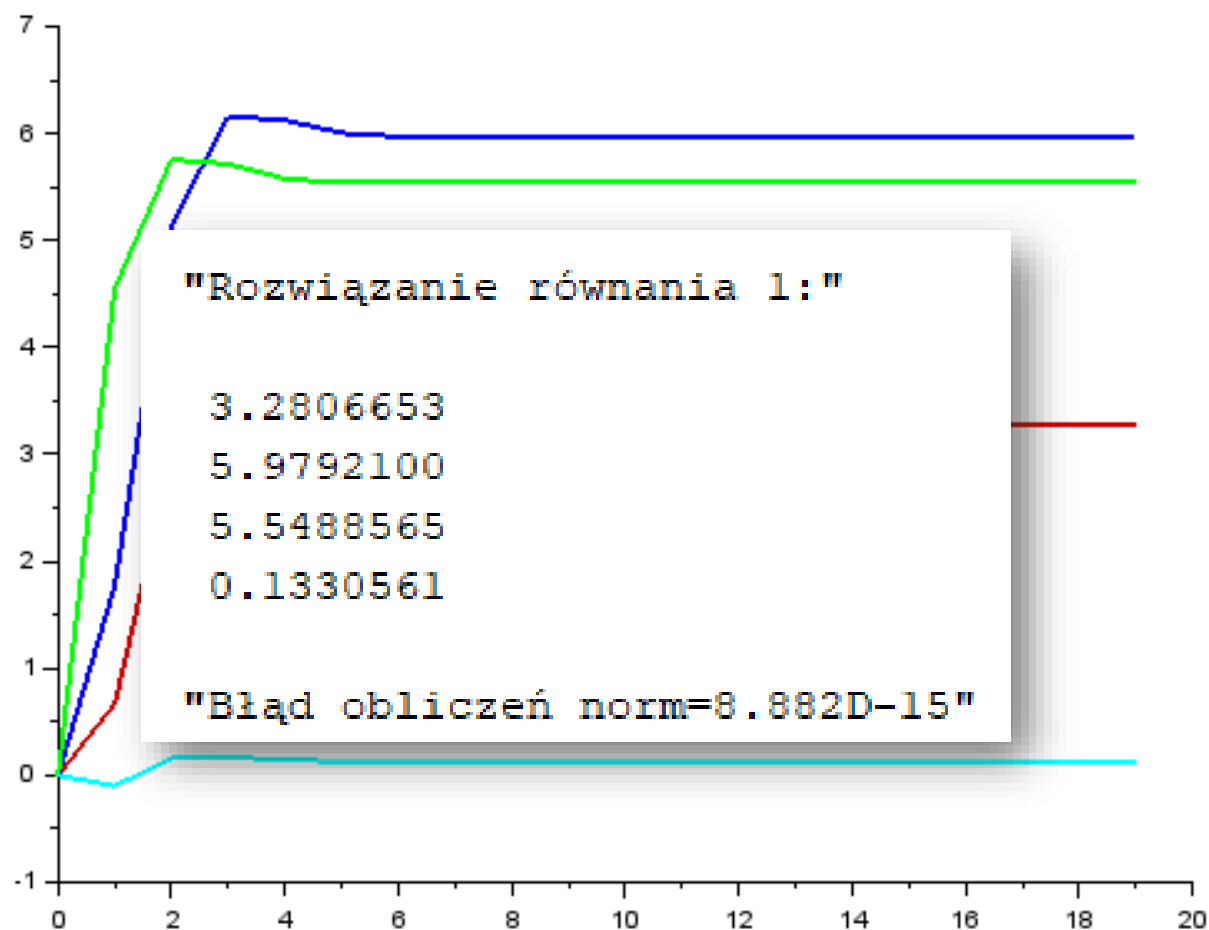
10 for i=1:M
11     ... x = -(L+D)^-1 * U * xm + (L+D)^-1 * b;
12     ... xm = x;
13 end

```

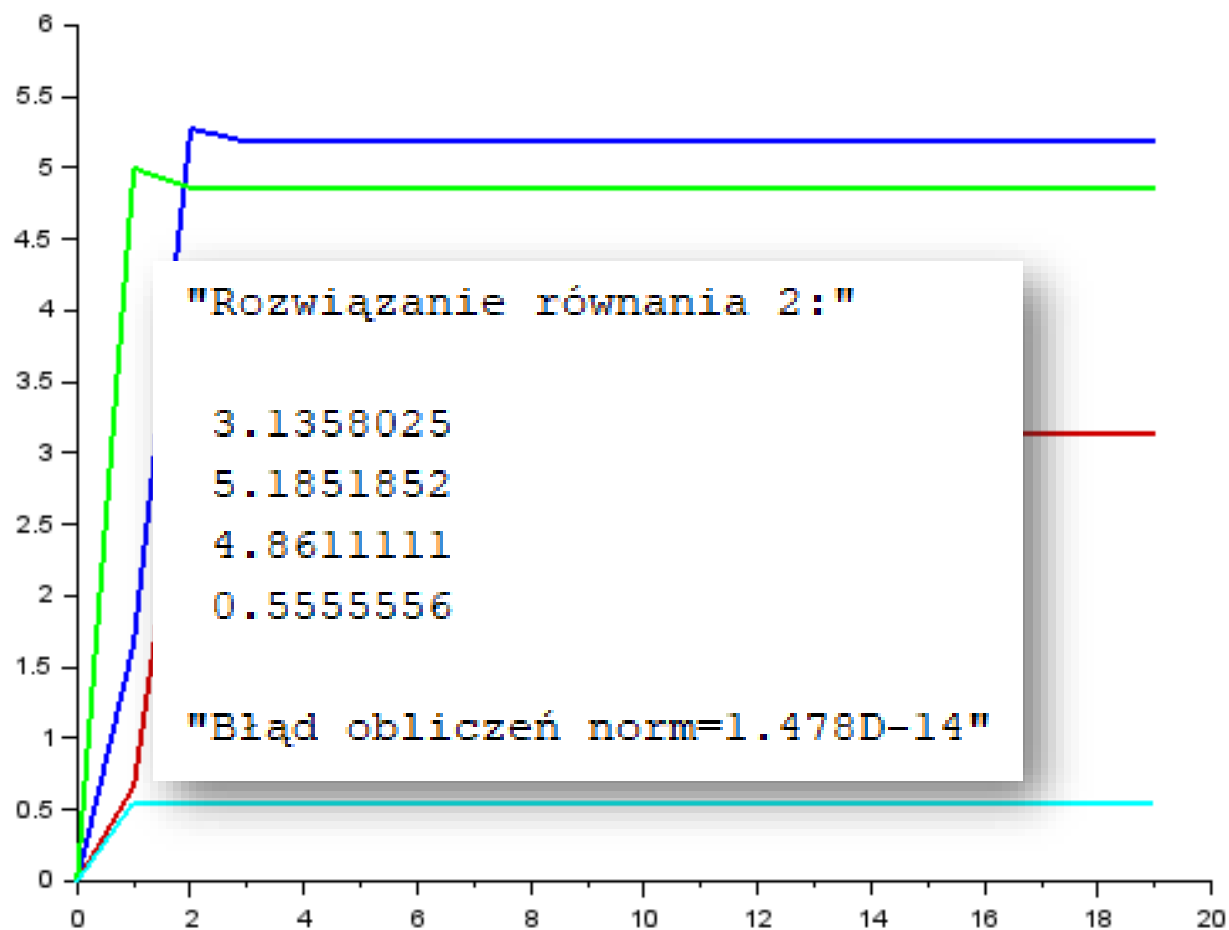
$$A \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 15 & 1 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & -6 & 4 & 3 \\ & -8 & 4 & 4 & 1 \\ & -6 & 3 & 1 & 9 \end{array} \cdot \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} = \begin{array}{c} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{array}$$

The matrix A is partitioned into three parts: L (lower triangular, green), D (diagonal, blue), and U (upper triangular, red). A black diagonal line separates L and U .

