

Metody numeryczne

Wykład 3



Dr inż. Michał Łanczont

Instytut Elektrotechniki i Elektrotechnologii

E419, tel. 4293, m.lanczont@pollub.pl, <http://m.lanczont.pollub.pl>

Plan wykładu – część I

Rozwiązywanie równań algebraicznych nieliniowych:

- metoda Bisekcji
- metoda Regula Falsi
- metoda Siecznych
- metoda Newtona-Raphsona
- metoda iteracji prostej

Równania nieliniowe

- Pierwiastki równania nieliniowego

$$f(x)=0$$

na ogół nie można wyrazić za pomocą wzoru analitycznego.

- Rozwiązanie może zostać wyznaczone w sposób przybliżony, z żadaną dokładnością za pomocą metod iteracyjnych.

Równania nieliniowe

- W przypadku większości metod konieczne jest podanie pierwszego przybliżenia rozwiązania x_0 (w niektórych dwóch pierwszych x_0 i x_1)
- Zadanie uznawane jest za zakończone gdy uzyskano przybliżenie z żadaną dokładnością i można oszacować błąd
- Dla większości metod możliwe jest przybliżenie rozwiązania tylko wtedy gdy analizowany jest przedział z jednym pierwiastkiem

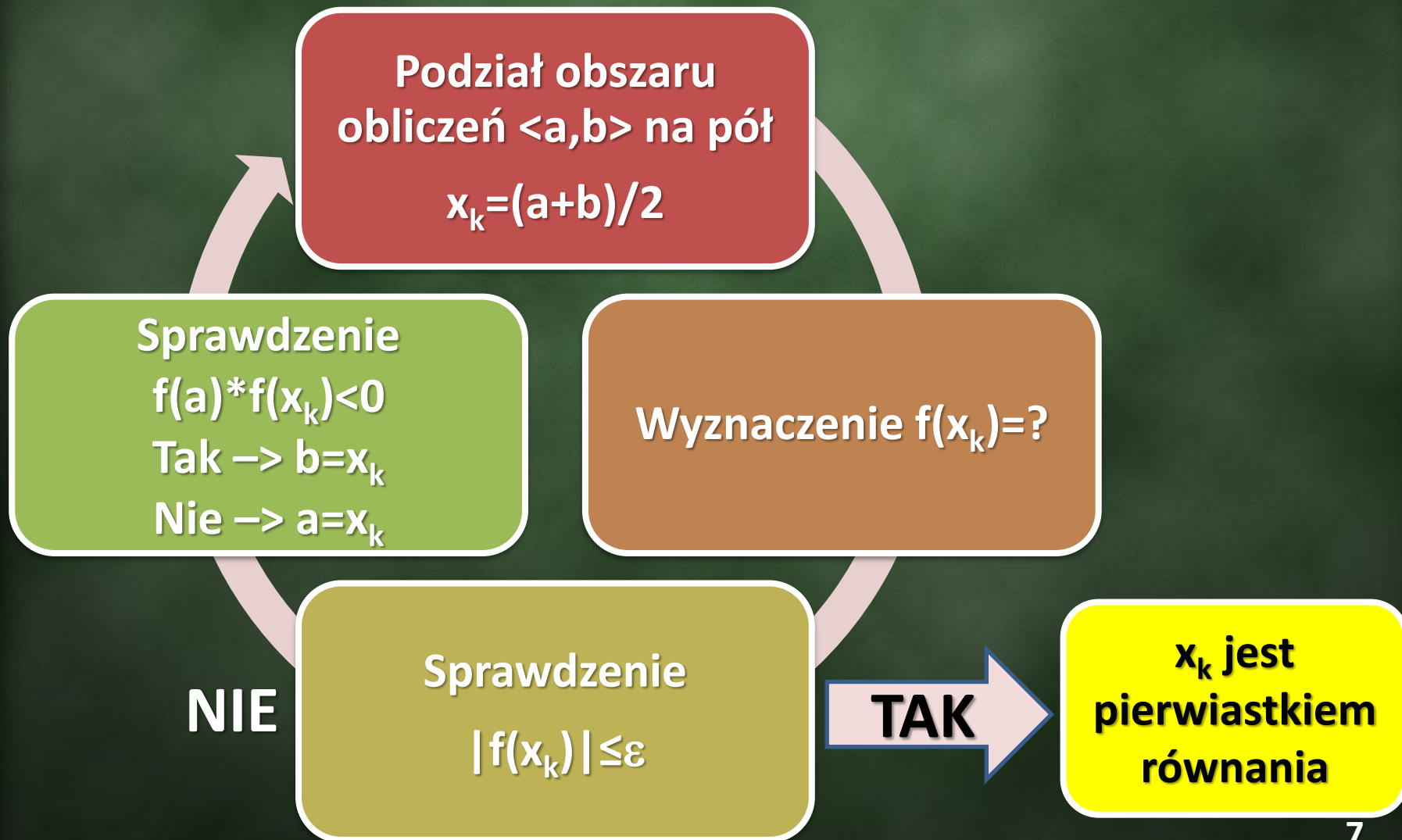
Metoda Bisekcji

- Funkcja rozwiązywana metodą Bisekcji (połowienia) musi spełniać warunki:
 - Ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$
 - Na krańcach przedziału funkcja przyjmuje wartości o przeciwnych znakach
- Metoda potrafi znaleźć tylko jeden pierwiastek - nawet jeśli w zadanym przedziale jest ich więcej

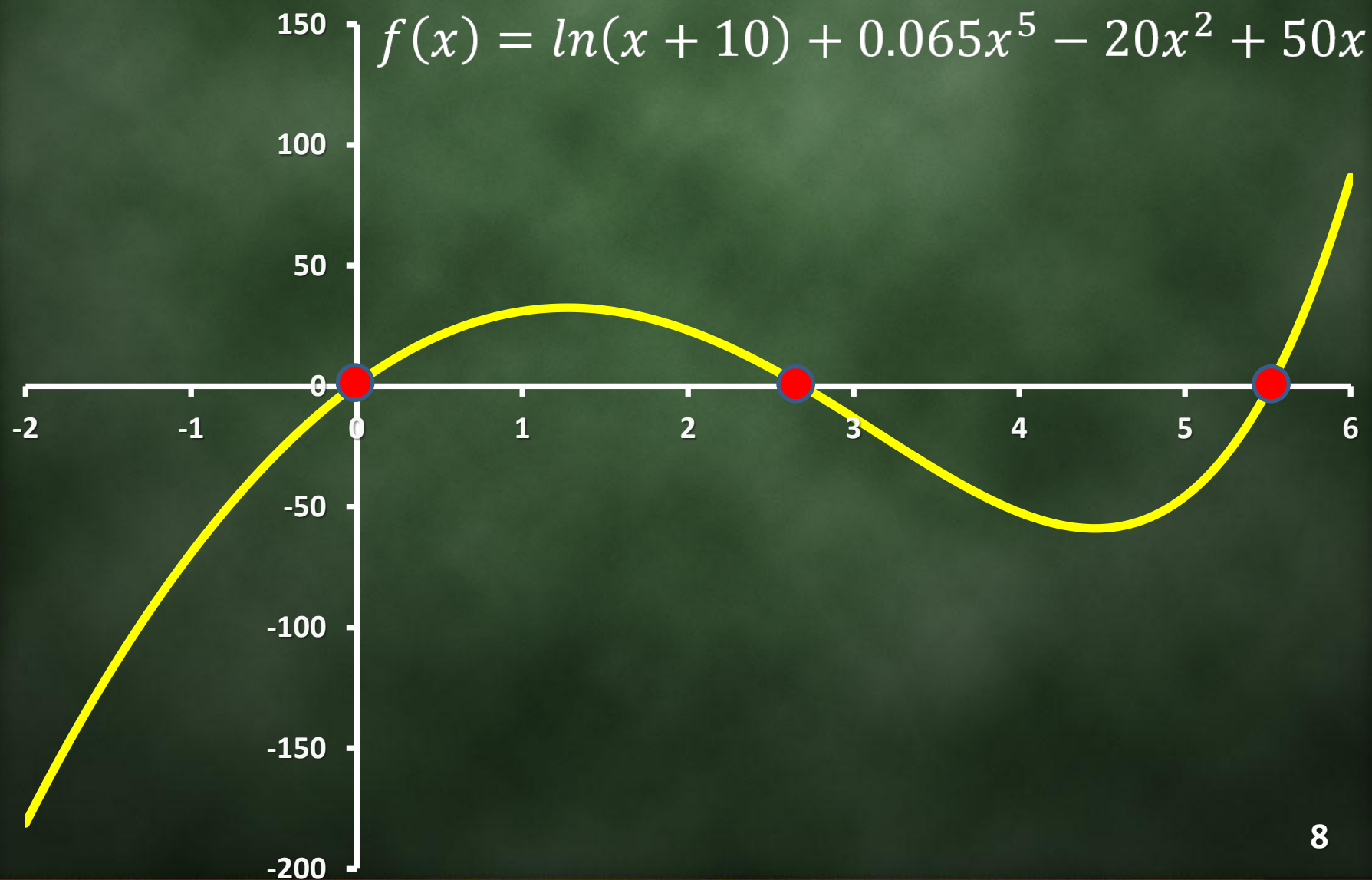
Metoda Bisekcji

- Metoda nie korzysta własności funkcji i jej przebiegu wewnątrz przedziału, wyłącznie z znaku wartości na jej końcach
- Metoda wyznacza pierwiastek z żądaną dokładnością ε