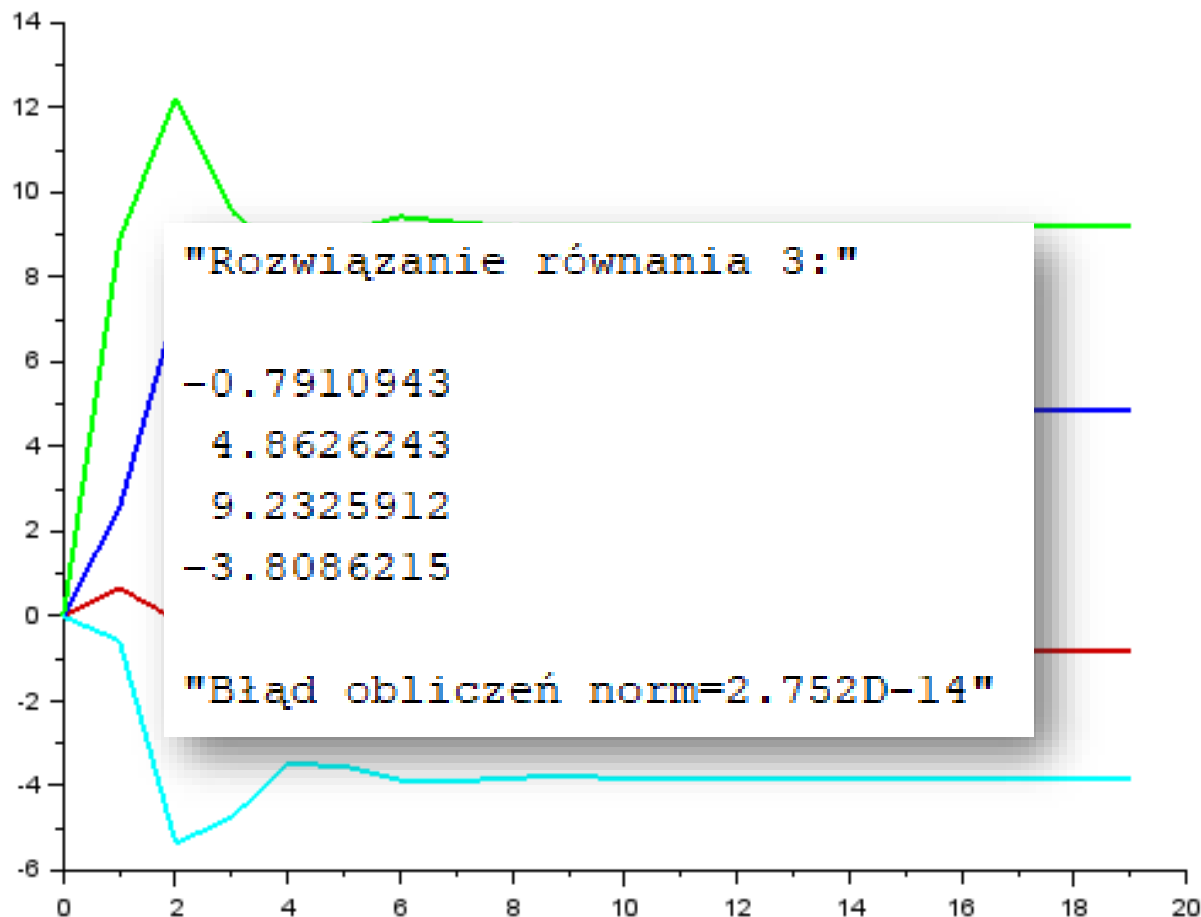
Przykład A



Przykład B



Przykład C



Metoda nadrelaksacji

- Jest to zmodyfikowana metoda Gaussa-Seidela.
- Zakłada ona przyśpieszenie zbieżności osiągnięcia rozwiązania.
- Realizuje się to poprzez przemnożenie poprawki obliczeniowej przez odpowiednio dobraną liczbę ω .

Metoda nadrelaksacji

- Dla $\omega = 1$ metodę nadrelaksacji określa się mianem SOR - **Successive Over Relaxation**.
- Zwiększając ω można przyśpieszyć osiągnięcie zbieżności. Dopuszczalne wartości są z zakresu $(0,2)$.
- Dla innych wartości ω metoda może nie być zbieżna.

Metoda nadrelaksacji

Wychodząc z równania analogicznego do metody Gaussa-Seidela:

$$\omega (L+U+D) \mathbf{x} = \omega \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x}^* = D\mathbf{x}^* - \omega [(L+D+U) \mathbf{x} - \mathbf{b}]$$

$$(D + \omega L) \mathbf{x}^{(i+1)} = (1 - \omega) D\mathbf{x}^{(i)} - \omega U\mathbf{x}^{(i)} + \omega \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x}^{(i+1)} = (1 - \omega) D\mathbf{x}^{(i+1)} - \omega (L\mathbf{x}^{(i)} + U\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{b})$$

Metoda nadrelaksacji

W efekcie można zapisać:

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_\omega = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} ((1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U})$$

$$\mathbf{c} = \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}$$

Metoda nadrelaksacji

Iteracyjnie równanie można zapisać:

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)a_{ii}x_i^{(k)} + \\ + \omega \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_i \right)$$

Metoda nadrelaksacji

Dane wejściowe $\mathbf{x}_{(0)}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, n – liczba równań (niewiadomych)

for $i = 1:n$

$$suma_I = \sum_{j=1, (j < i)}^n a(i, j) \cdot x_{k+1}(j)$$