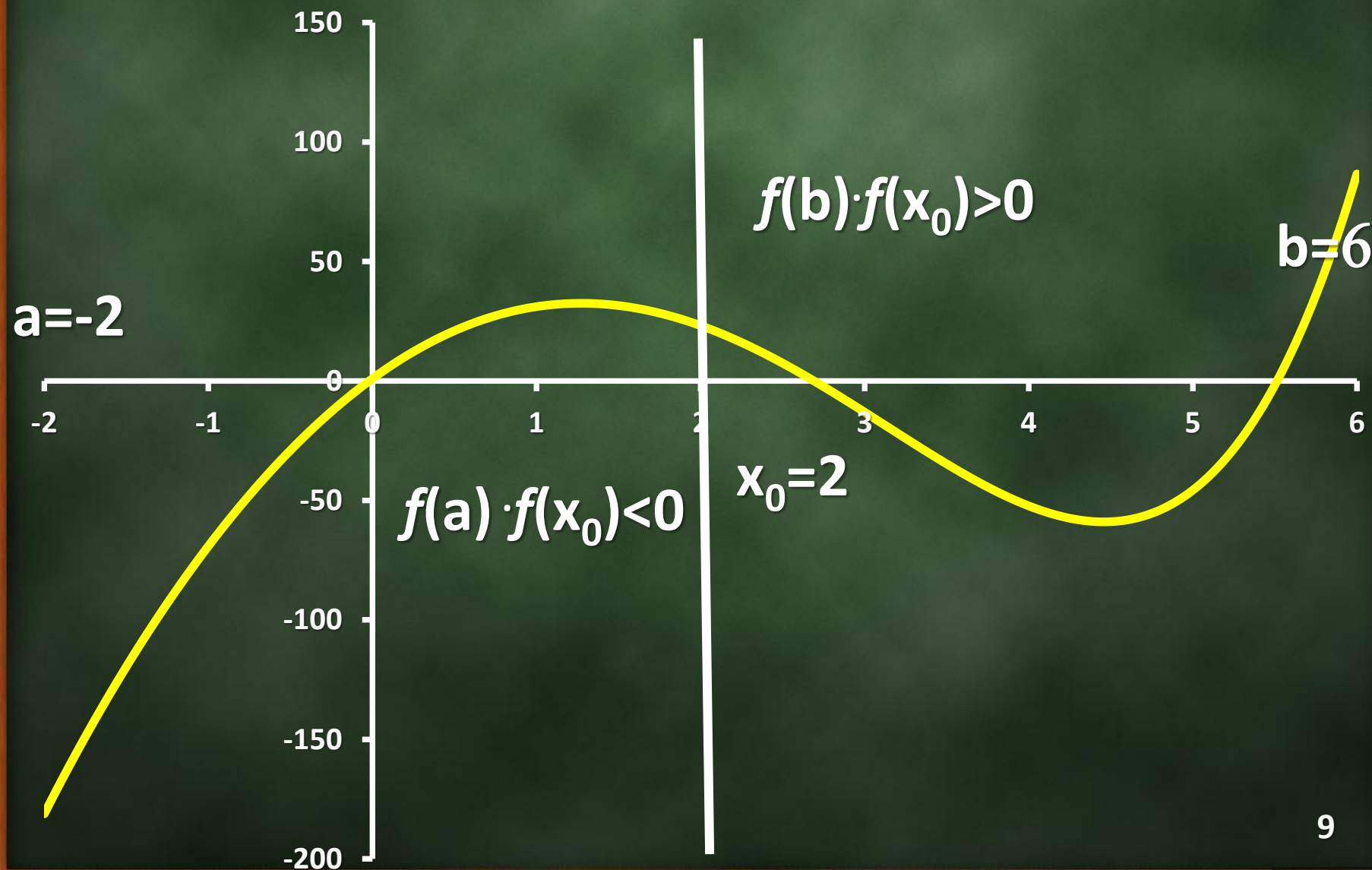
Metoda Bisekcja



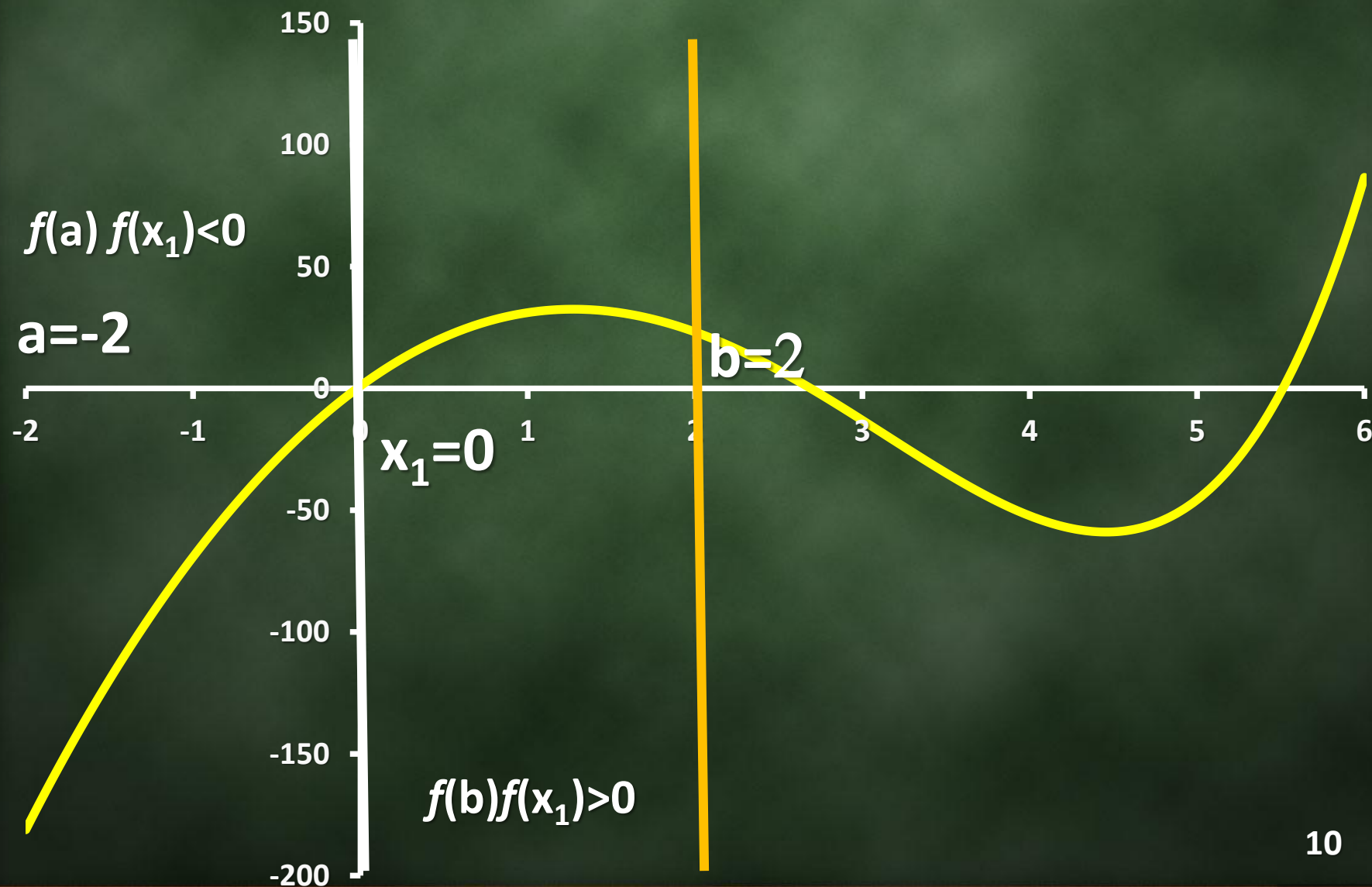
Przykład 1



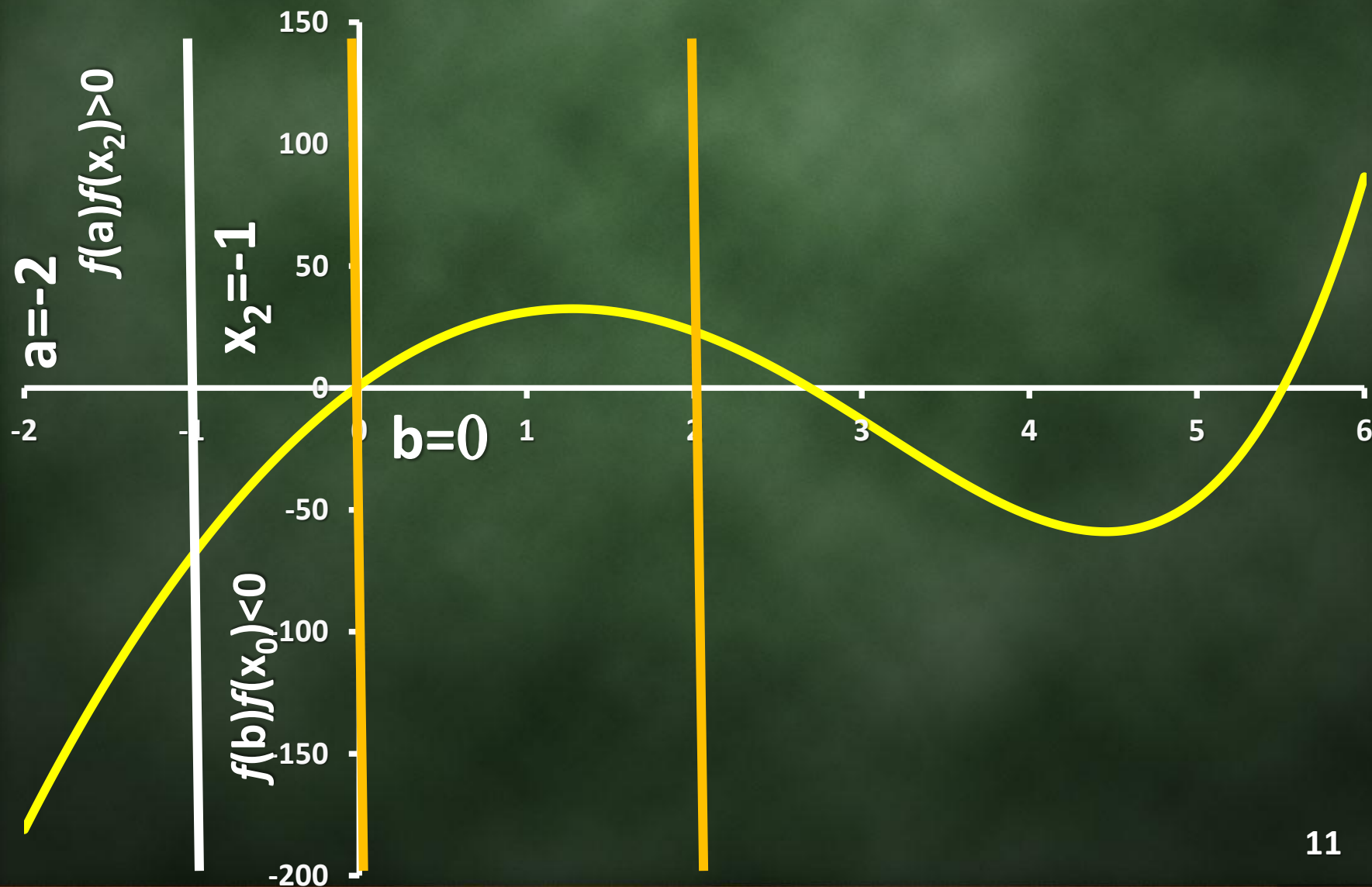
Przykład 1



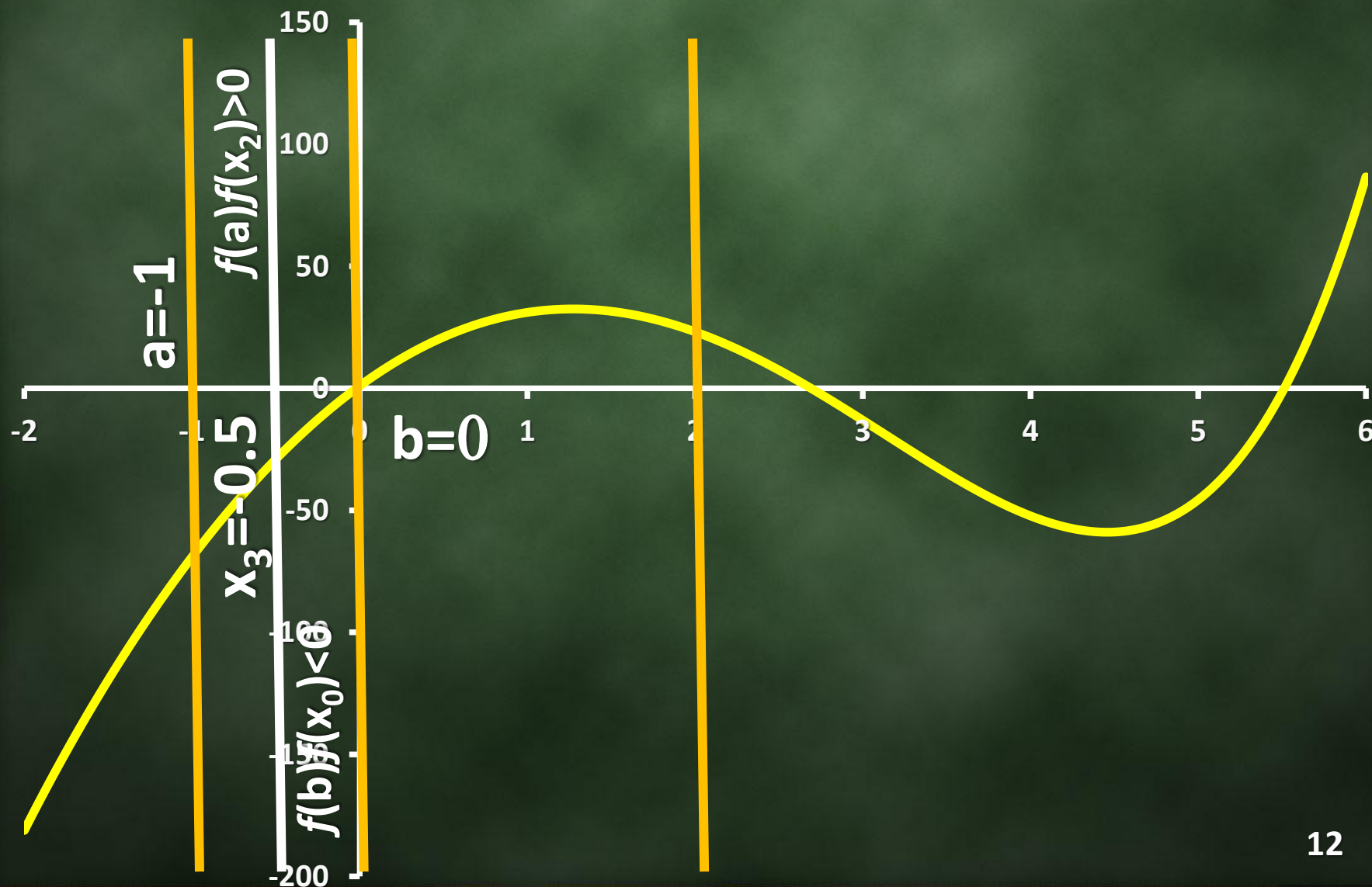
Przykład 1



Przykład 1

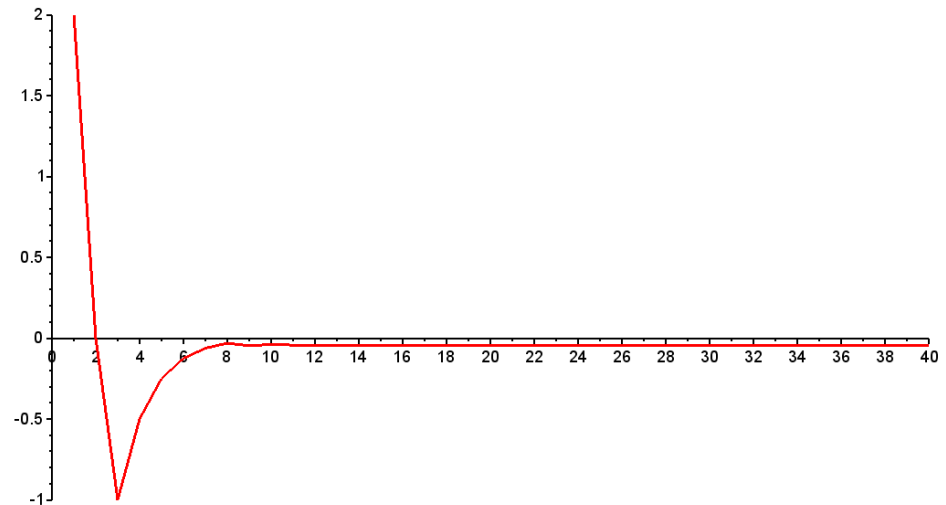


Przykład 1

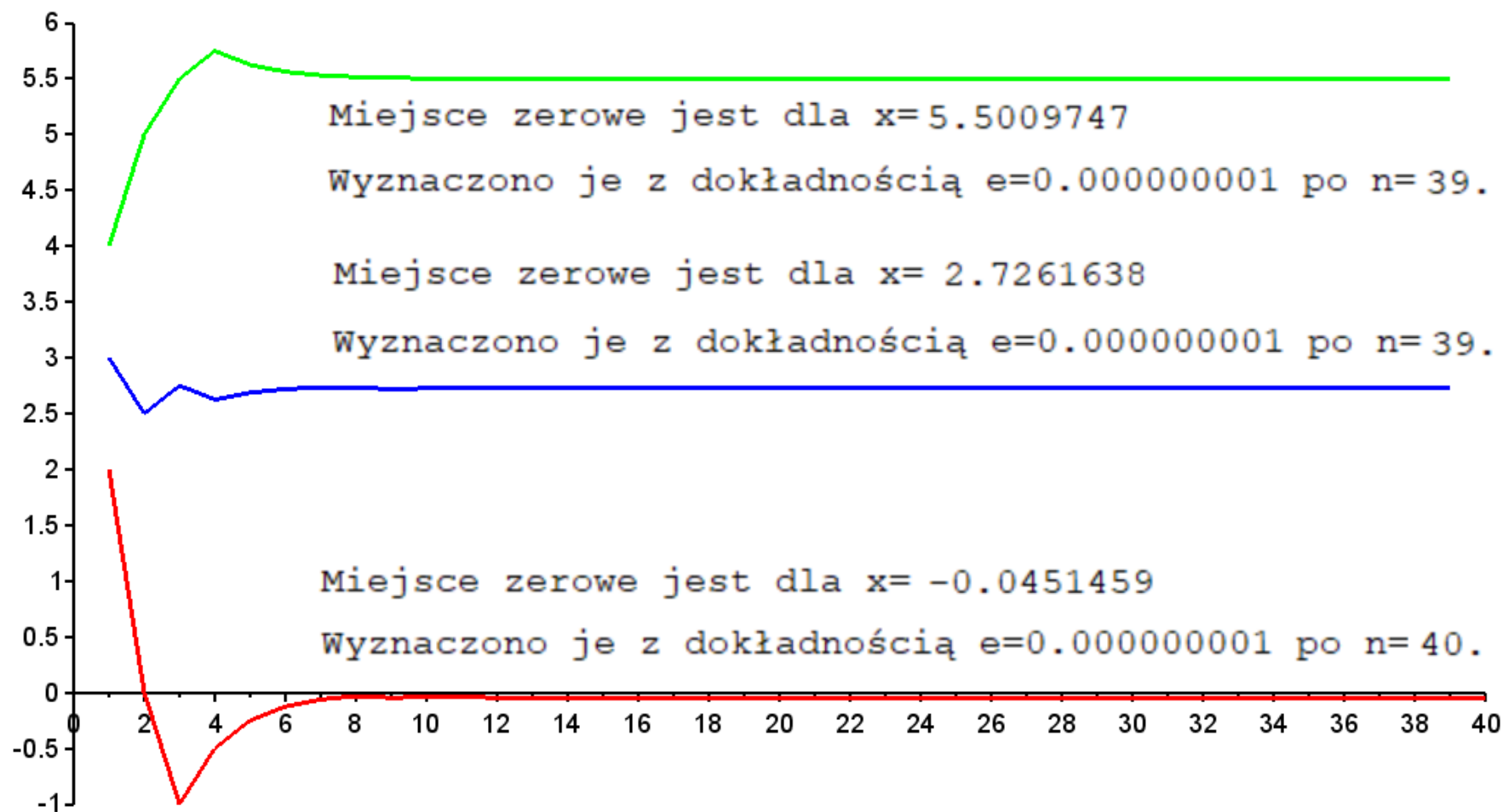


Przykład 1

```
1 clc;clear;
1 function y=fun(x)
2     y=log(x+10)+0.065*x^5-20*x^2+50*x;
3 endfunction
5 y=zeros(1,100);
6 a=-2;b=6;e=0.0000000001;
7 x=zeros(1,100);
8 i=1;
9 x(i)=(a+b)/2;
10 y(i)=fun(x(i));
11 while abs(y(i))>e do
12     if (fun(b)*fun(x(i)))<0 then
13         a=x(i);
14     else
15         b=x(i);
16     end
17     i=i+1;
18     x(i)=(a+b)/2;
19     y(i)=fun(x(i));
20 end
```



Przykład 1



Metoda Regula Falsi

- Nazwa metody pochodzi od złożenia dwóch słów łacińskich regula – linia i falsus – fałszywy i oznacza metodę założenia fałszywej liniowości funkcji
- Działanie metody wynika z założenia że każdą funkcję na dostatecznie krótkim przedziale można aproksymować prostą

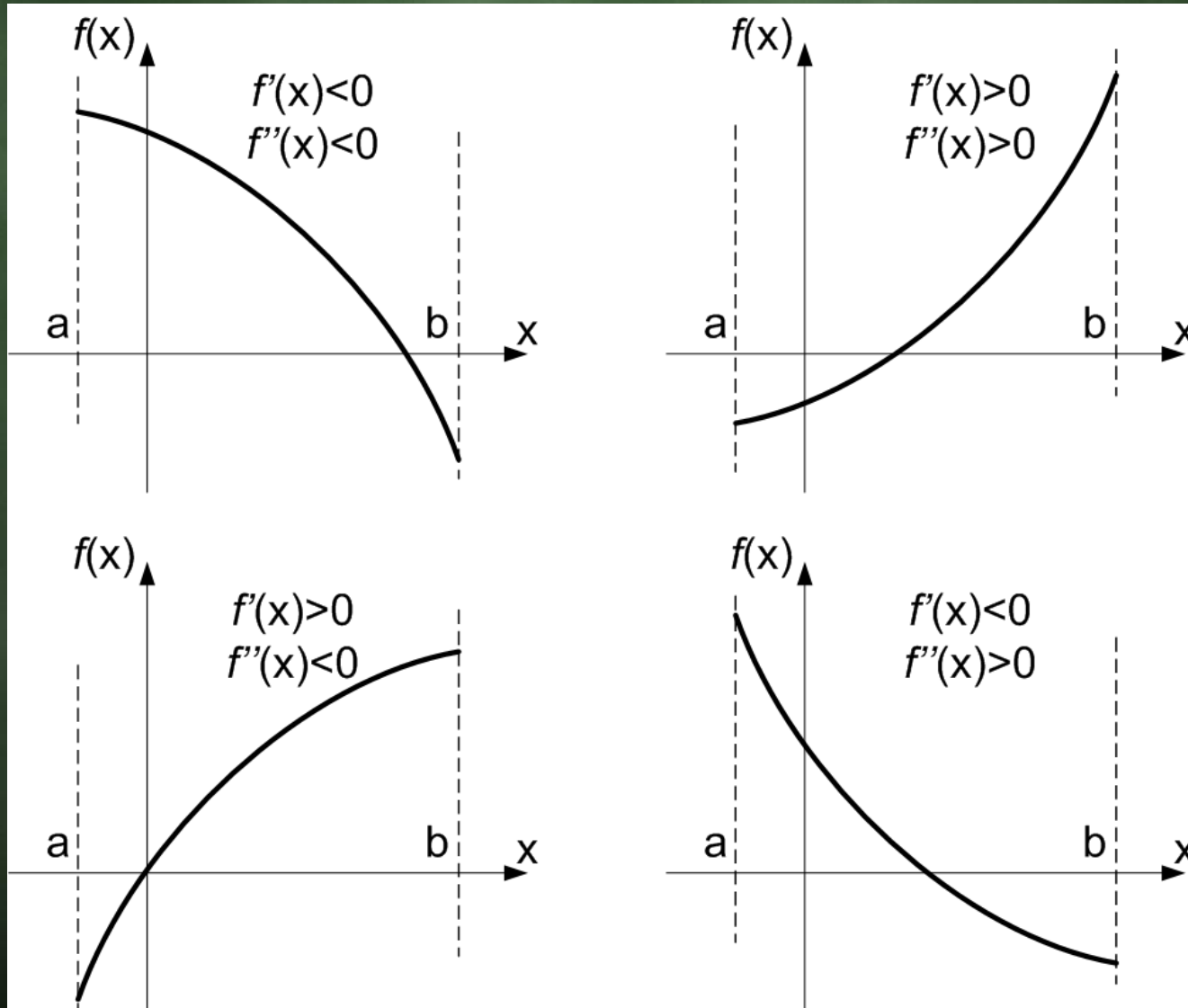
Metoda Regula Falsi

- Funkcja rozwiązywana metodą Regula Falsi musi spełniać warunki:
 - Jest funkcją klasy C2 w przedziale $\langle a, b \rangle$
 - W punktach a i b funkcja przyjmuje wartości o przeciwnych znakach – $f(a)f(b) < 0$
 - Pierwsza i druga pochodna funkcji w przedziale $\langle a, b \rangle$ mają stały znaki i są różne od 0