$$suma_{II} = \sum_{j=1, (j > i)}^n a(i, j) \cdot x_k(j)$$

$$x_{k+1}(i) = \frac{(1 - \omega) \cdot a(i, i) \cdot x_k(i)}{a(i, i)} + \omega \frac{b(i) - suma_I - suma_{II}}{a(i, i)}$$

Met

09:56

```
17 for k=1:M
18     x = ((D+w*L)^-1) * ((1-w)*D-w*U)*xm+w*((D+w*L)^-1)*b;
19     xm=x;
```

```
1 clear;clc;
8 for k=2:m
9     for i=1:4
10         u=0;
11         v=0;
12         for j=1:4
13             if j>=i then continue; end
14             u=u+A(i,j)*x(j,k);
15         end
16         for j=1:4
17             if j<=i then continue; end
18             v=v+A(i,j)*x(j,k-1);
19         end
20         x(i,k) = ((1-w)*A(i,i)*x(i,k-1)+w*(b(i)-u-v))/A(i,i);
21     end
22 end
21 end
22 end
23 plot2d(t,[x(1,:) ',x(2,:) ',x(3,:) ',x(4,:) ']);
```

Metoda nadrelaksacji

```

17 for k=1:M
18     x = ((D+w*L)^-1) * ((1-w)*D-w*U) * xm + w * ((D+w*L)^-1) * b;
19     xm = x;

```

$A \rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 1 & -8 & -6 \\ 1 & -6 & 4 & 3 \\ -8 & 4 & 4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{bmatrix}$

The matrix A is partitioned into four blocks:

- L** (Lower triangular part, green): $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- D** (Diagonal part, blue): $\begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$
- U** (Upper triangular part, red): $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Przykład A

"Rozwiązanie równania 1:"

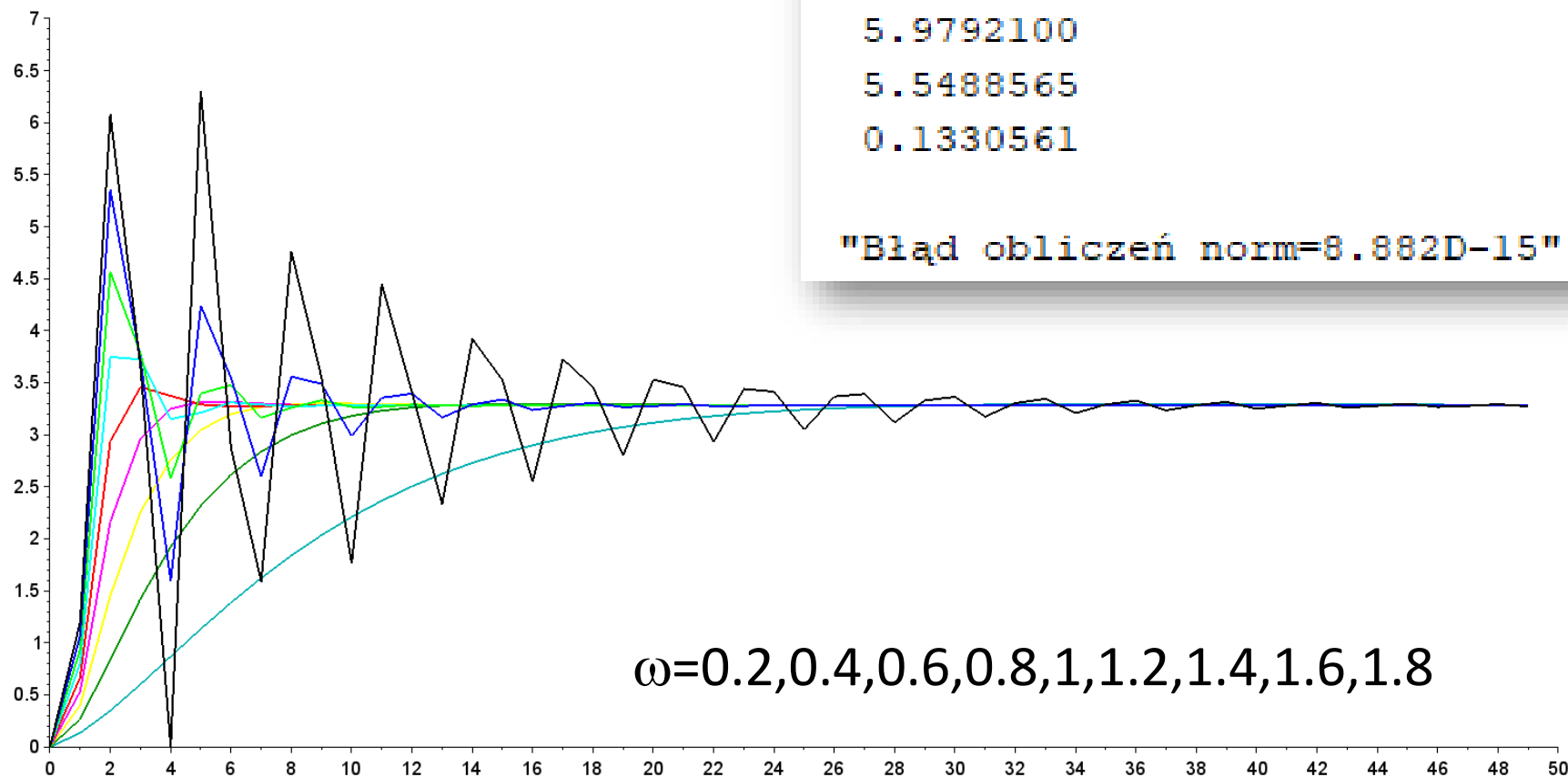
3.2806653

5.9792100

5.5488565

0.1330561

"Błąd obliczeń norm=8.882D-15"



Przykład B

"Rozwiązanie równania 2:"

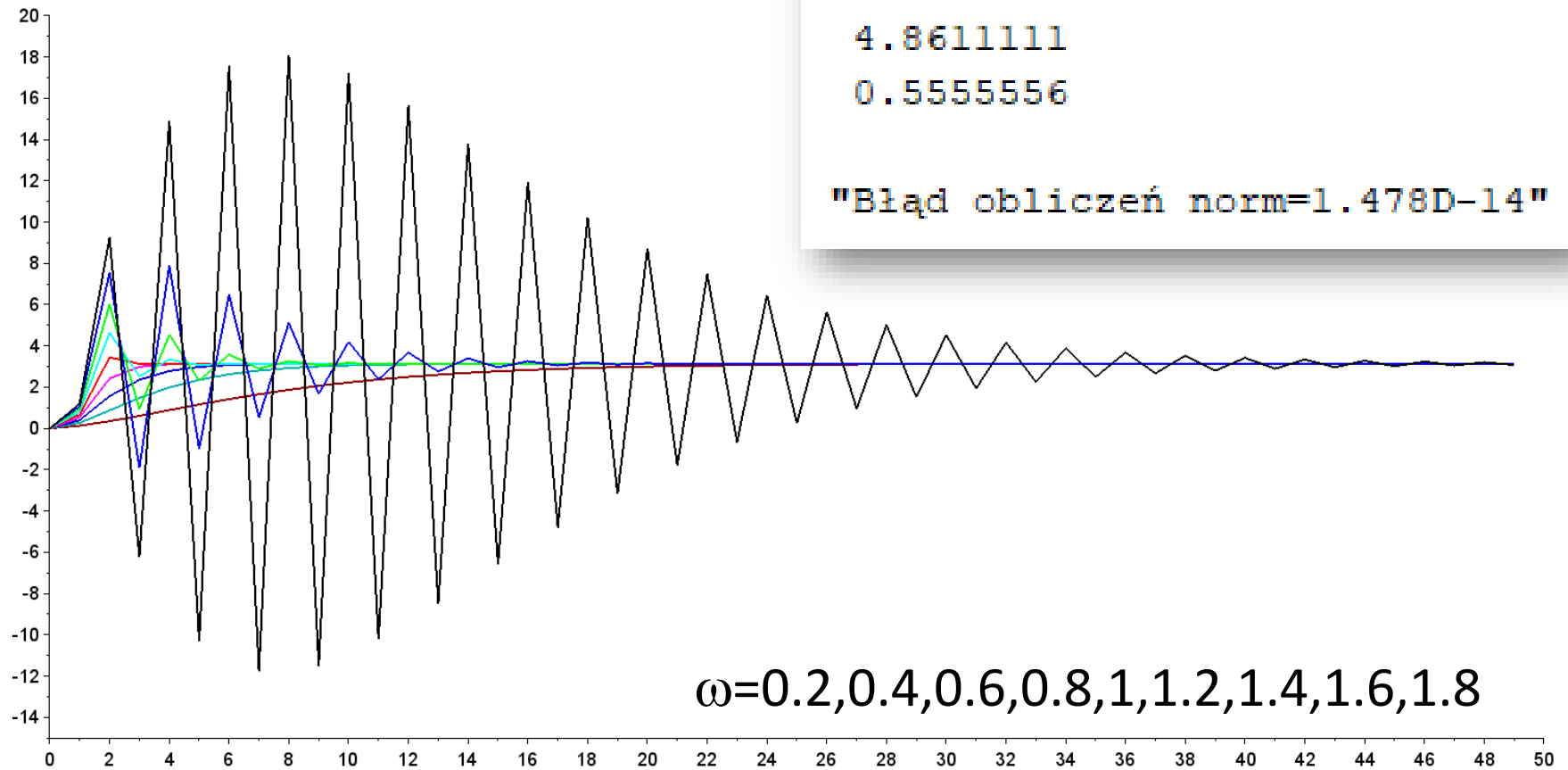
3.1358025

5.1851852

4.8611111

0.5555556

"Błąd obliczeń norm=1.478D-14"



Przykład C

09:56

"Rozwiązanie równania 3:"

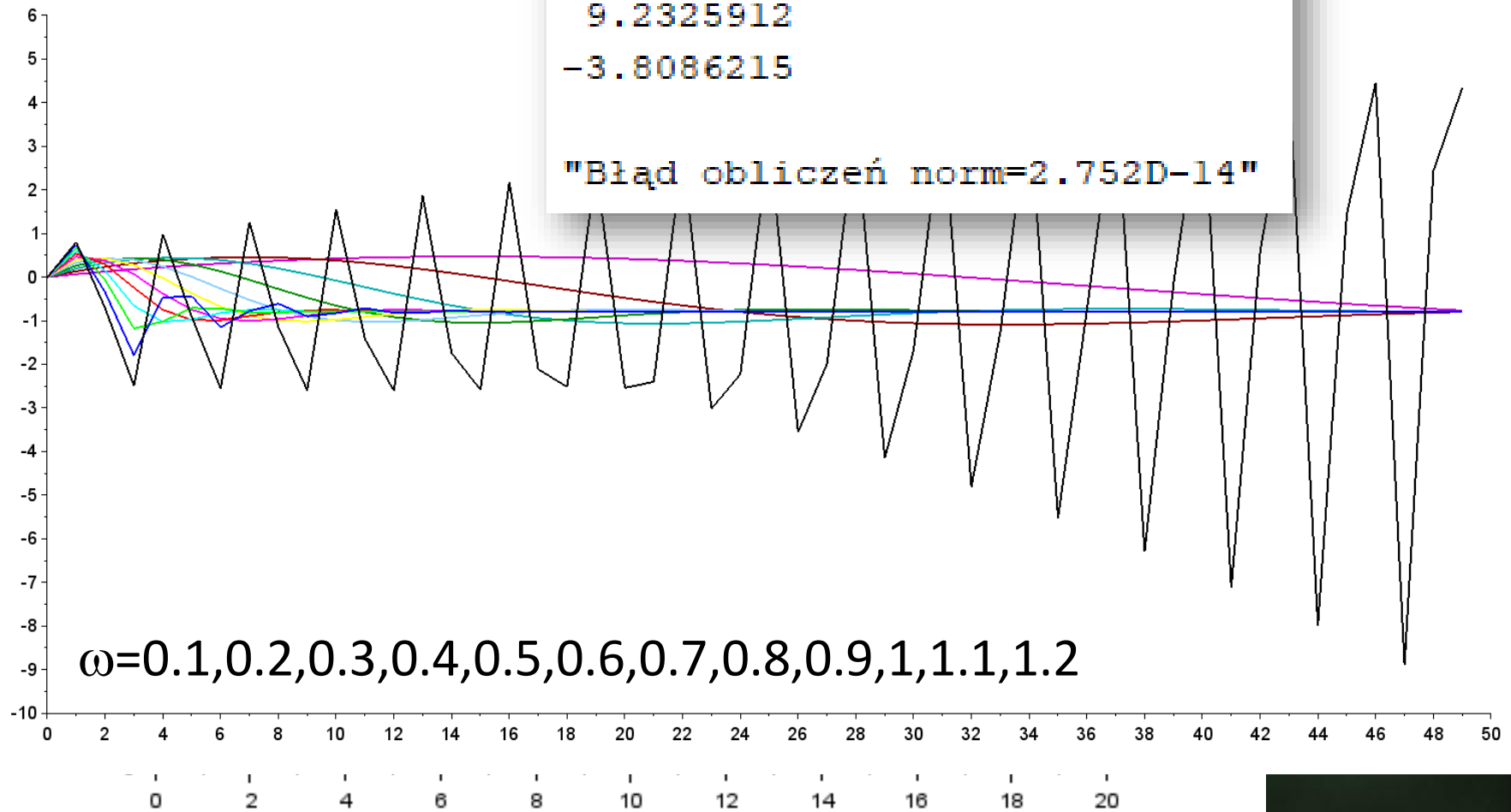
-0.7910943

4.8626243

9.2325912

-3.8086215

"Błąd obliczeń norm=2.752D-14"



Szybkość algorytmów

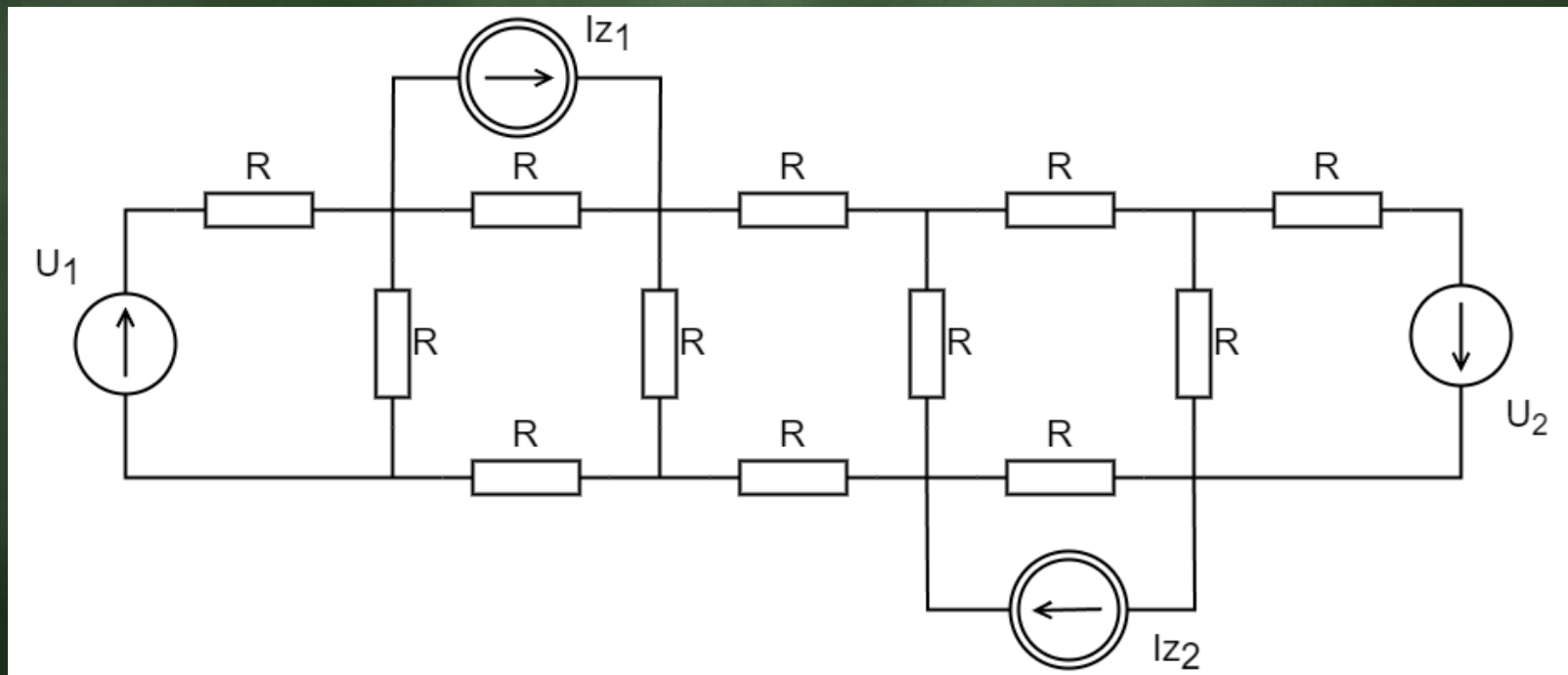
1. Metoda Gradientowa
 - A: $\omega=1, 26$; B: $\omega=1, 5$; C: $\omega=1, 43$
2. Metoda Gradientowa
 - A: $\omega=1, 26$; B: $\omega=1, 5$; C: $\omega=1, 43$
3. Metoda Gradientowa
 - A: $\omega=1, 26$; B: $\omega=1, 5$; C: $\omega=1, 43$
4. Metoda Nadrelaksacji
 - A: $\omega=1, 26$; B: $\omega=1, 5$; C: $\omega=1, 43$

```

"Rozwiązanie osiągnięto po 477 krokach dla w=0.2" 0.2"
"Rozwiązanie osiągnięto po 289 krokach dla w=0.3" 0.4"
"Rozwiązanie osiągnięto po 200 krokach dla w=0.4" 0.6"
"Rozwiązanie osiągnięto po 144 krokach dla w=0.5" 0.8"
"Rozwiązanie osiągnięto po 107 krokach dla w=0.6" 1.0"
"Rozwiązanie osiągnięto po 83 krokach dla w=0.7" 1.2"
"Rozwiązanie osiągnięto po 64 krokach dla w=0.8" 1.4"
"Rozwiązanie osiągnięto po 50 krokach dla w=0.9" 1.6"
"Rozwiązanie osiągnięto po 43 krokach dla w=1" 1.8"
"Rozwiązanie osiągnięto po 85 krokach dla w=1.1" 1.8"

```

Układ drabinkowy

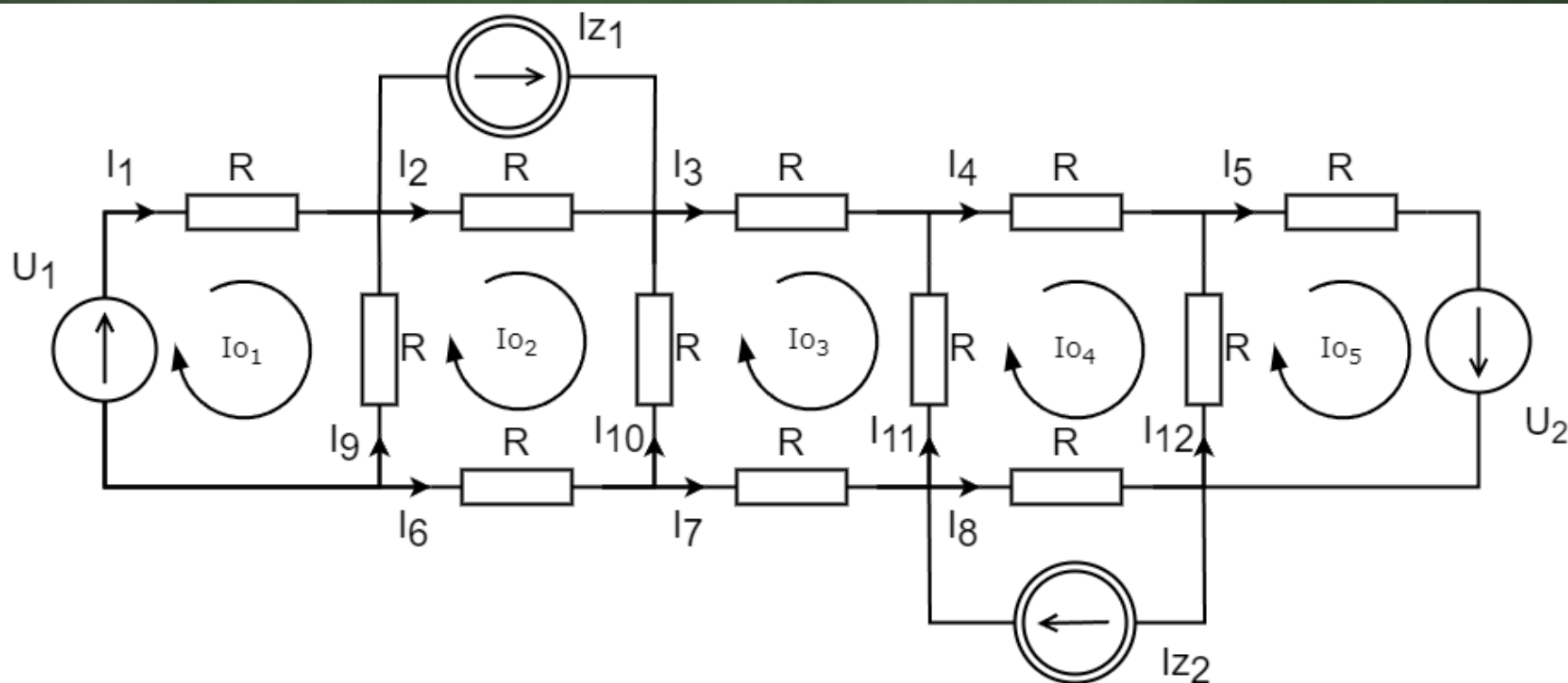


$$U_1 = U_2 = 10V$$

$$I_{z1} = I_{z2} = 1A$$

$$R = 2\Omega$$

Układ drabinkowy



Układ równań

$$I_1 R - I_9 R = U_1$$

$$I_2 R + I_9 R - I_{10} R - I_6 R = 0$$

$$I_3 R + I_{10} R - I_{11} R - I_7 R = 0$$

$$I_4 R + I_{11} R - I_{12} R - I_8 R = 0$$

$$I_5 R + I_{12} R = U_2$$

$$I_1 + I_9 - I_2 = I z_1$$

$$I_2 + I_{10} - I_3 = -I z_1$$

$$I_3 + I_{11} - I_4 = 0$$

$$I_4 + I_{12} - I_5 = 0$$

$$I_5 + I_8 - I_{12} = I z_2$$

$$I_7 - I_8 - I_{11} = -I z_2$$

$$I_6 - I_7 - I_{10} = 0$$

Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ I_{Z_1} \\ -I_{Z_1} \\ 0 \\ 0 \\ I_{Z_2} \\ -I_{Z_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. 12 na 6

2. 11 na 7

3. 10 na 8

na przekątnej
czność
umn.

Równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix}
 R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \\
 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 \\