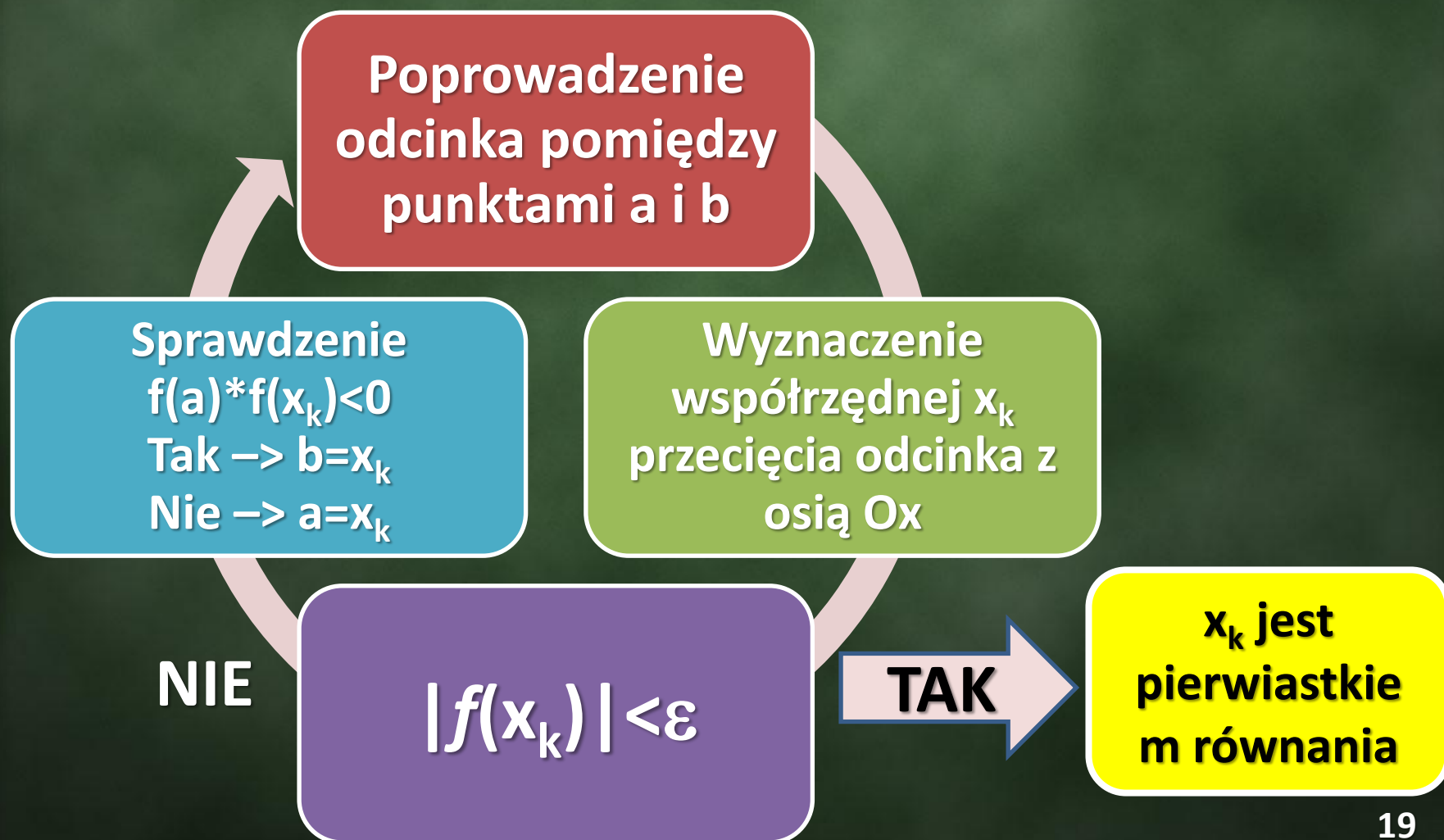
Metoda Regula Falsi

- Metoda będzie zbieżna jeżeli w analizowanym przedziale będzie jedno rozwiązanie
- Spełnienie warunków pochodnych oznacza że funkcja może przyjmować jedno z kształtów