 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -I_{Z_2} \\ I_{Z_2} \\ I_{Z_1} \\ -I_{Z_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metoda skończone i wbudowane

"Wyniki z metody potencjałów węzłowych:" e():"

3.08333333

0.16666667

0.58333333

1.16666667

3.08333333

-1.16666667

-0.58333333

-0.16666667

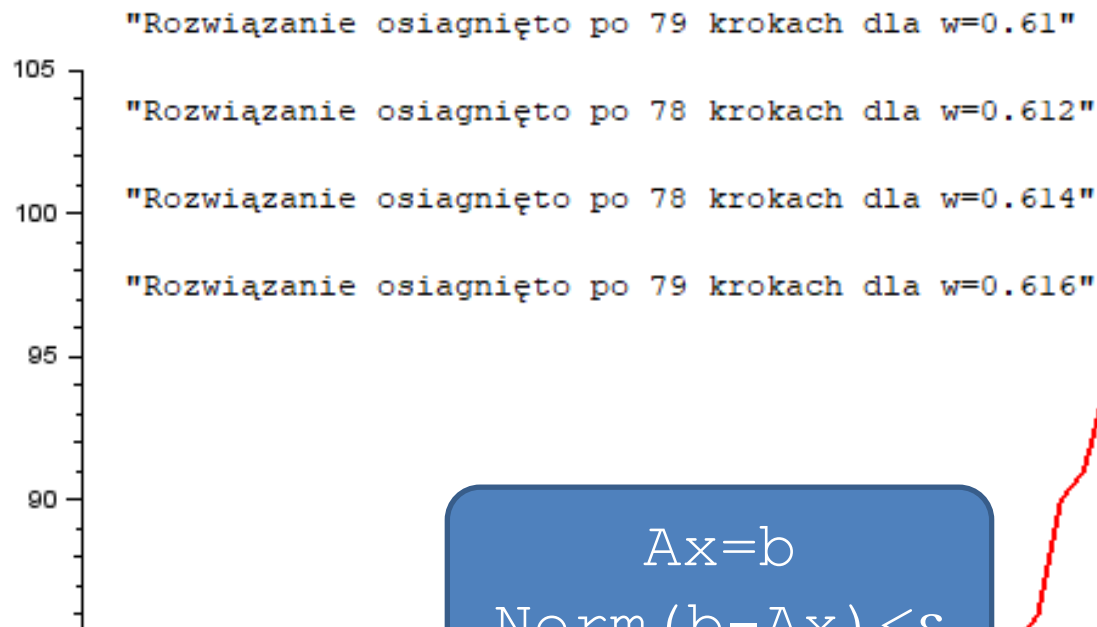
-1.91666667

-0.58333333

0.58333333

1.91666667

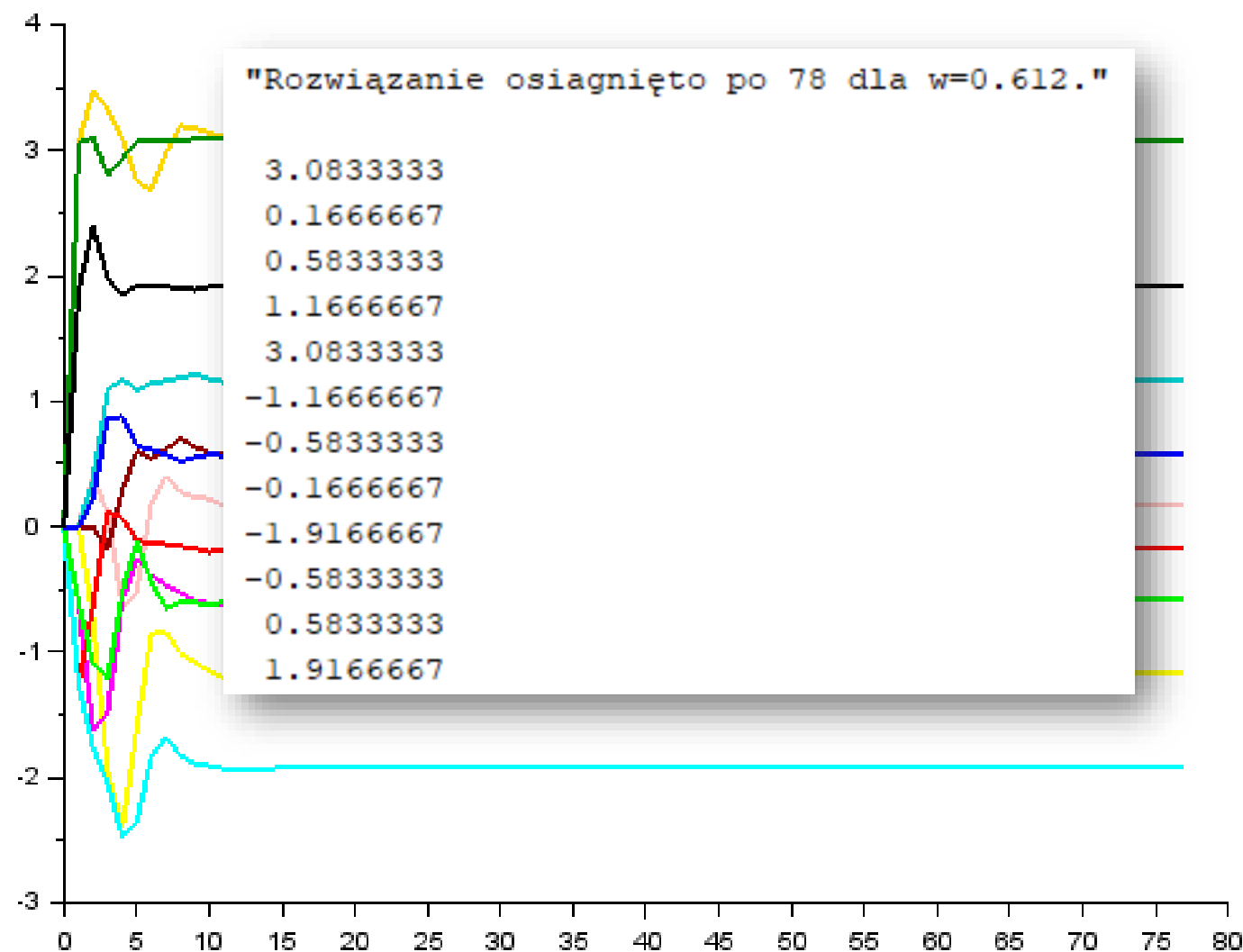
Metody iteracyjne



```
T=b-A*x(:,k);
if norm(T)<delt then
    disp('Rozwiązanie osiągnięto po ' + string(k) + '.');
    break;
end
```

0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08

Metoda iteracyjna



Przekształcenie

$$I_1 + I_9 - I_2 = IZ_1$$

$$I_2 + I_{10} - I_3 = -IZ_1$$

$$I_3 + I_{11} - I_4 = 0$$

$$I_4 + I_{12} - I_5 = 0$$

$$I_5 + I_8 - I_{12} = IZ_2$$

$$I_7 - I_8 - I_{11} = -IZ_2$$

$$I_6 - I_7 - I_{10} = 0$$

$$I_9 = IZ_1 - I_1 + I_2$$

$$I_{10} = -IZ_1 + I_3 - I_2$$

$$I_{11} = I_4 - I_3$$

$$I_{12} = I_5 - I_4$$

$$I_8 = IZ_2 - I_5 + I_{12}$$

$$I_7 = -IZ_2 + I_8 + I_{11}$$

$$I_6 = I_7 + I_{10}$$

$$I_8 = IZ_2 - I_5 + I_{12} = IZ_2 - I_5 + I_5 - I_4 = IZ_2 - I_4$$

$$I_7 = -IZ_2 + I_8 + I_{11} = -IZ_2 + IZ_2 - I_4 + I_4 - I_3 = -I_3$$

$$I_6 = I_7 + I_{10} = -I_3 - IZ_1 + I_3 - I_2 = -IZ_1 - I_2$$

Układ równań

$$I_1 = I_I$$

$$I_2 = I_{II}$$

$$I_3 = I_{III}$$

$$I_4 = I_{IV}$$

$$I_5 = I_V$$

$$I_6 = -I_{Z1} - I_{II}$$

$$I_7 = -I_{III}$$

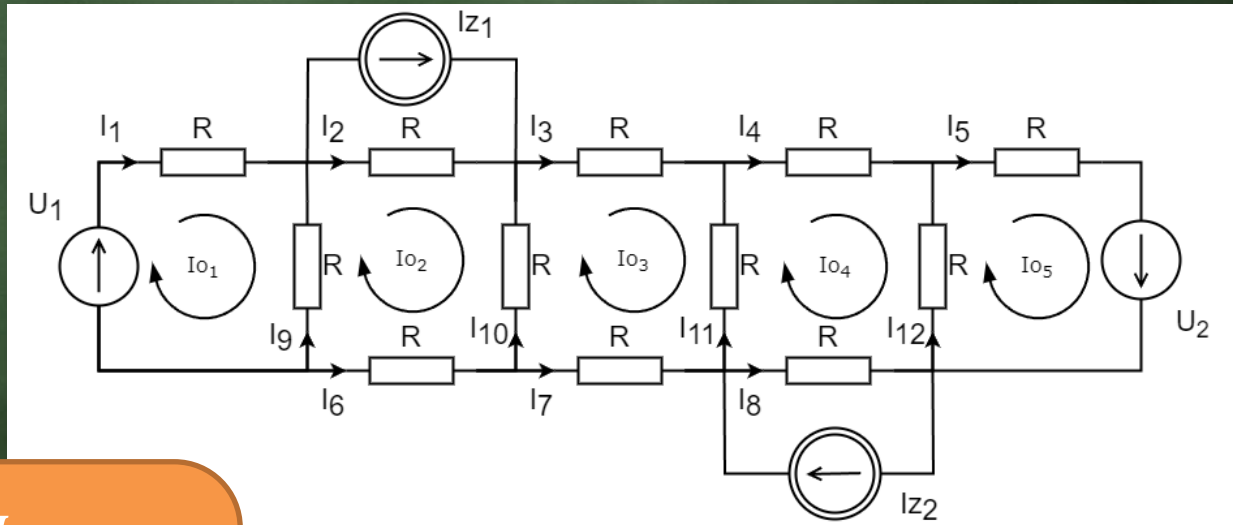
$$I_8 = I_{Z2} - I_{IV}$$

$$I_9 = I_{Z1} - I_I + I_{II}$$

$$I_{10} = -I_{Z1} + I_{III} - I_{II}$$

$$I_{11} = I_{IV} - I_{III}$$

$$I_{12} = I_V - I_{IV}$$



Układ równań

$$I_I R - (I_{Z_1} - I_I + I_{II})R = U_1$$

$$I_{II} R + (I_{Z_1} - I_I + I_{II})R - (-I_{Z_1} + I_{III} - I_{II})R - (-I_{Z_1} - I_{II})R = 0$$

$$I_{III} R + (-I_{Z_1} + I_{III} - I_{II})R - (I_{IV} - I_{III})R + I_{III} R = 0$$

$$I_{IV} R + (I_{IV} - I_{III})R - (I_V - I_{IV})R - (I_{Z_2} - I_{IV})R = 0$$

$$I_V R + (I_V - I_{IV})R = U_2$$

$$I_I R - I_{Z_1} R + I_I R - I_{II} R = U_1$$

$$I_{II} R + I_{Z_1} R - I_I R + I_{II} R + I_{Z_1} R - I_{III} R + I_{II} R + I_{Z_1} R + I_{II} R = 0$$

$$I_{III} R - I_{Z_1} R + I_{III} R - I_{II} R - I_{IV} R + I_{III} R + I_{III} R = 0$$

$$I_{IV} R + I_{IV} R - I_{III} R - I_V R + I_{IV} R - I_{Z_2} R + I_{IV} R = 0$$

$$I_V R + I_V R - I_{IV} R = U_2$$

Układ równań

$$I_I R - I_{Z_1} R + I_I R - I_{II} R = U_1$$

$$I_{II} R + I_{Z_1} R - I_I R + I_{II} R + I_{Z_1} R - I_{III} R + I_{II} R + I_{Z_1} R + I_{II} R = 0$$

$$I_{III} R - I_{Z_1} R + I_{III} R - I_{II} R - I_{IV} R + I_{III} R + I_{III} R = 0$$

$$I_{IV} R + I_{IV} R - I_{III} R - I_V R + I_{IV} R - I_{Z_2} R + I_{IV} R = 0$$

$$I_V R + I_V R - I_{IV} R = U_2$$

$$2I_I R - I_{II} R = U_1 + I_{Z_1} R$$

$$-I_I R + 4I_{II} R - I_{III} R = -3I_{Z_1} R$$

$$-I_{II} R + 4I_{III} R - I_{IV} R = I_{Z_1} R$$

$$-I_{III} R + 4I_{IV} R - I_V R = I_{Z_2} R$$

$$-I_{IV} R + 2I_V R = U_2$$

Układ równań

$$2I_I R - I_{II} R = U_1 + I z_1 R$$

$$-I_I R + 4I_{II} R - I_{III} R = -3I z_1 R$$

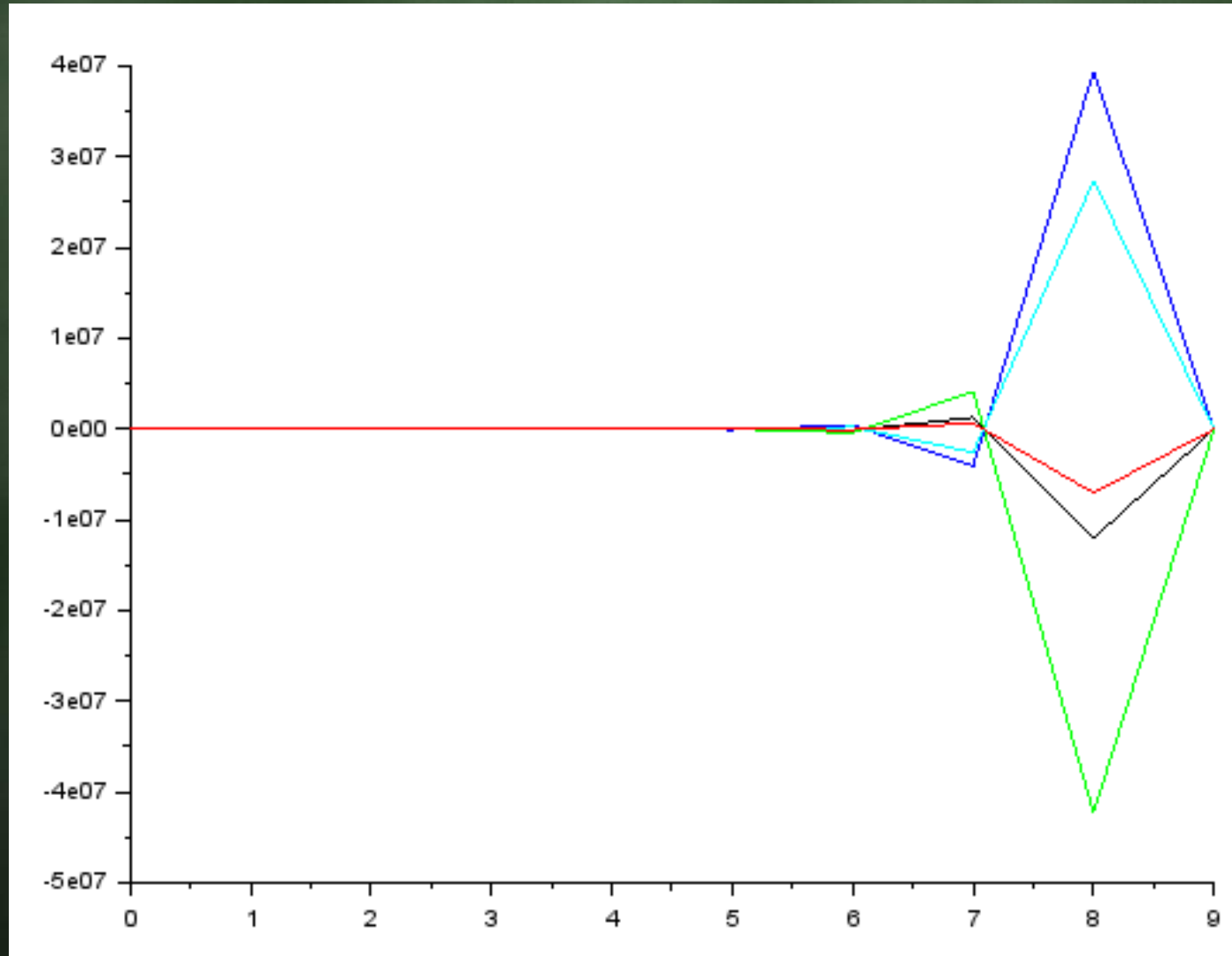
$$-I_{II} R + 4I_{III} R - I_{IV} R = I z_1 R$$

$$-I_{III} R + 4I_{IV} R - I_V R = I z_2 R$$

$$-I_{IV} R + 2I_V R = U_2$$

$$\begin{vmatrix} 2R & -R & 0 & 0 & 0 \\ -R & 4R & -R & 0 & 0 \\ 0 & -R & 4R & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R & 4R & -R \\ 0 & 0 & 0 & -R & 2R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \\ I_{IV} \\ I_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 + I z_1 R \\ -3I z_1 R \\ I z_1 R \\ I z_2 R \\ U_2 \end{vmatrix}$$

Richardson



Metoda Richardsona z ω

Wprowadzenie współczynnika korygującego –
relaksacji

$$\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}) \mathbf{x}^{(k-1)} + \omega \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \omega (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k-1)})$$