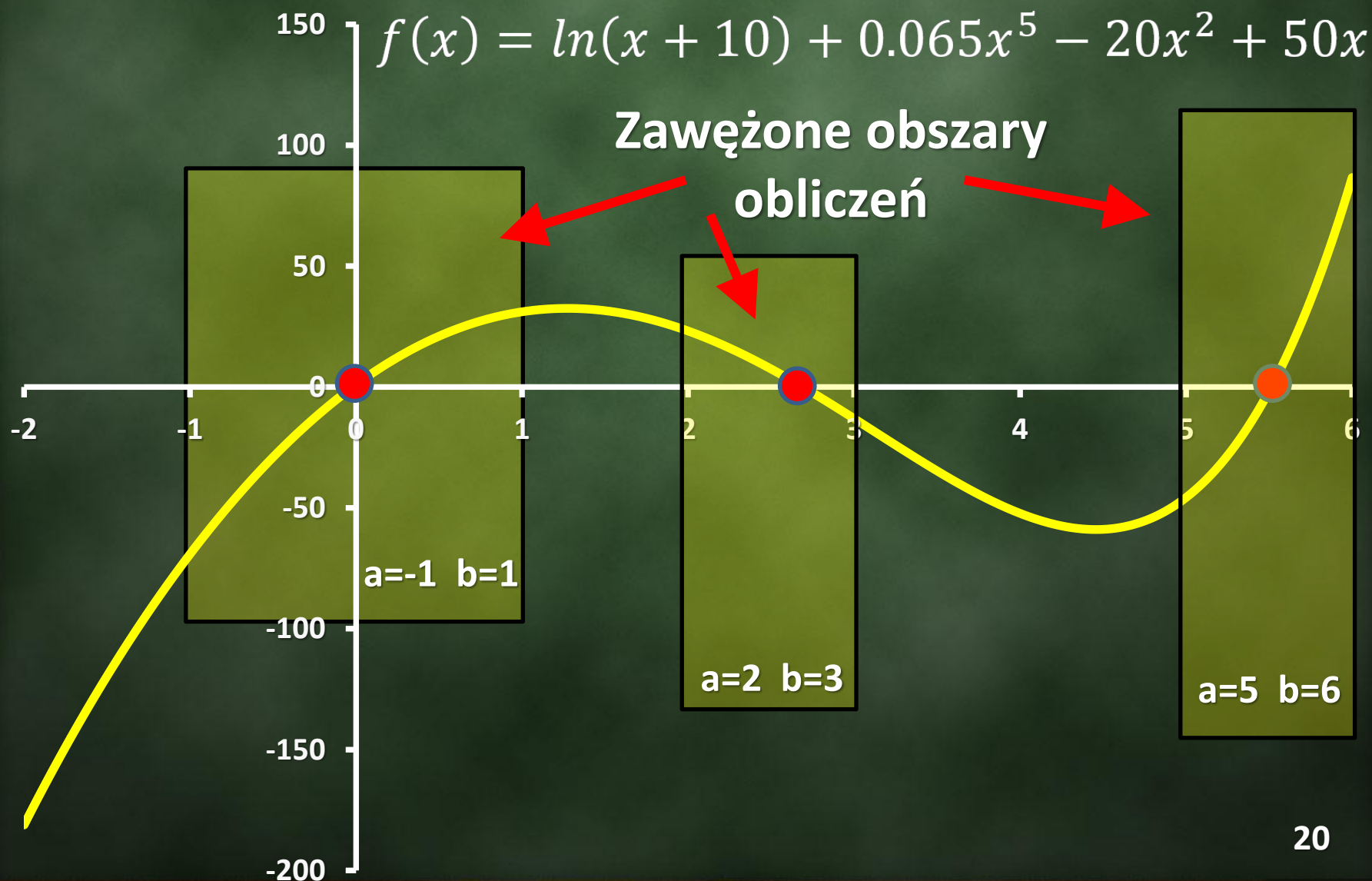
Metoda Regula Falsi



Metoda Regula Falsi

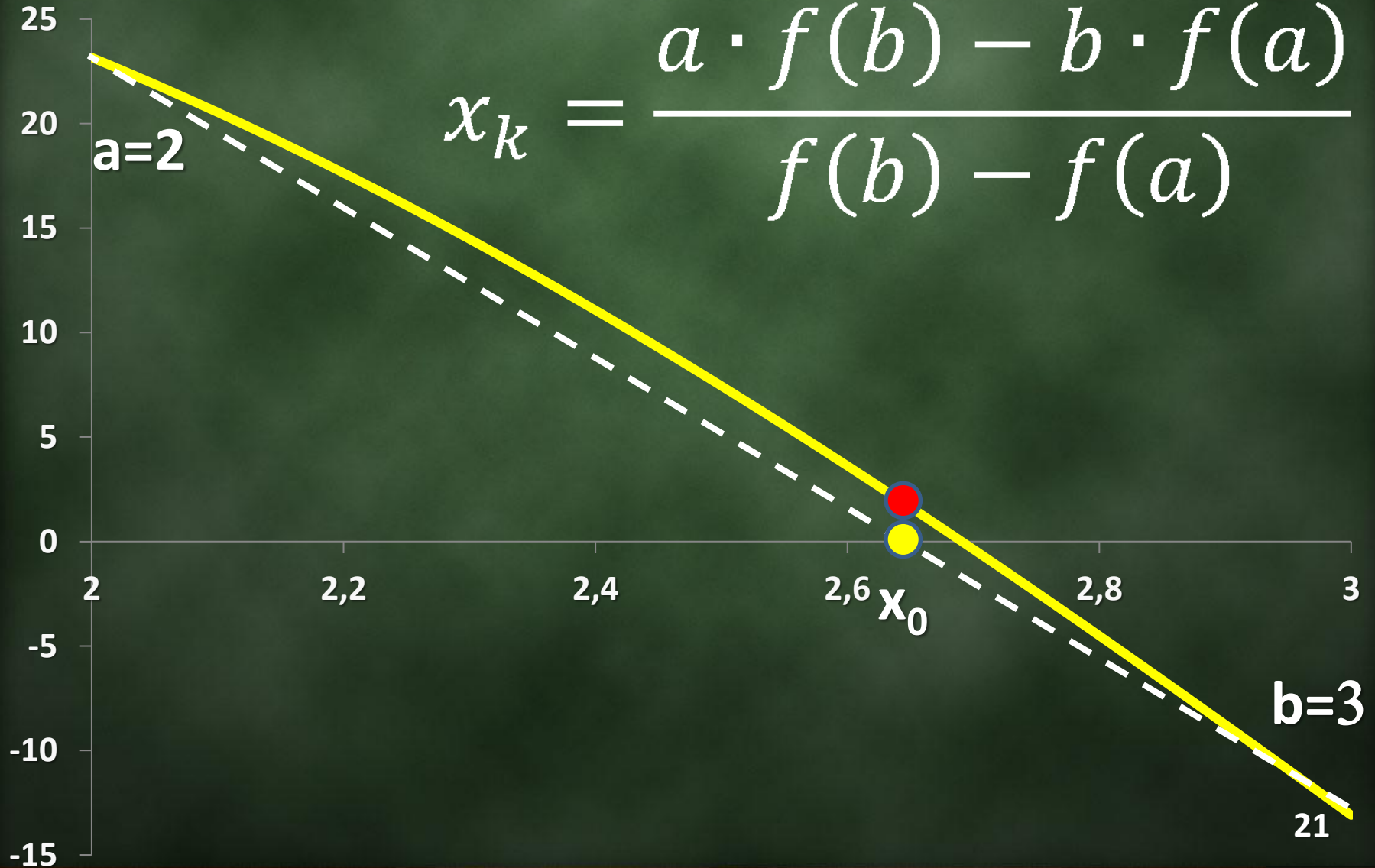


Przykład 2

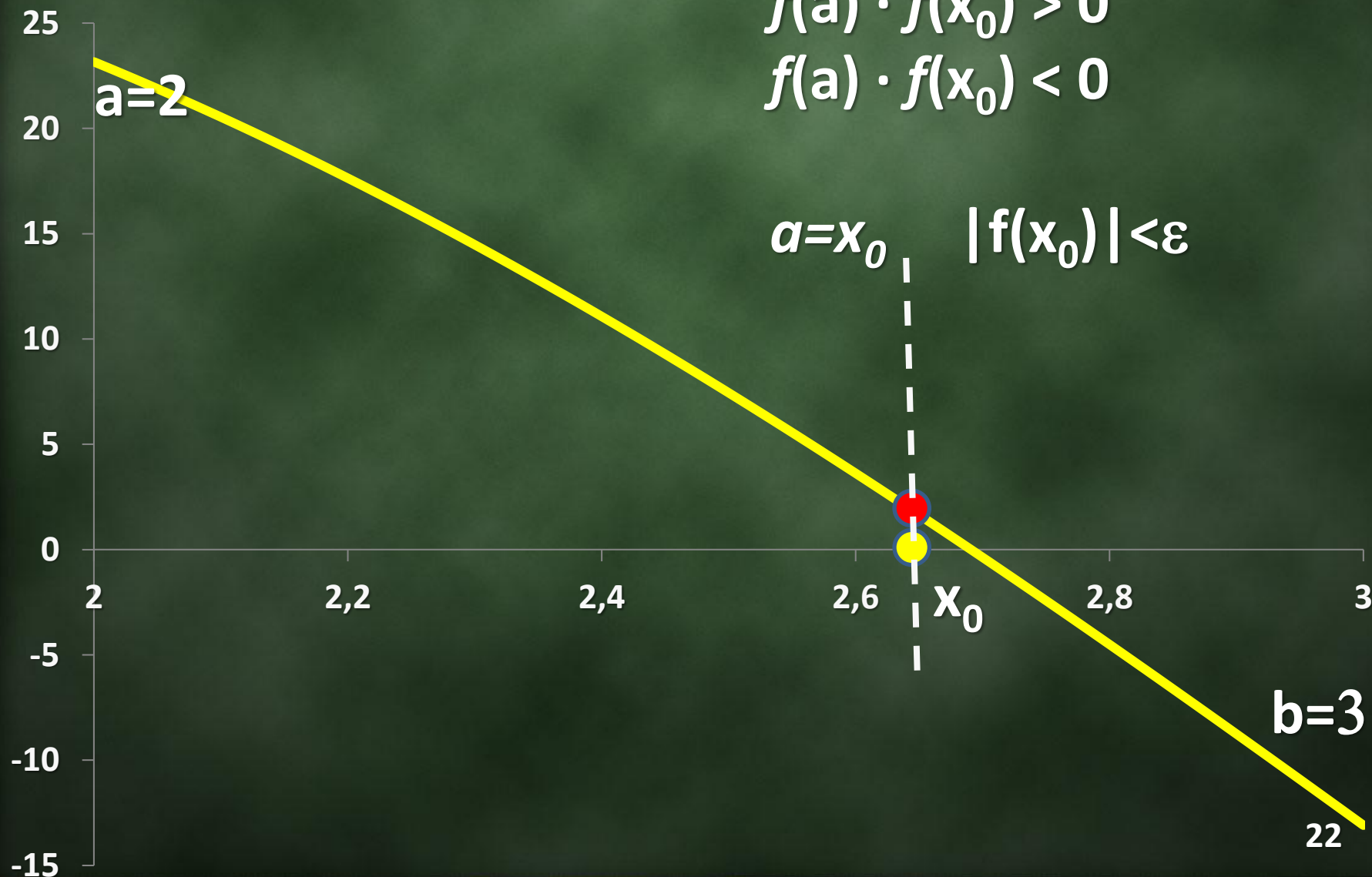


Przykład 2

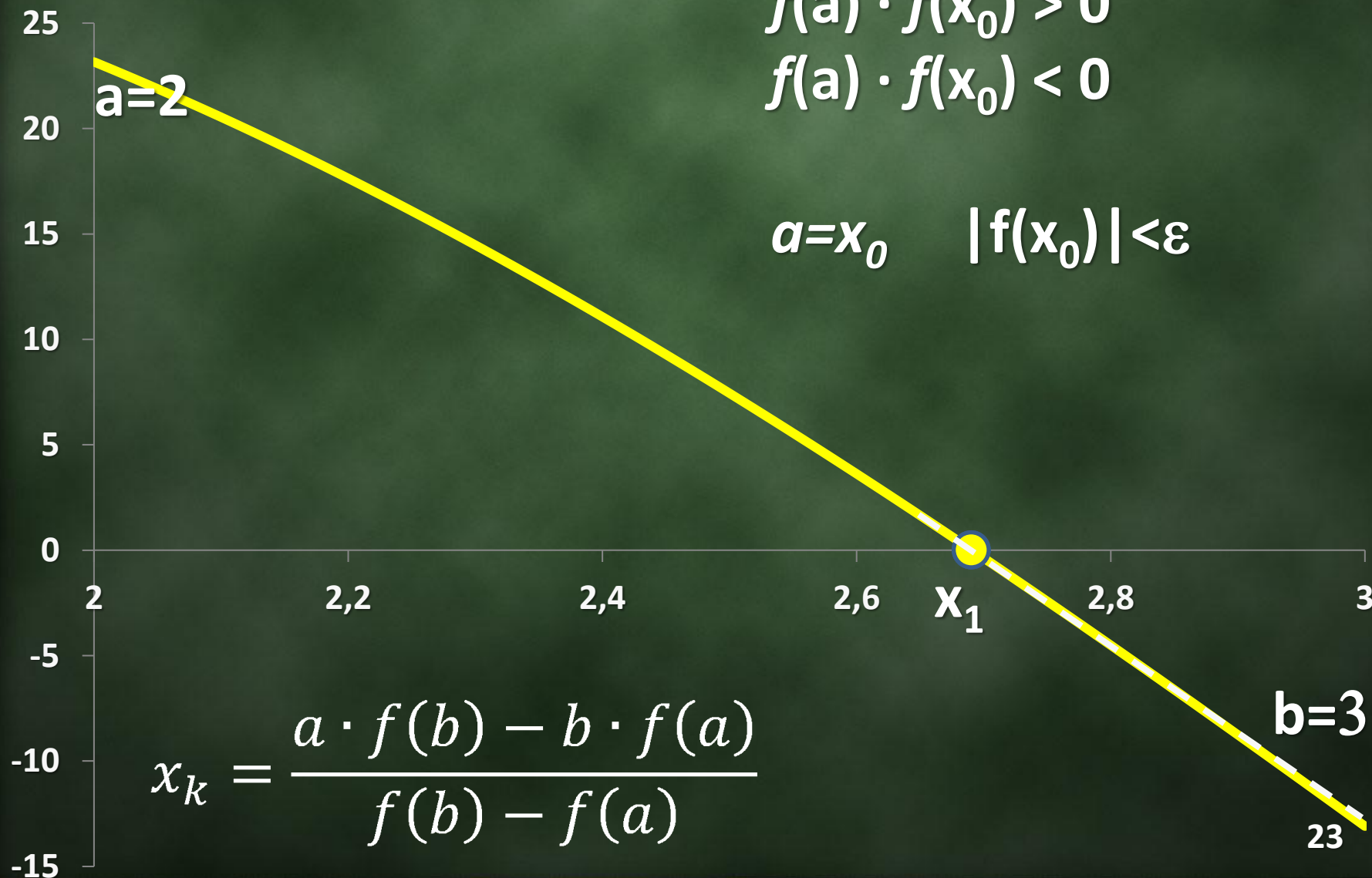
$$x_k = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$



Przykład 2

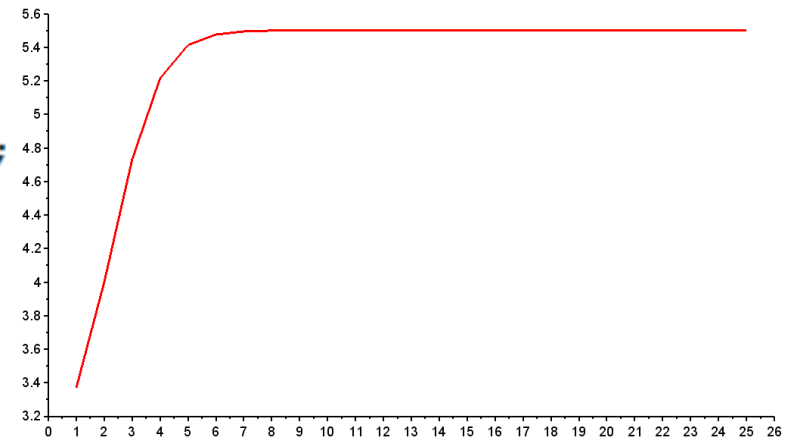


Przykład 2



Przykład 2

```
1 clc;clear;
1 function y=fun(x)
2     y=log(x+10)+0.065*x^5-20*x^2+50*x;
3 endfunction
5 y=zeros(1,100);
6 a=-2;b=6;e=0.0000000001;
7 x=zeros(1,100);
8 i=1;
9 x(i)=(a*fun(b)-b*fun(a))/(fun(b)-fun(a));
10 y(i)=fun(x(i));
11 while abs(y(i))>e-do
12     if (fun(a)*fun(x(i)))<0-then
13         b=x(i);
14     else
15         a=x(i);
16     end
17     i=i+1;
18 x(i)=(a*fun(b)-b*fun(a))/(fun(b)-fun(a));
19     y(i)=fun(x(i));
20     disp(y(i));
21 end
```



Przykład 2

Miejsce zerowe jest dla $x = 5.5009747$

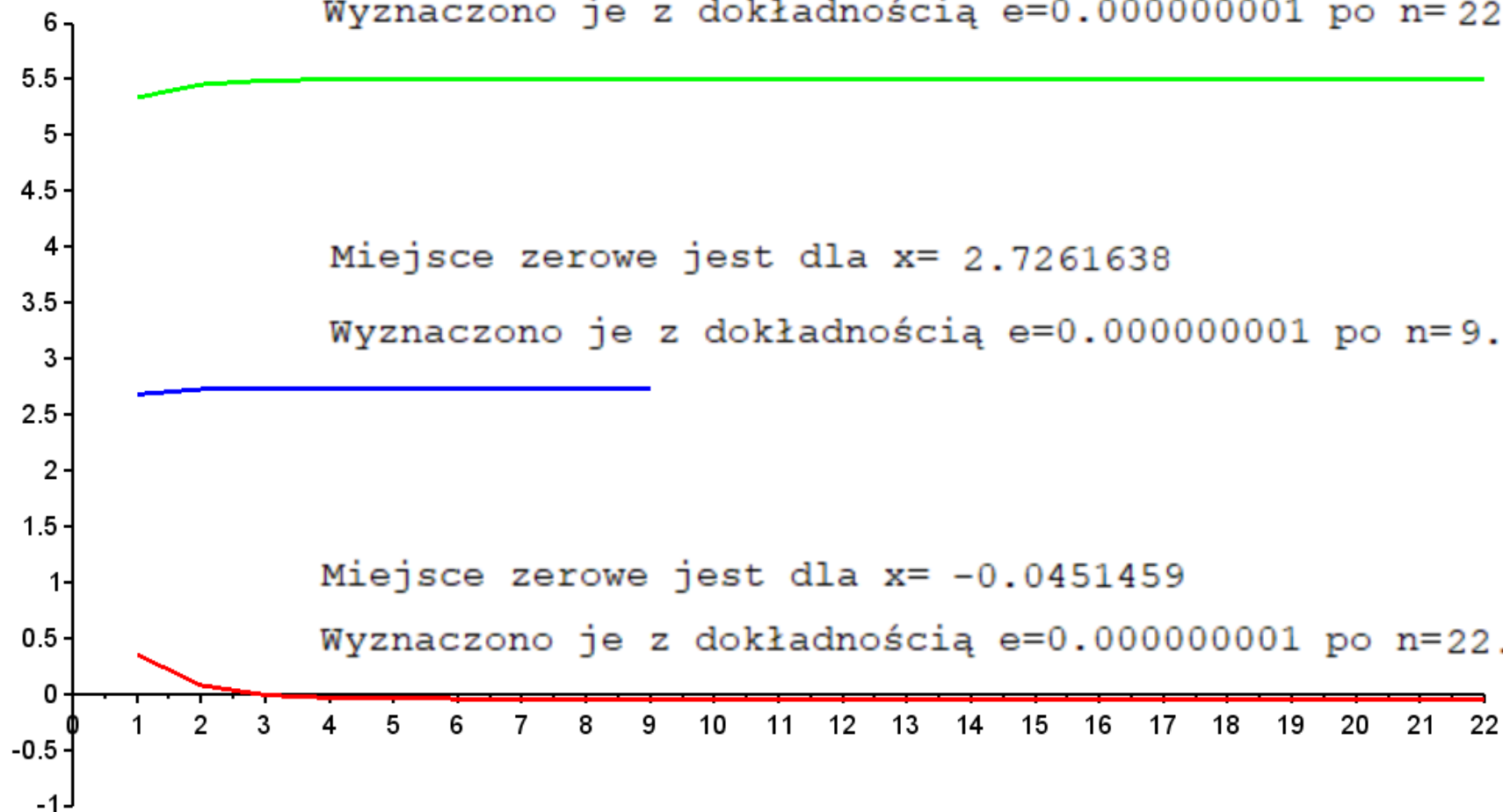
Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 22$.

Miejsce zerowe jest dla $x = 2.7261638$

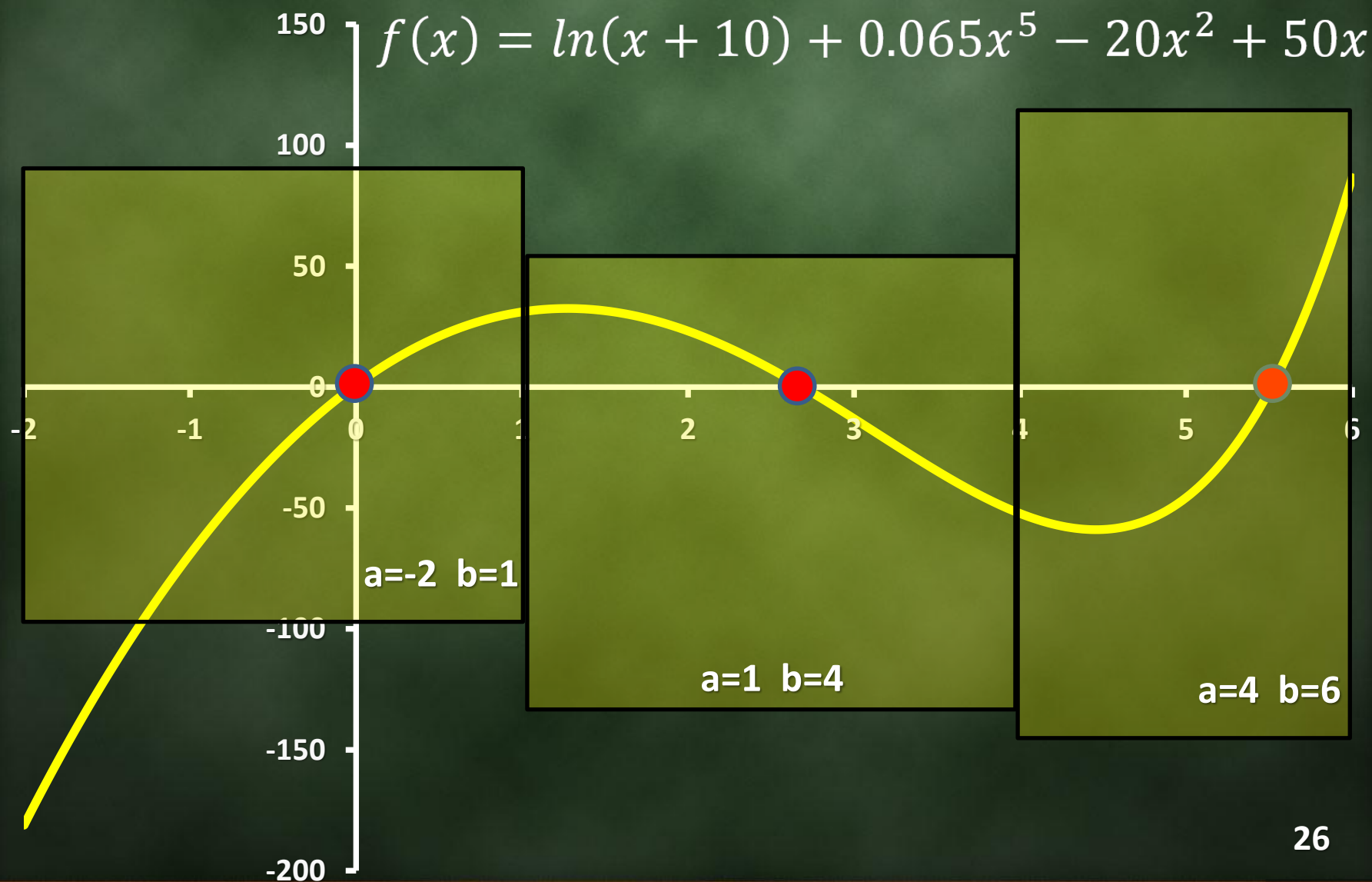
Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 9$.

Miejsce zerowe jest dla $x = -0.0451459$

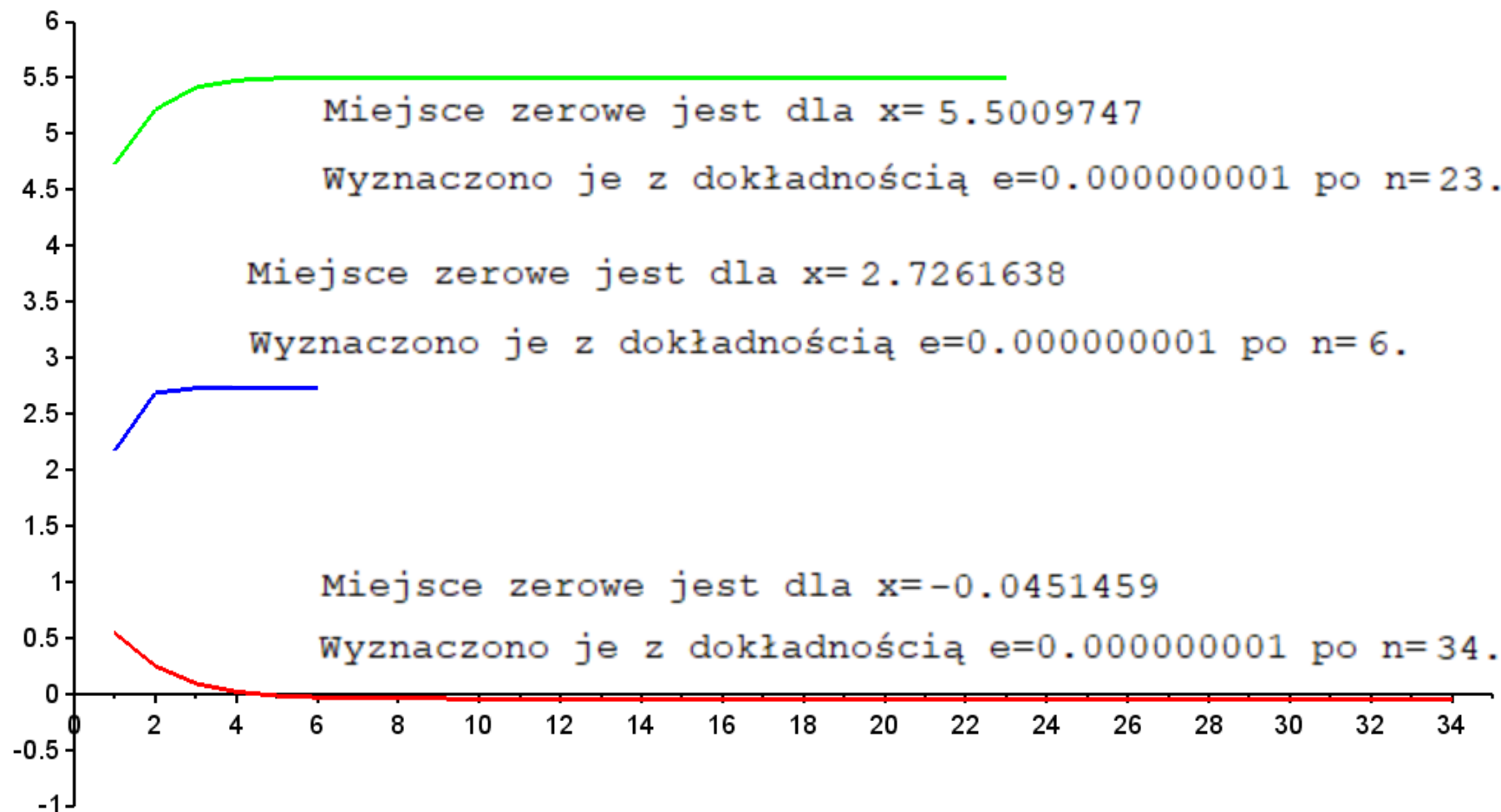
Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 22$.



Przykład 2



Przykład 2



Metoda siecznych

- Metoda stanowi rozwinięcie metody Reguli Falsi
- Kolejne przybliżenia wyznaczane są na podstawie wcześniejszych przybliżeń

Metoda siecznych

- Za wartości początkowe przyjmuje się granice przedziału obliczeń
- Metoda nie wymaga spełnienia warunku $f(a)f(b) < 0$, jednakże przy jego niespełnieniu wyznaczone miejsce zerowe może znajdować się poza początkowym przedziałem obliczeń

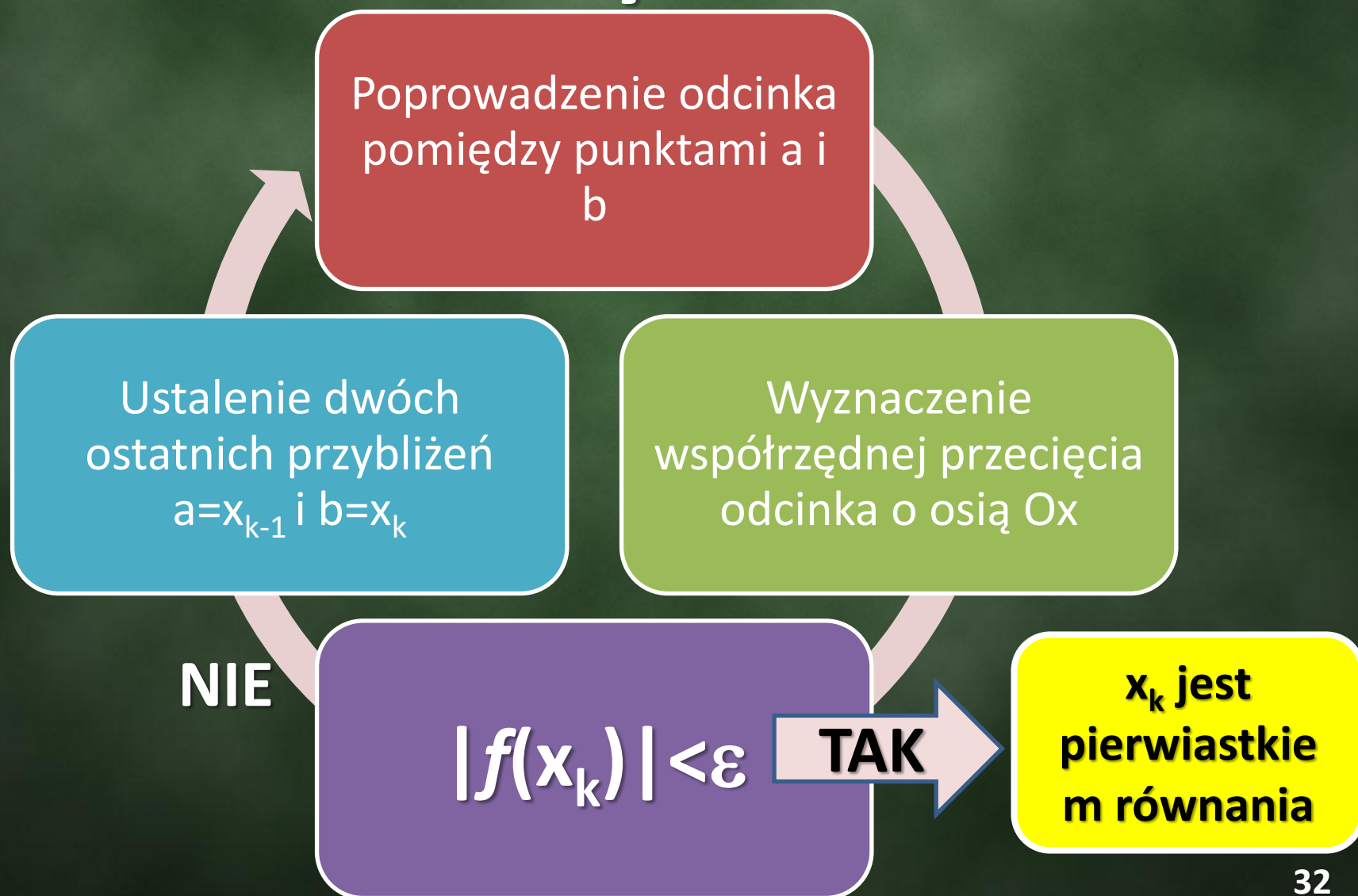
Metoda siecznych

- Metoda może nie dawać wyniku zbieżnego jeżeli początkowe przybliżenie, definiowane przez granice przedziału $\langle a, b \rangle$, jest zbyt duże
- Jeżeli różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami będzie podobna do granicznej dokładności e , może spowodować że kolejne przybliżenie będzie błędne, utraczona zostanie zbieżność

Metoda siecznych

- Konieczne jest więc dołożenie dodatkowego warunku sprawdzającego czy $x_{n+1} - x_n$ jest malejące, jeżeli zacznie rosnać należy przerwać obliczenia.

Metoda siecznych

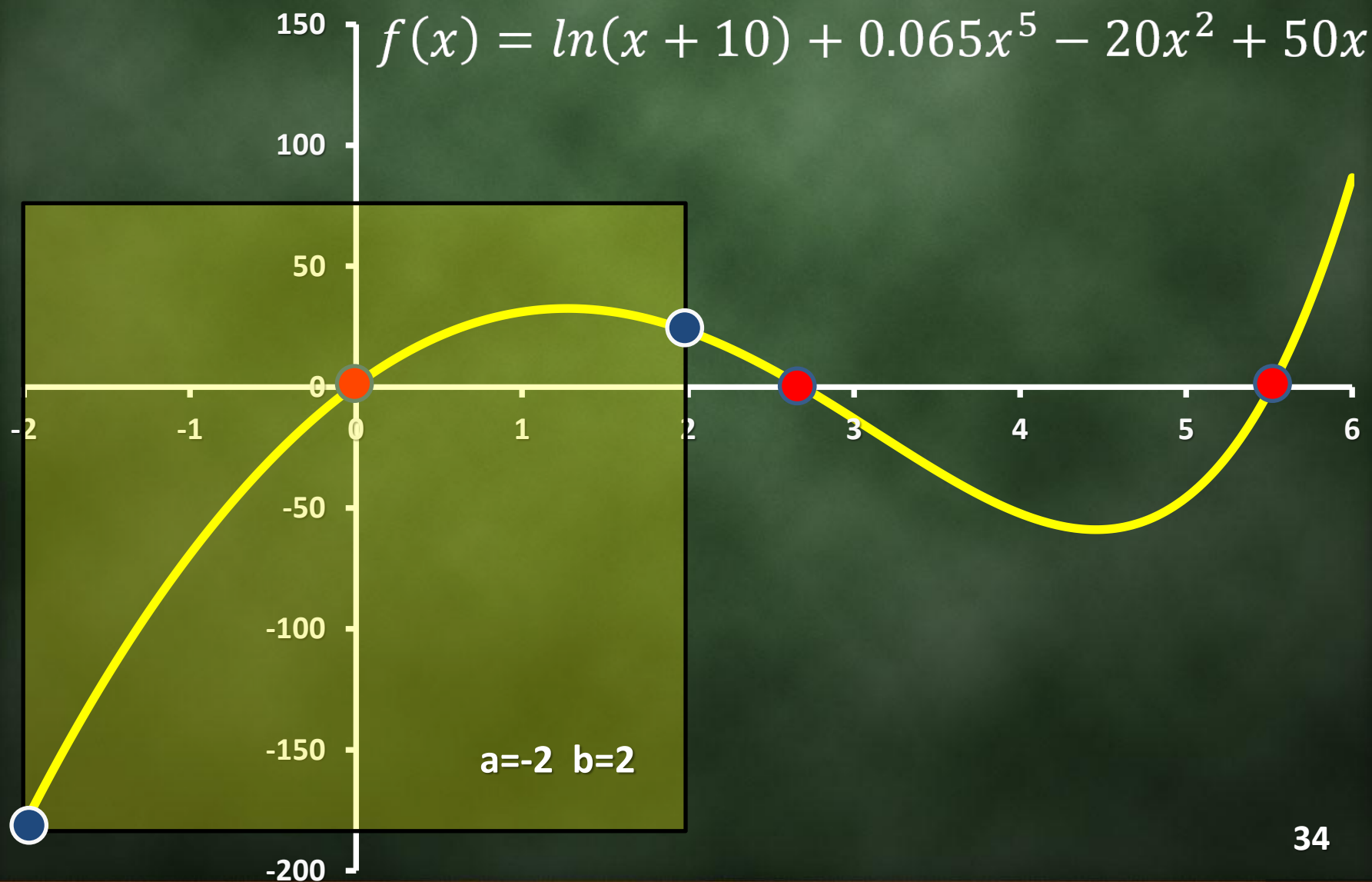


Metoda siecznych

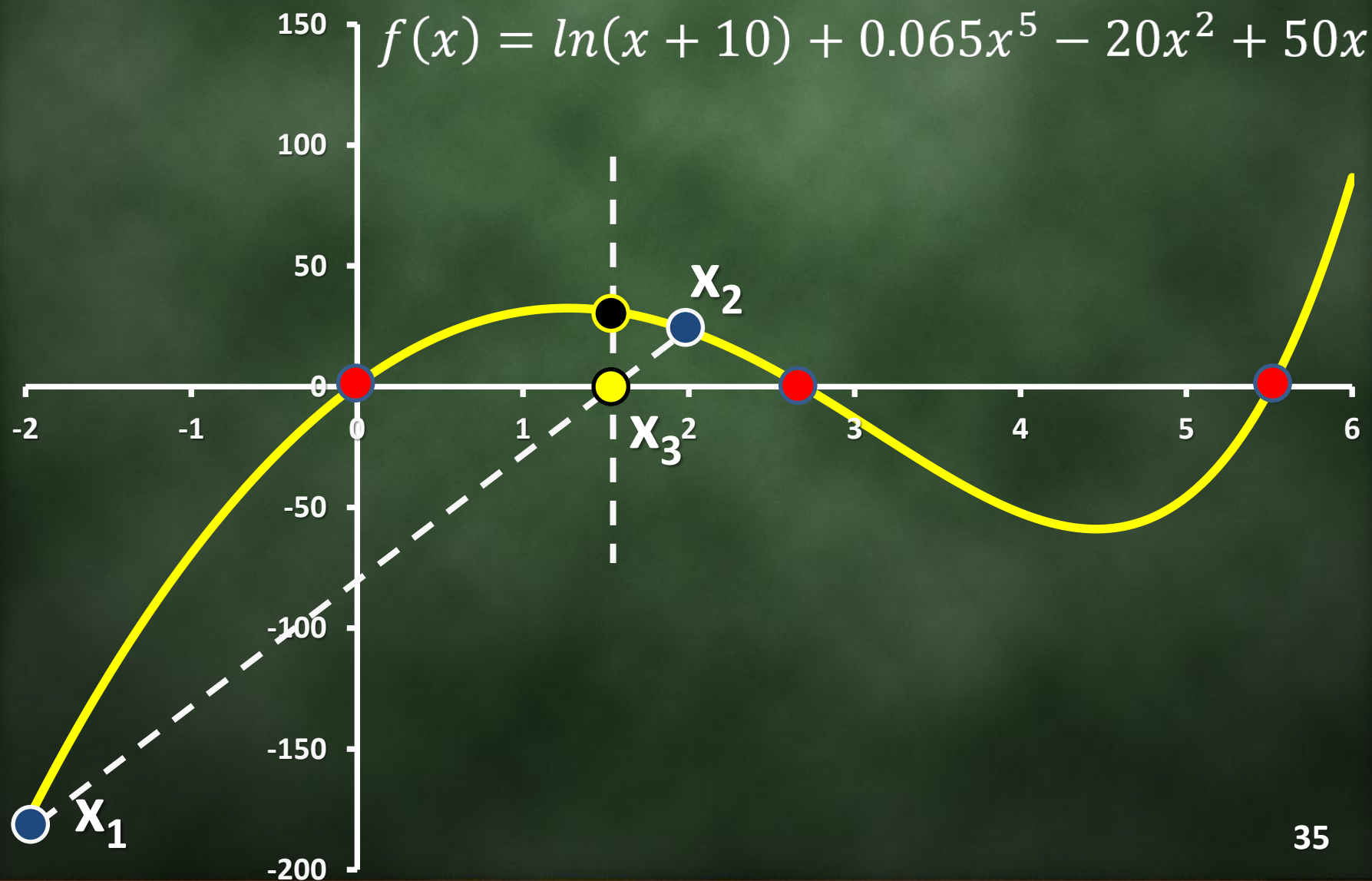
- Kolejne przybliżenia wyznaczane są na podstawie poniższej zależności
- Wartości początkowe $x_k=b$, $x_{k-1}=a$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