- $\omega = 1$ poprawka równa jest całej reszcie,
- $\omega < 1$ poprawki są „łagodniejsze” (wolniejsza, ale stabilna zbieżność),
- $\omega > 1$ poprawki są „agresywne” (możliwa szybsza zbieżność, ale ryzyko rozbieżności).

Zmodyfikowany algorytm

```

1 function [p,k] = richardson1(A,b,e,w)
2     n=size(A,'r');
3     p=zeros(n,1);
4     I=eye(n,n);
5     k=1;
6     while norm(A*p(:,k)-b)>e
7         k=k+1;
8         p(:,k)=(I-w*A)*p(:,k-1)+w*b;
9     end
10 endfunction
11
12
13
14 p(:,k+1)=p(:,k)+r(:);
15 k=k+1;
16 end
17 endfunction

```

Metoda Richardsona z ω

Zakres dopuszczalnych wartości współczynnika korygującego można określić na podstawie wartości własnych macierzy **A**

Wartości własne w Scilab można wyliczyć za pomocą funkcji **spec (A)** ;

Jeżeli wektor wartości własnych macierzy zawiera wielkości zespolono metoda Richardsona nie będzie zbieżna

Metoda Richardsona z ω

Przedział dopuszczalnych wartości współczynnika ω aby model był zbieżny:

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

Optymalna wartość współczynnika w:

$$\omega = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

Metoda Richardsona z ω

Dla analizowanego układu równań wektor wartości własnych macierzy A:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 2.8768944 \\ 3.1715729 \\ 6 \\ 8.8284271 \\ 11.123106 \end{bmatrix}$$

Zakres dopuszczalnych wartości współczynnika korygującego:

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{max}}$$

$$0 < \omega < 0.1798$$

Optymalna wartość współczynnika korygującego:

$$\omega = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}}$$

$$\omega = 0.1429$$

Metoda Richardsona z ω

Wyniki dla optymalnej wartości $\omega=0.1429$

Wyniki

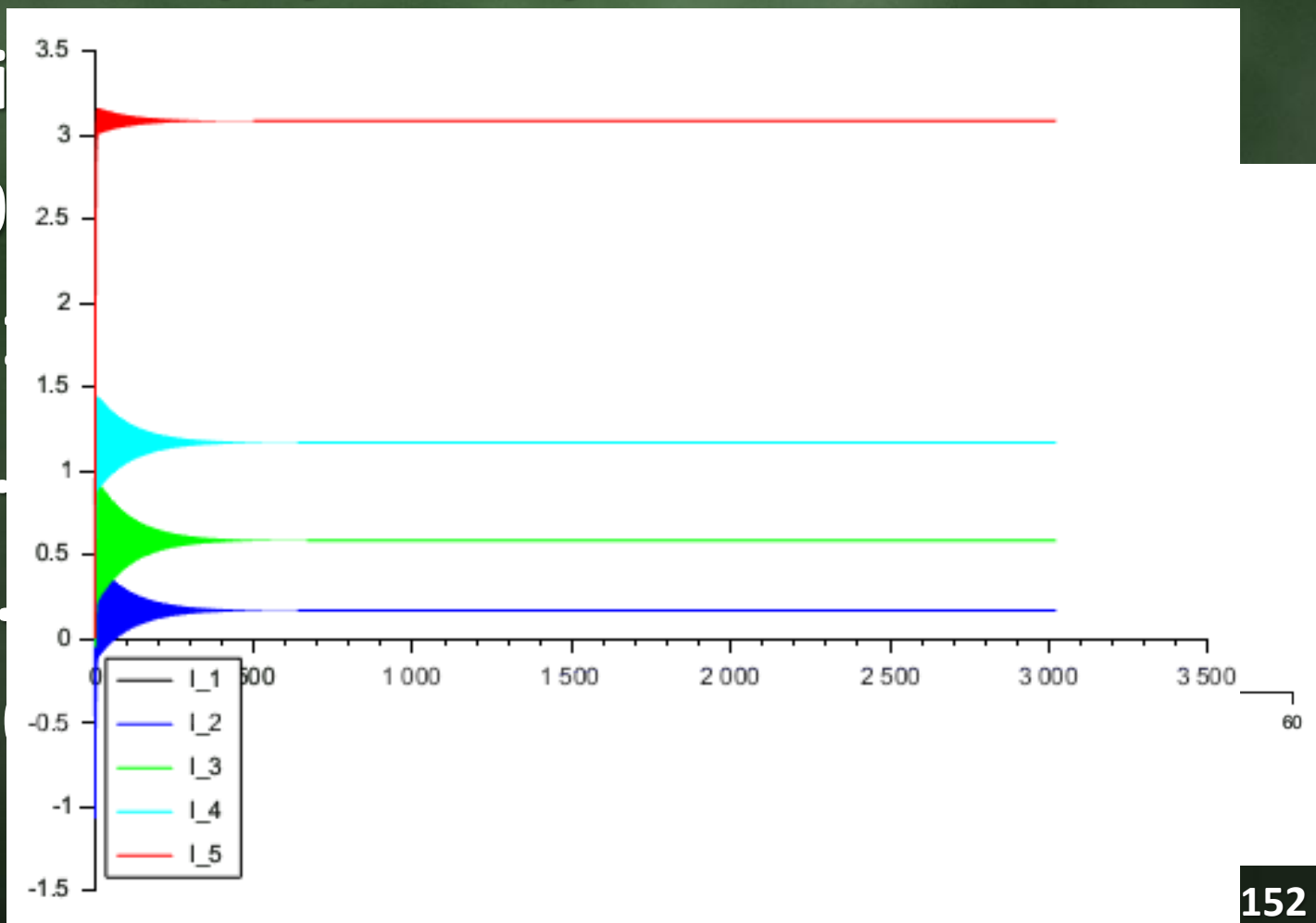
$$I_I = 3.0$$

$$I_{II} = 0.8$$

$$I_{III} = 0.5$$

$$I_{IV} = 1.2$$

$$I_V = 3.0$$



Jacobiego

Rozwiązanie osiągnięto po 39.