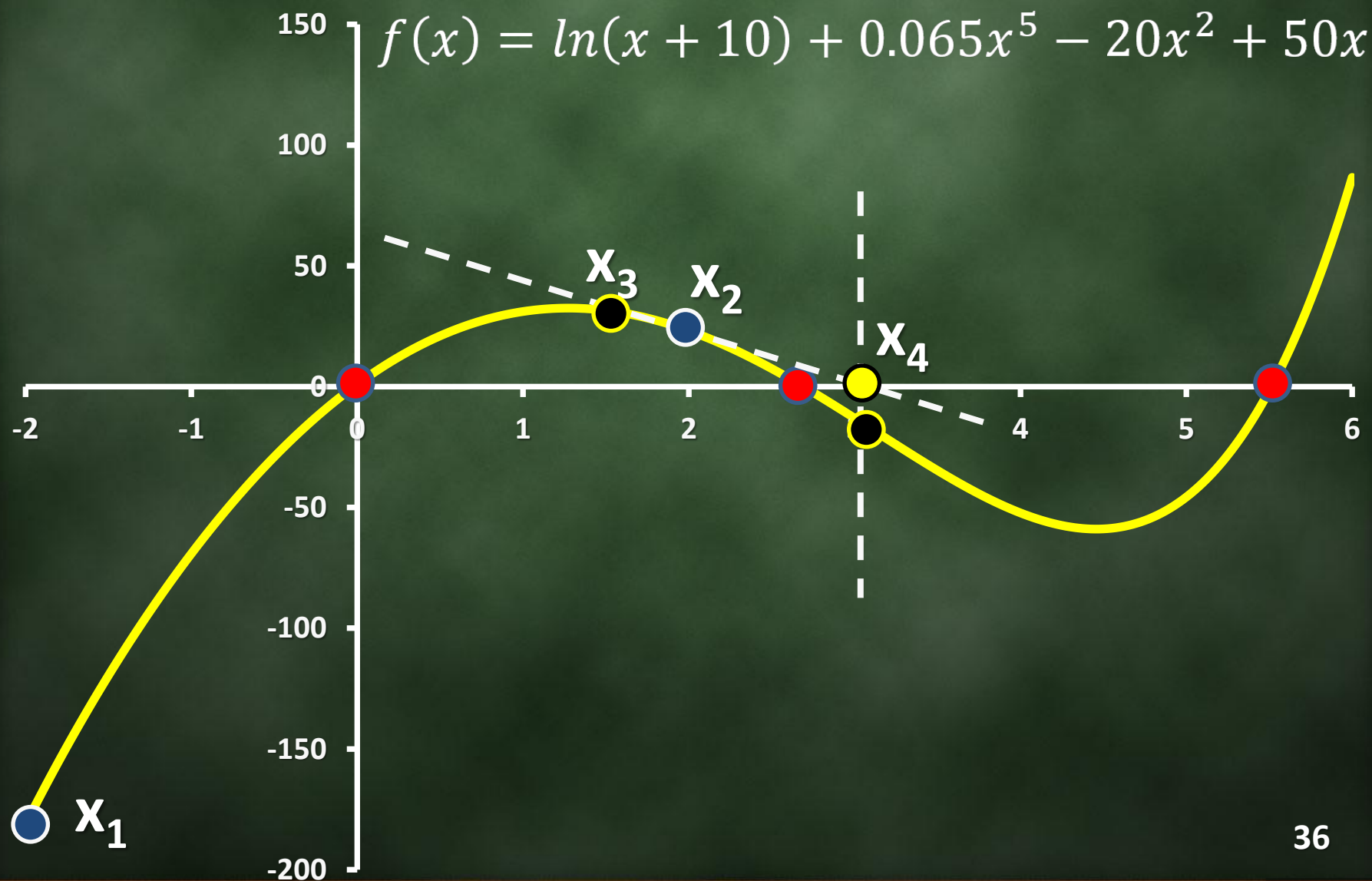
Przykład 3



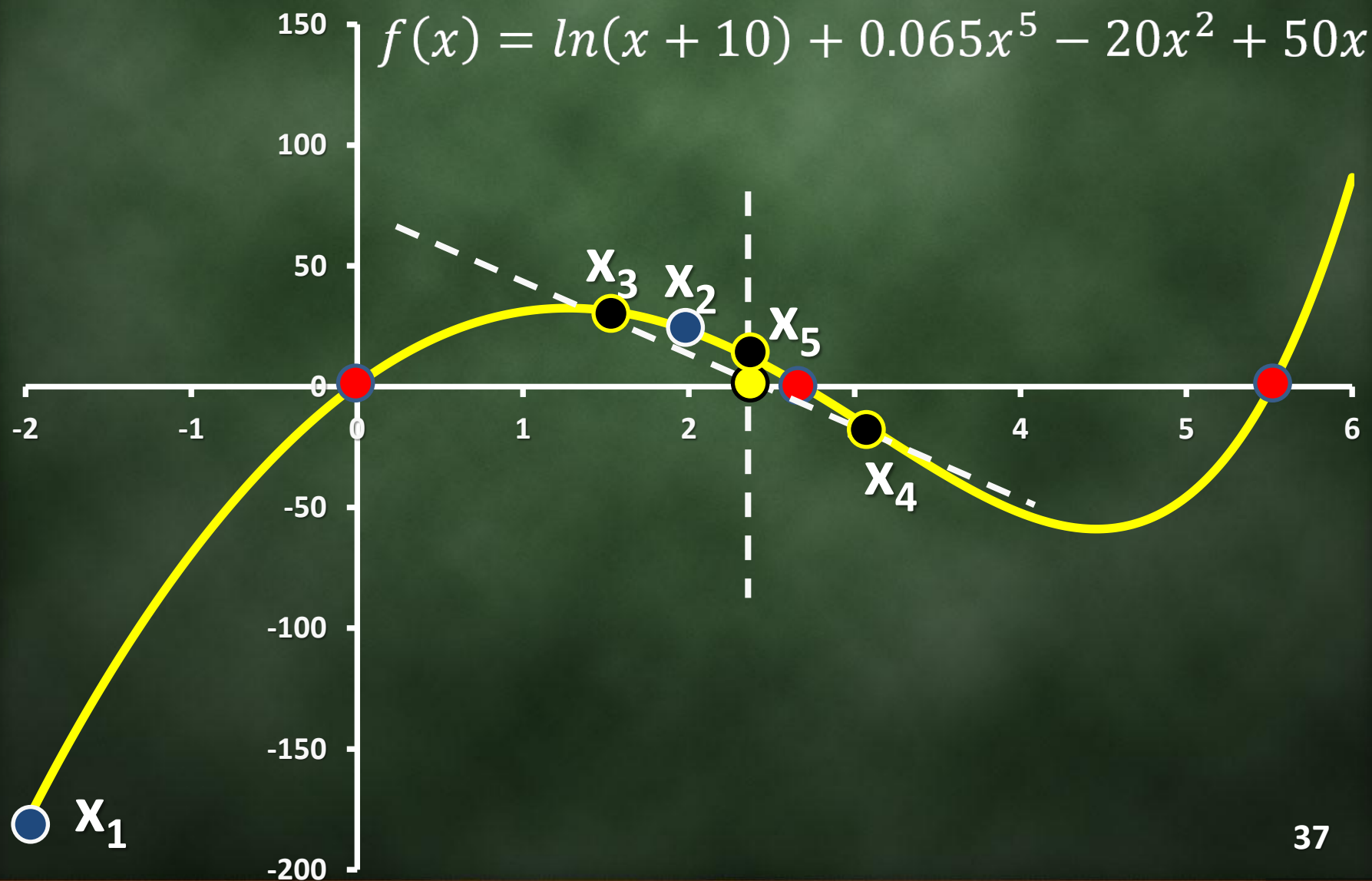
Przykład 3



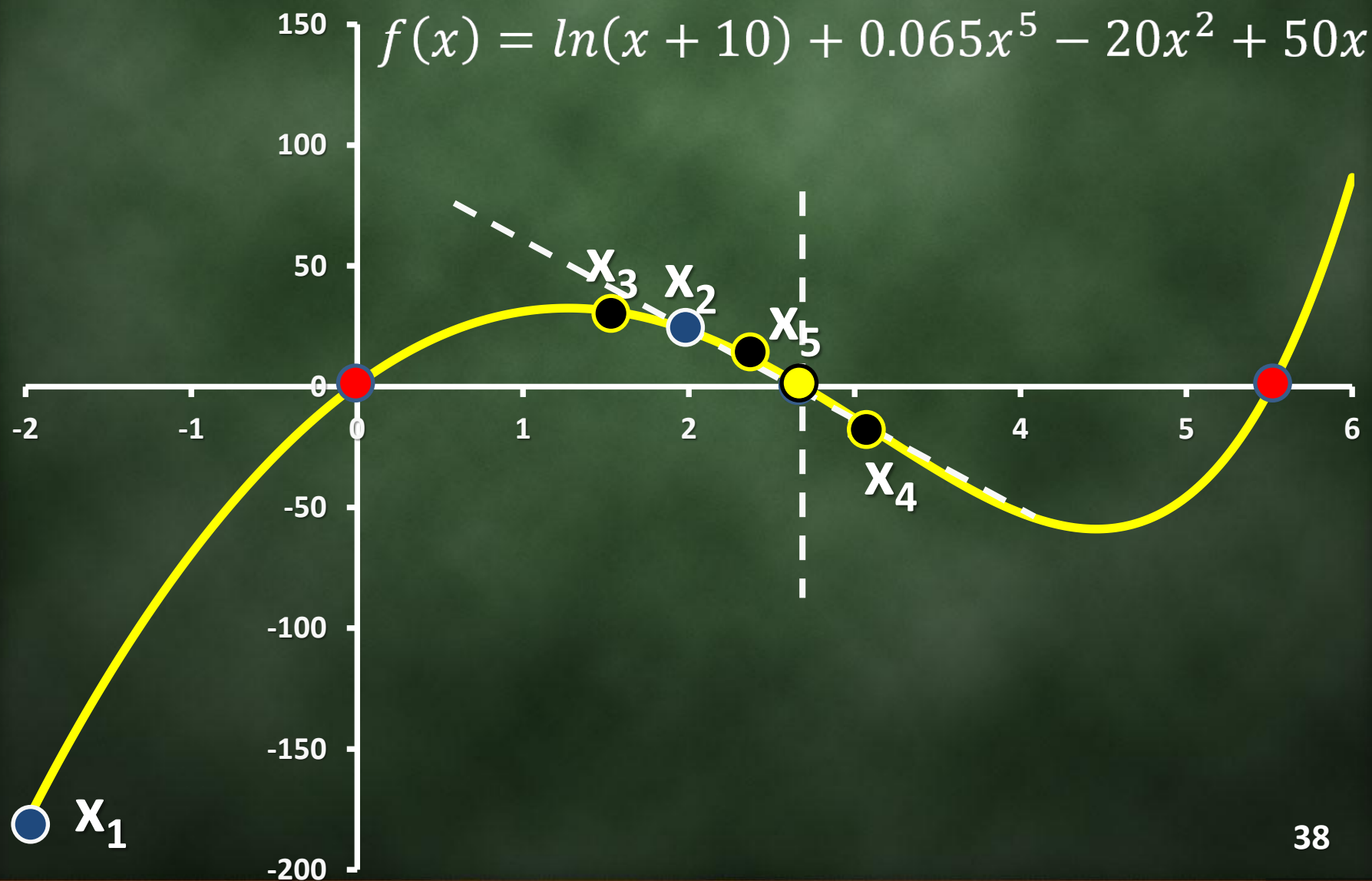
Przykład 3



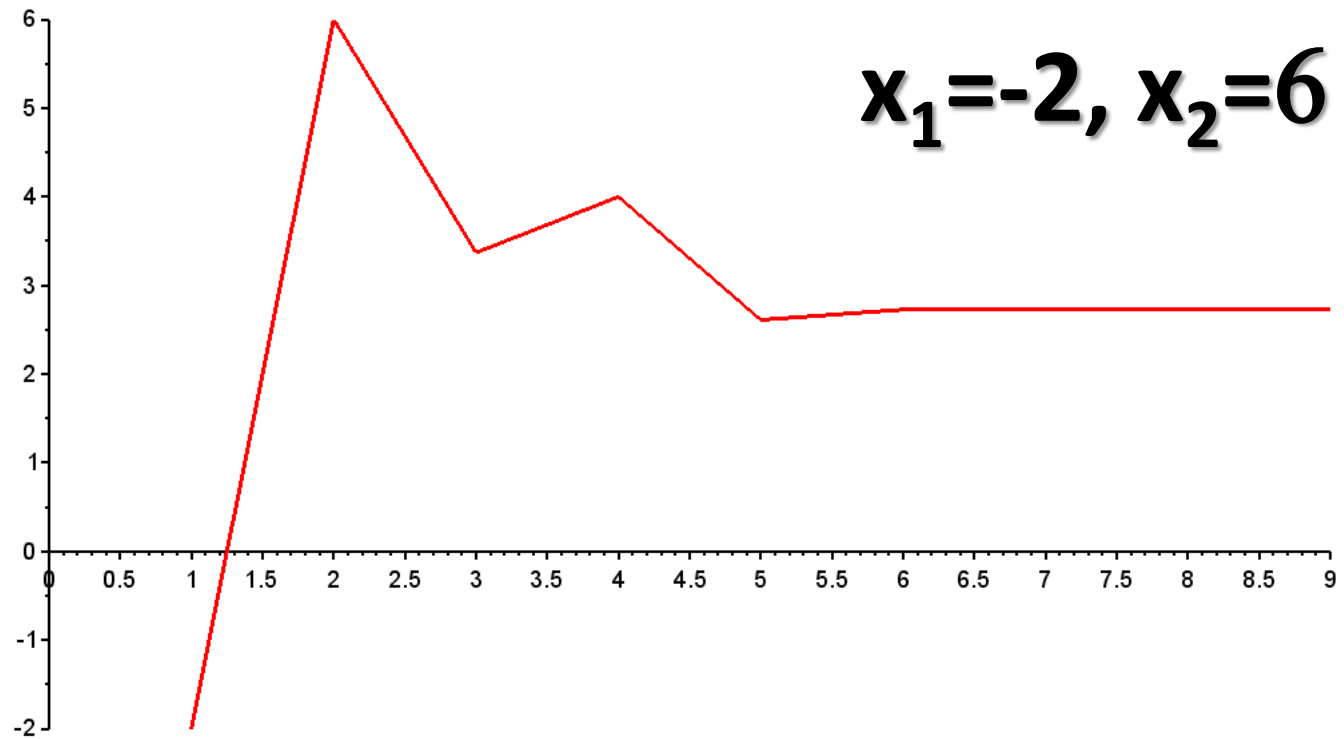
Przykład 3



Przykład 3



Przykład 3



```

9 x(1)=a;
10 x(2)=b;
11 x(i)=x(i-1)-(fun(x(i-1))*(x(i-1)-x(i-2)))/(fun(x(i-1))-fun(x(i-2)));
12 y(i)=fun(x(i));
13 while abs(y(i))>e do
14     i=i+1;
15 x(i)=x(i-1)-(fun(x(i-1))*(x(i-1)-x(i-2)))/(fun(x(i-1))-fun(x(i-2)));
16     y(i)=fun(x(i));
17 end

```

Przykład 3

Przeprowadzono symulacje dla kilku wartości początkowych:

1. $x_1=-2, x_2=2$
2. $x_1=1, x_2=5$
3. $x_1=3, x_2=6$

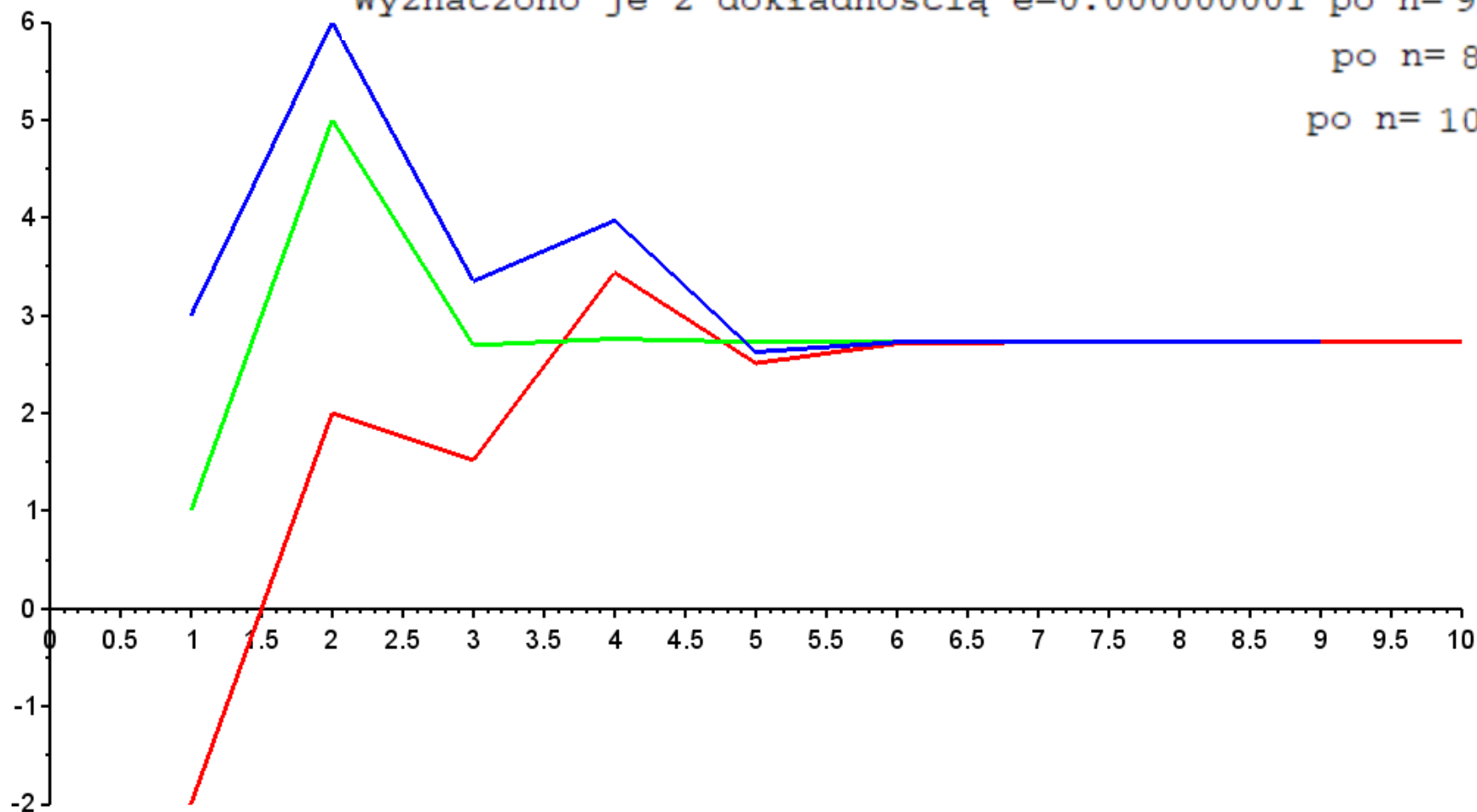
Przykład 3

Miejsce zerowe jest dla $x = 2.7261638$

Wyznaczono je z dokładnością $e = 0.000000001$ po $n = 9$.

po $n = 8$.

po $n = 10$.



Przykład 3

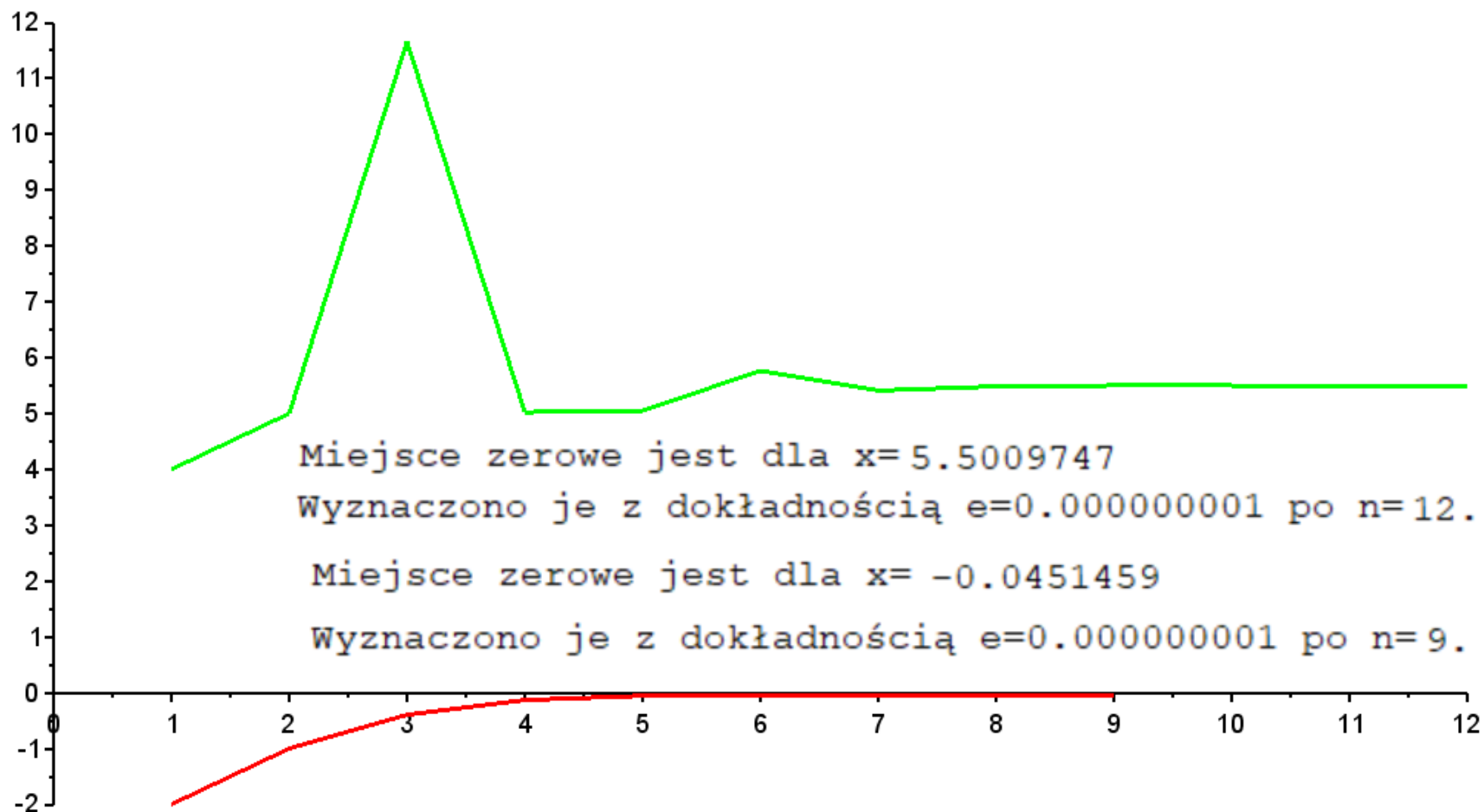
- Konieczna jest optymalizacja doboru punktów startowych

1. $x_1 = -2, x_2 = -1$

2. $x_1 = 4, x_2 = 5$

- W przypadku funkcji okresowych możliwe jest znalezienie miejsc zerowych poza przedziałem

Przykład 3



Metoda Newtona-Raphsona

- Metoda określana często jako metoda stycznych
- Metoda charakteryzuje się zbieżnością kwadratową

Metoda Newtona-Raphsona

- Analizowana funkcja musi spełniać warunki:
 - W analizowanym przedziale posiadać tylko jedno miejsce zerowe
 - Posiadać różne znaki na krańcach analizowanego przedziału $f(a)f(b) < 0$
 - Pierwsza i druga pochodna w analizowanym przedziale mają stały znak

Metoda Newtona-Raphsona

- Metoda polega na aproksymacji funkcji prostą styczną do wykresu funkcji w punkcie $P(x_k, f(x_k))$
- Punkt x_{k+1} przecięcia stycznej z osią Ox jest kolejnym przybliżeniem rozwiązania

Metoda Newtona-Raphsona

- Wzór rekurencyjny realizujący obliczenie kolejnego przybliżenia rozwiązania wymaga znajomości wartości pierwszej pochodnej w punkcie styczności
- Metoda wymaga podania punktu startowego x_0 , właściwy jego dobór ma decydujące znaczenie dla zbieżności rozwiązania

Metoda Newtona-Raphsona

Określenie punktu
startowego –
pierwszego przybliżenia
 $x_k = x_0$

Określenie wartości
funkcji i jej pochodnej
funkcji w punkcie x_k

$$|f(x_k)| < \varepsilon$$

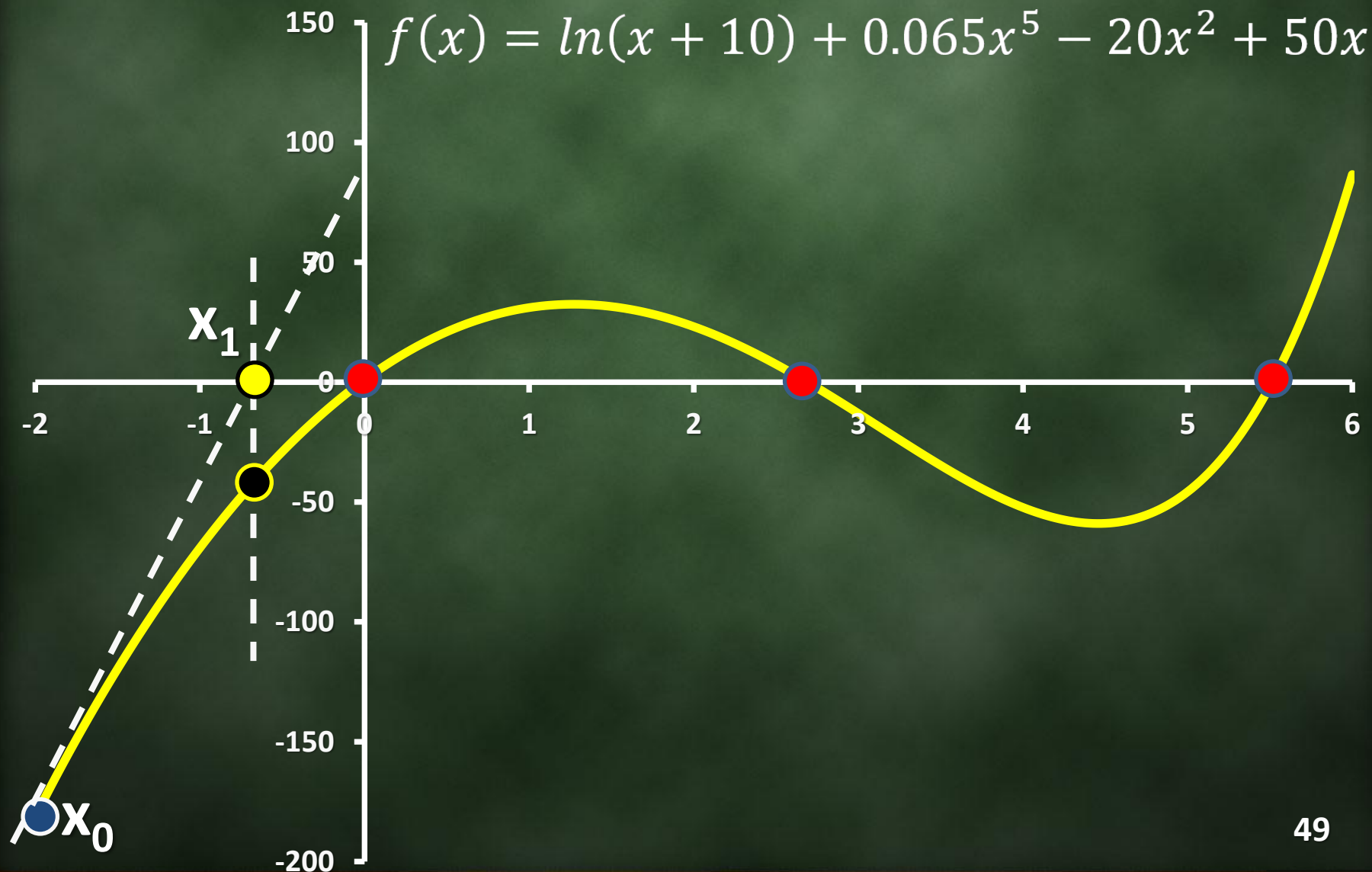
Wyznaczenie
współrzędnej x_k
przecięcia odcinka z
osią Ox

TAK

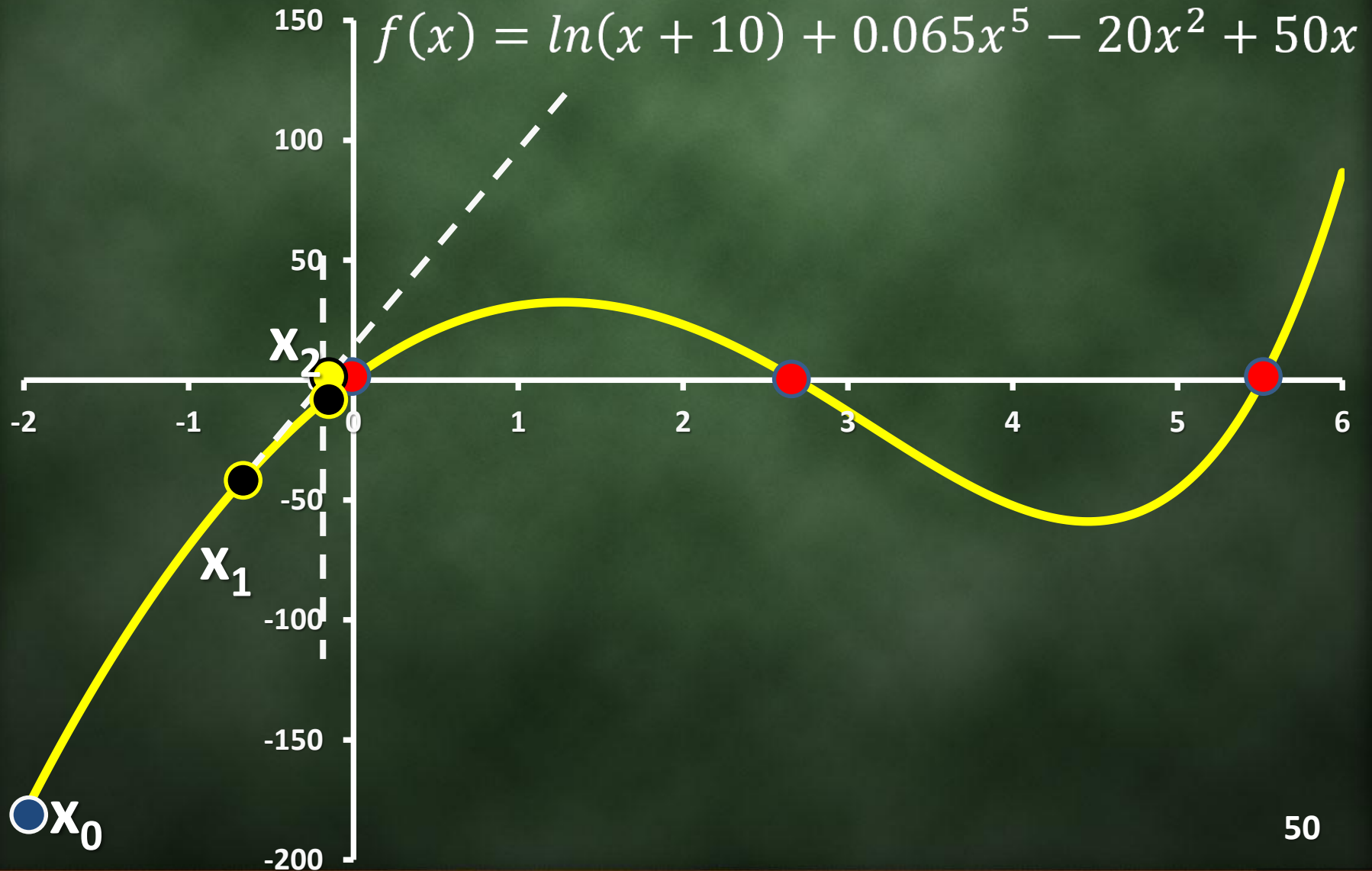
x_k jest
pierwiastkiem
m równania

NIE

Metoda Newtona-Raphsona



Metoda Newtona-Raphsona



Metoda Newtona-Raphsona

- Kolejne przybliżenia są wyznaczane ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- Wartość pierwszej pochodnej może zostać wprowadzona jako równanie, lub jeżeli program obliczeniowy pozwala liczona w trakcie iteracji

Przykład 4

Pochodna dla analizowanej funkcji:

$$f(x) = \ln(x + 10) + 0.065x^5 - 20x^2 + 50x$$

wynosi:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x + 10} + 0.325x^4 - 40x + 50$$

Przykład 4

- Pochodną funkcji można wyznaczyć za pomocą funkcji scilaba **y=diff(x)** która wyznacza wektor przyrostów dla wektora wejściowego x
- Wyznaczenie pochodnej funkcji można zrealizować:

$$\frac{df(x_k)}{dx_k} = \text{diff}(f(x))./\text{diff}(x)$$

Przykład 4

```

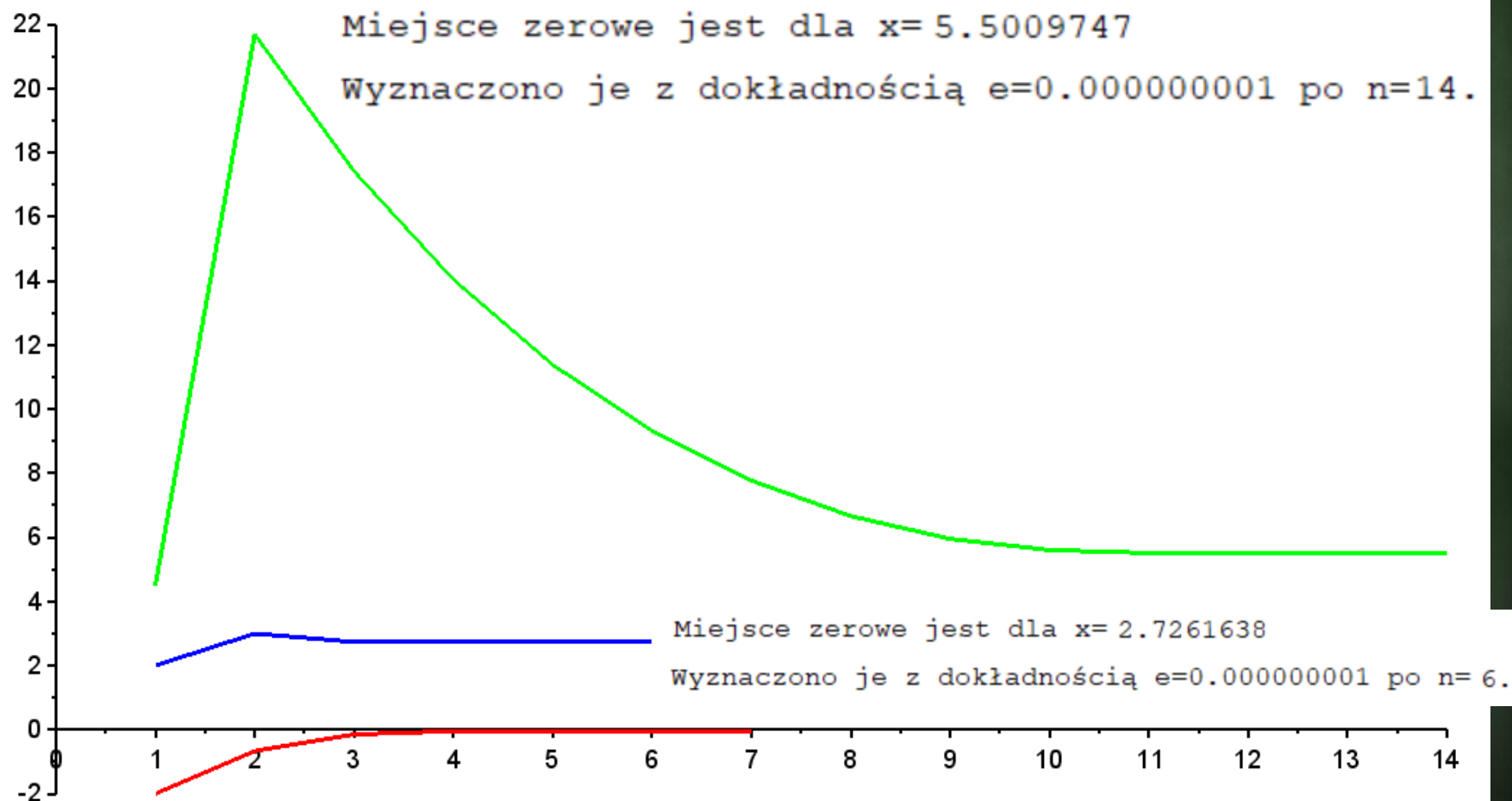
1  function y=pochodna(a,b,x)
2      steps=(b-a)/1000;
3      t=linspace(x-2*steps,x+2*steps,11);
4      dy=diff(fun(t))./diff(t);
5      y=dy(6);
6  endfunction
18 y(1)=fun(x(1));
19 while (abs(y(i))>e)
20     i=i+1;
21     x(i)=x(i-1)-fun(x(i-1))/fun_prim(x(i-1));
22     y(i)=fun(x(i));
23 end
24 .....
22     y(i)=fun(x(i));
23 end