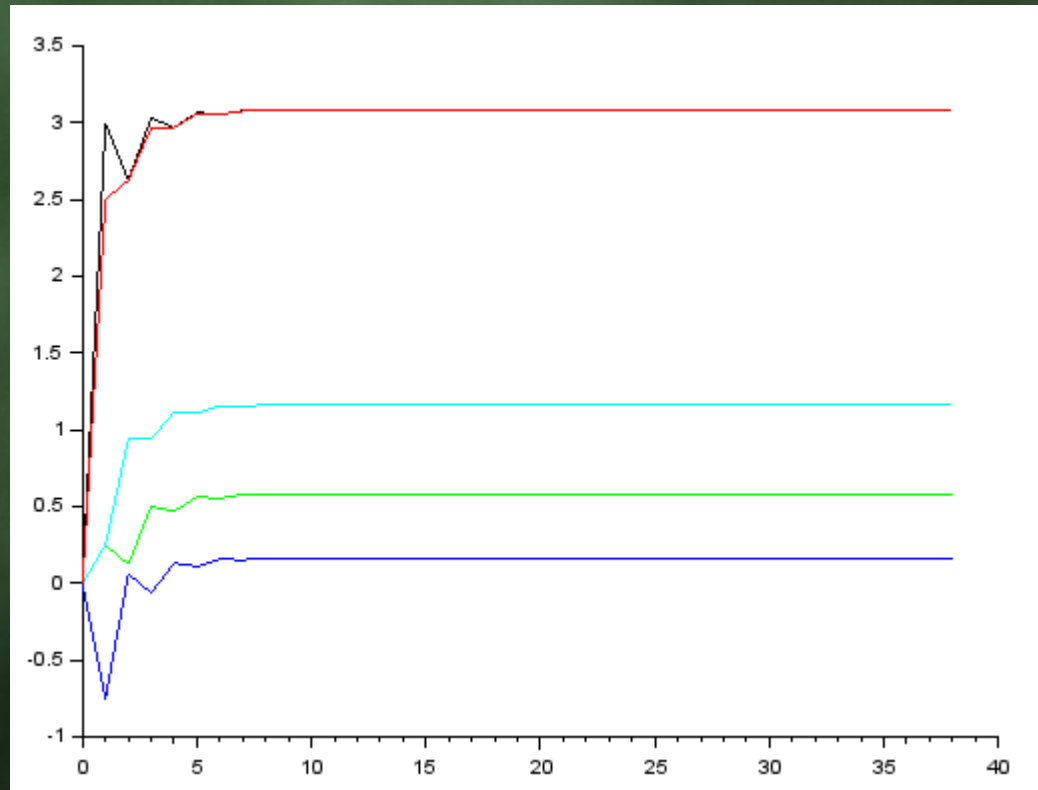
$$I_I = 3.0833333$$

$$I_{II} = 0.1666667$$

$$I_{III} = 0.5833333$$

$$I_{IV} = 1.1666667$$

$$I_V = 3.0833333$$



Gauss-Seidela

Rozwiązanie osiągnięto po 21.

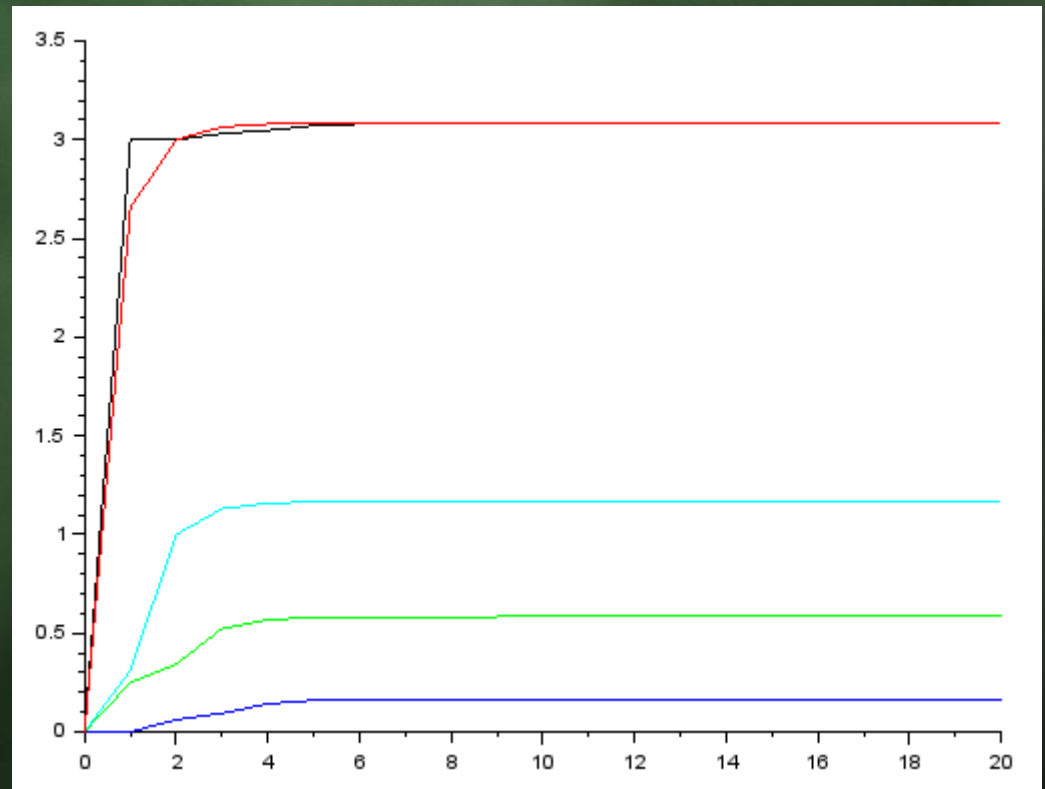
$$I_I = 3.0833333$$

$$I_{II} = 0.1666667$$

$$I_{III} = 0.5833333$$

$$I_{IV} = 1.1666667$$

$$I_V = 3.0833333$$



Nadrelaksacji

Rozwiązanie osiągnięto po 15 krokach dla $\omega=1.1$

$$I_I = 3.08333333$$

$$I_{II} = 0.16666667$$

$$I_{III} = 0.58333333$$

$$I_{IV} = 1.16666667$$

$$I_V = 3.08333333$$