```

Przykład 4

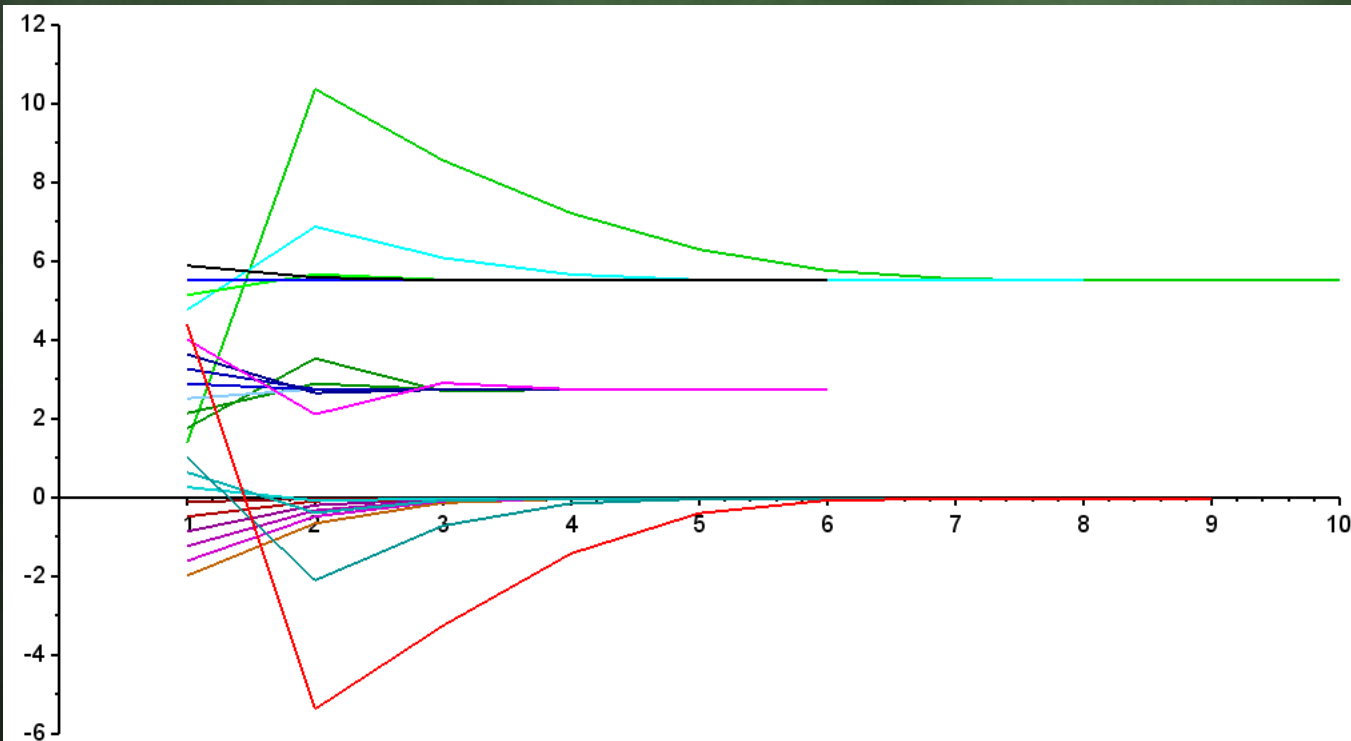
- Przeprowadzono symulację dla następujących wartości startowych:
 1. $x_0 = -2$
 2. $x_0 = 2$
 3. $x_0 = 4.5$
- W przypadku funkcji okresowych możliwe wyznaczenie pierwiastków poza analizowanym przedziałem

Przykład 4



Przykład 4

Przeprowadzono analizę wpływu punktu startowego na wyznaczenie miejsca zerowego



-2.	7.
-1.625	6.
-1.25	6.
-0.875	6.
-0.5	5.
-0.125	4.
0.25	5.
0.625	6.
1.	8.
1.375	10.
1.75	6.
2.125	5.
2.5	5.
2.875	4.
3.25	5.
3.625	5.
4.	6.
4.375	9.
4.75	8.
5.125	6.
5.5	3.
5.875	6.

Przykład 4

Miejsce zerowe wyznaczono dla punktów startowych:

column 1 to 10

-2. -1.625 -1.25 -0.875 -0.5 -0.125 0.25 0.625 1. 1.375

column 11 to 20

1.75 2.125 2.5 2.875 3.25 3.625 4. 4.375 4.75 5.125

column 21 to 22

5.5 5.875

Wyznaczono je odpowiednio po n krokach

column 1 to 14

7. 6. 6. 6. 5. 4. 5. 6. 8. 10. 6. 5. 5. 4.

column 15 to 22

5. 5. 6. 9. 8. 6. 3. 6.

Metoda iteracji prostej

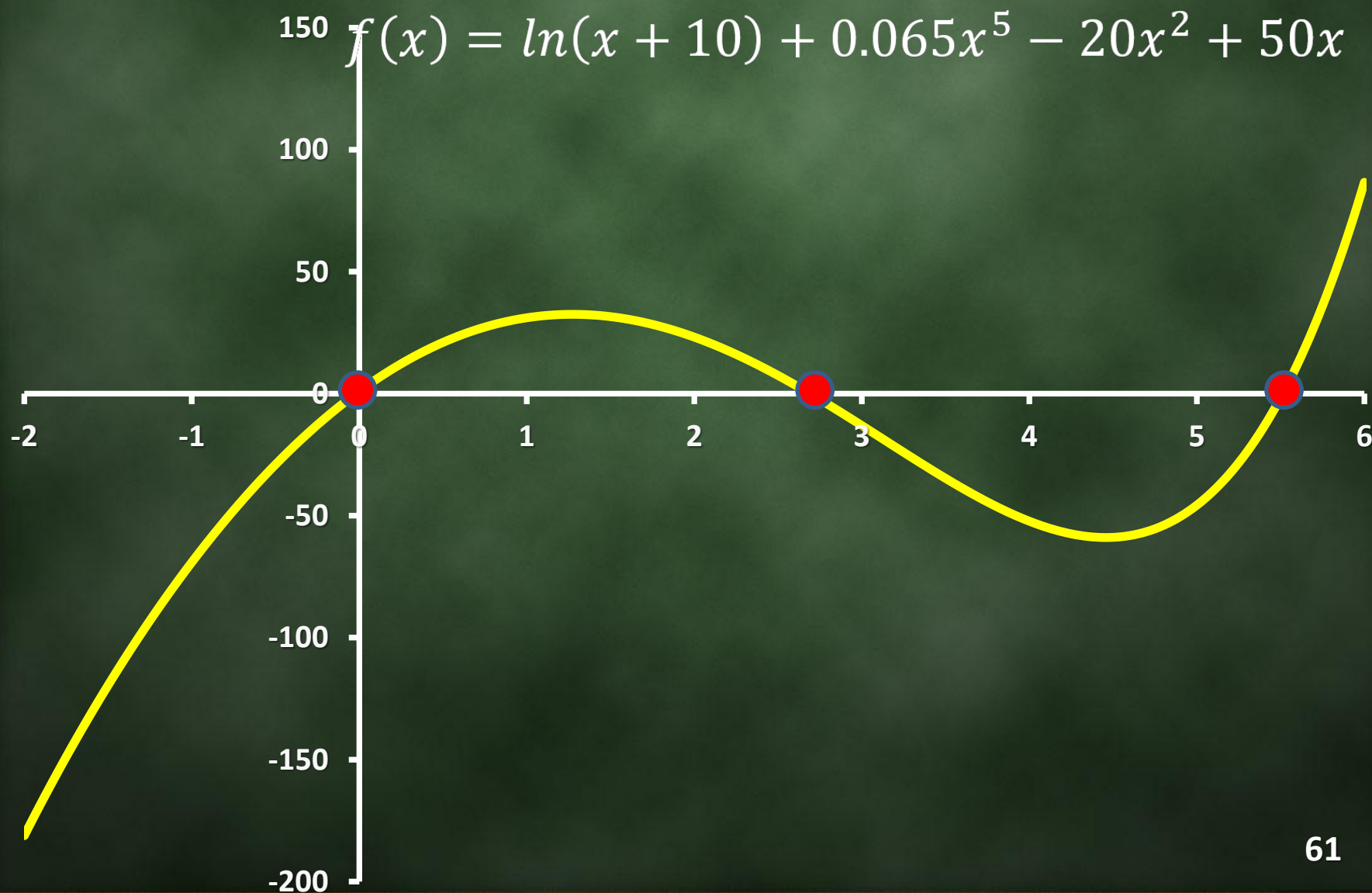
- Metoda polega na uściślaniu przybliżonej wartości pierwiastka.
- Zadanie to realizuje się poprzez przekształcenie funkcji $y=f(x)$ do postaci $x=\phi(x)$
- Zazwyczaj możliwe jest wykonanie kilku postaci takiego przekształcenia
- Aby rozwiązanie było zbieżne w otoczeniu miejsca zerowego funkcja $\phi(x)$ powinna spełniać warunek

$$|\phi'(x)| < 1$$

Metoda iteracji prostej

- Kolejne przybliżenia wyznaczone są na podstawie spełniającego warunek równania $x = \phi(x)$
- Dobór punktu startowego zależy od przebiegu funkcji

Przykład 5



Przykład 5

$$\ln(x + 10) + 0.065x^5 - 20x^2 + 50x = 0$$

$$1. \varphi(x) = \frac{20x^2 - \ln(x + 10) - 0.065x^5}{50}$$

$$2. \varphi(x) = \sqrt{\frac{\ln(x + 10) + 0.065x^5 + 50x}{20}}$$

$$3. \varphi(x) = \sqrt[5]{\frac{20x^2 - \ln(x + 10) - 50x}{0.065}}$$

$$4. \varphi(x) = e^{0.065x^5 - 20x^2 + 50x} - 10$$

Przykład 5

- Należy policzyć pochodną każdej funkcji przekształconej
- Sprawdzić które z nich spełniają warunek w zadanym przedziale obliczeń

$$|\phi'(x)| < 1$$

- Lub odległość pomiędzy kolejnymi przybliżeniami powinna być coraz mniejsza

- $|\phi'(x_{k+1}) - \phi'(x_k)| < |\phi'(x_k) - \phi'(x_{k-1})|$

Przykład 5

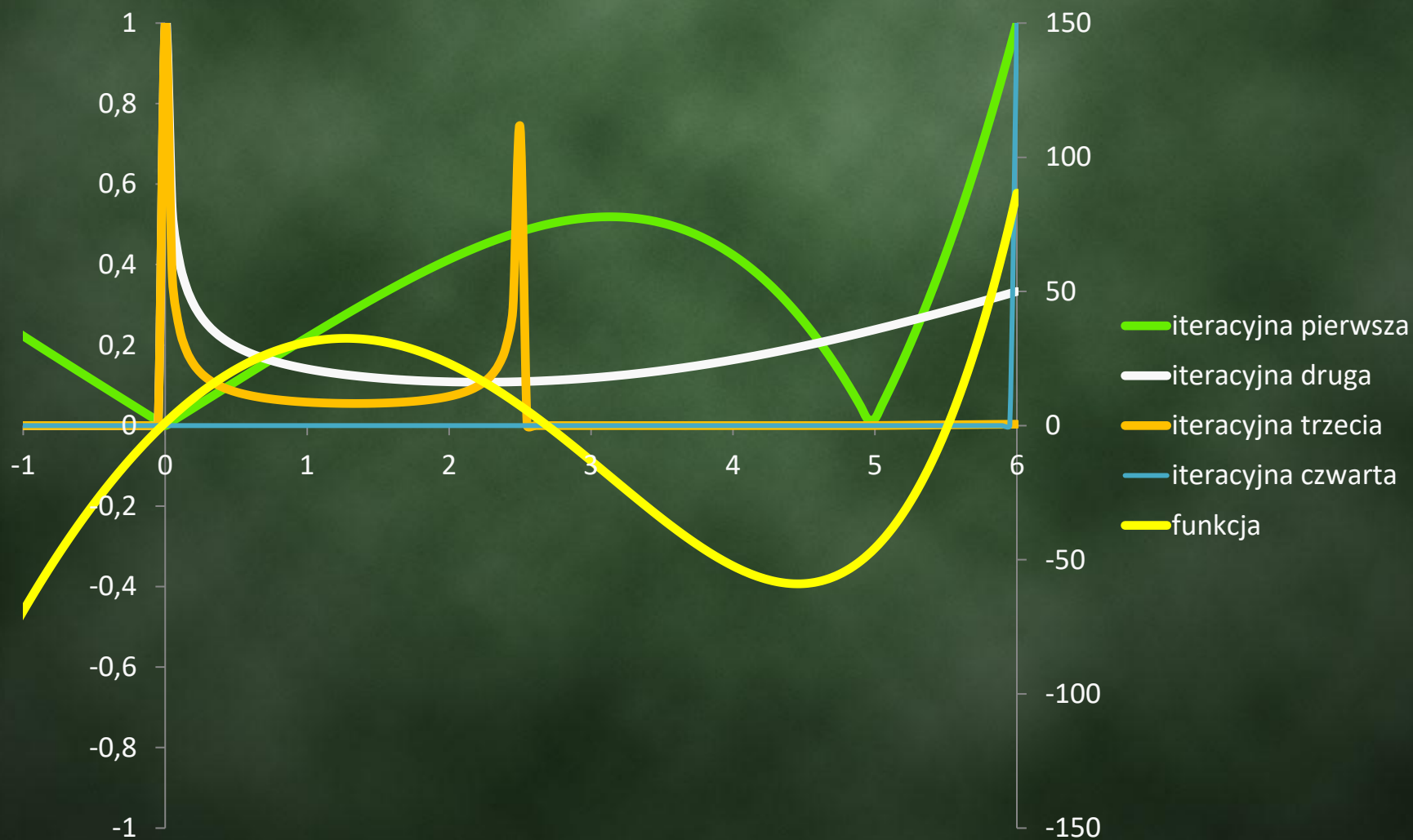
$$1. \varphi'(x) = -\frac{1}{50(x+10)} - 0.065x(x^3 - 123.077)$$

$$2. \varphi'(x) = \frac{0.036336(x^5 + 10x^4 + 153.846x + 1531.54)}{(x+10)\sqrt{\ln(x+10) + 0.065x(x^4 + 769.231)}}$$

$$3. \varphi'(x) = \frac{0.345499(40x^2 + 350x - 501)}{(x+10)(\ln(x+10) - 10x(2x-5))^{\frac{4}{5}}}$$

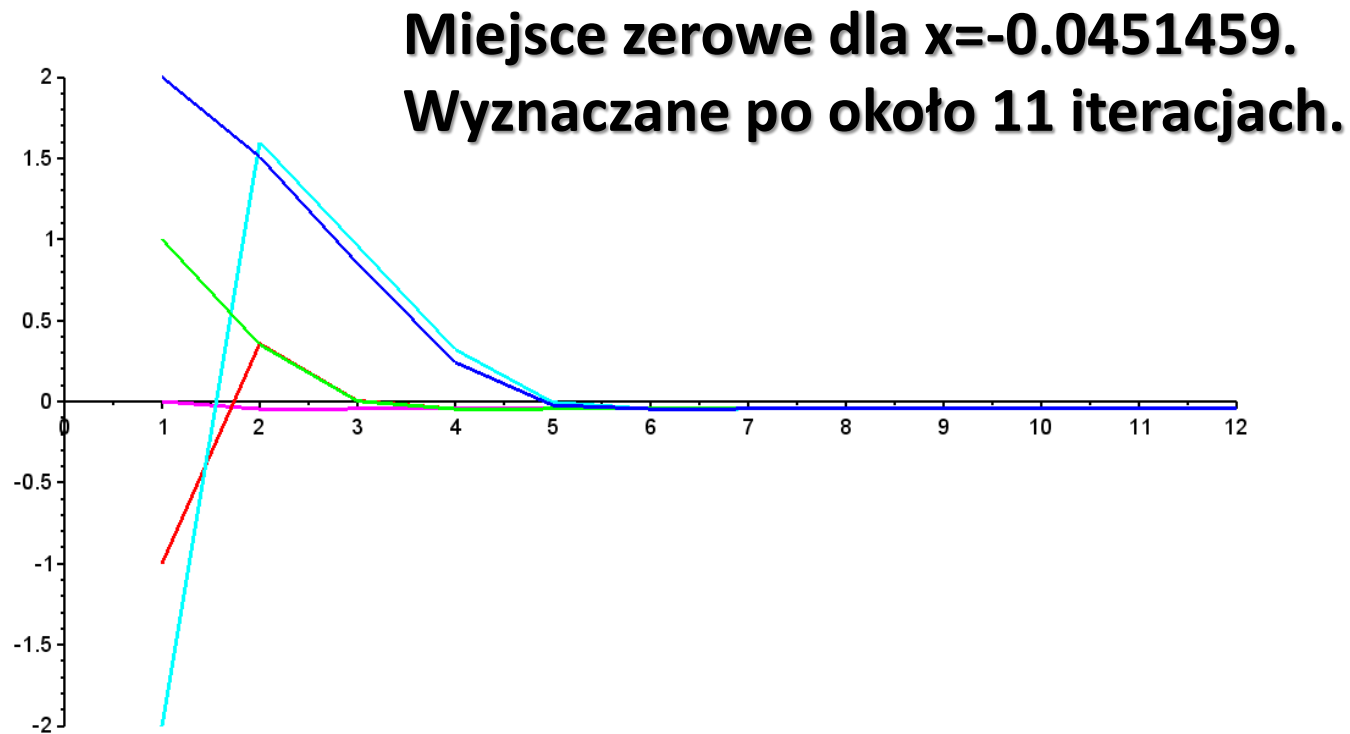
$$4. \varphi'(x) = (0.325x^4 - 40x + 50)e^{0.065x^5 - 20x^2 + 50x}$$

Przykład 5



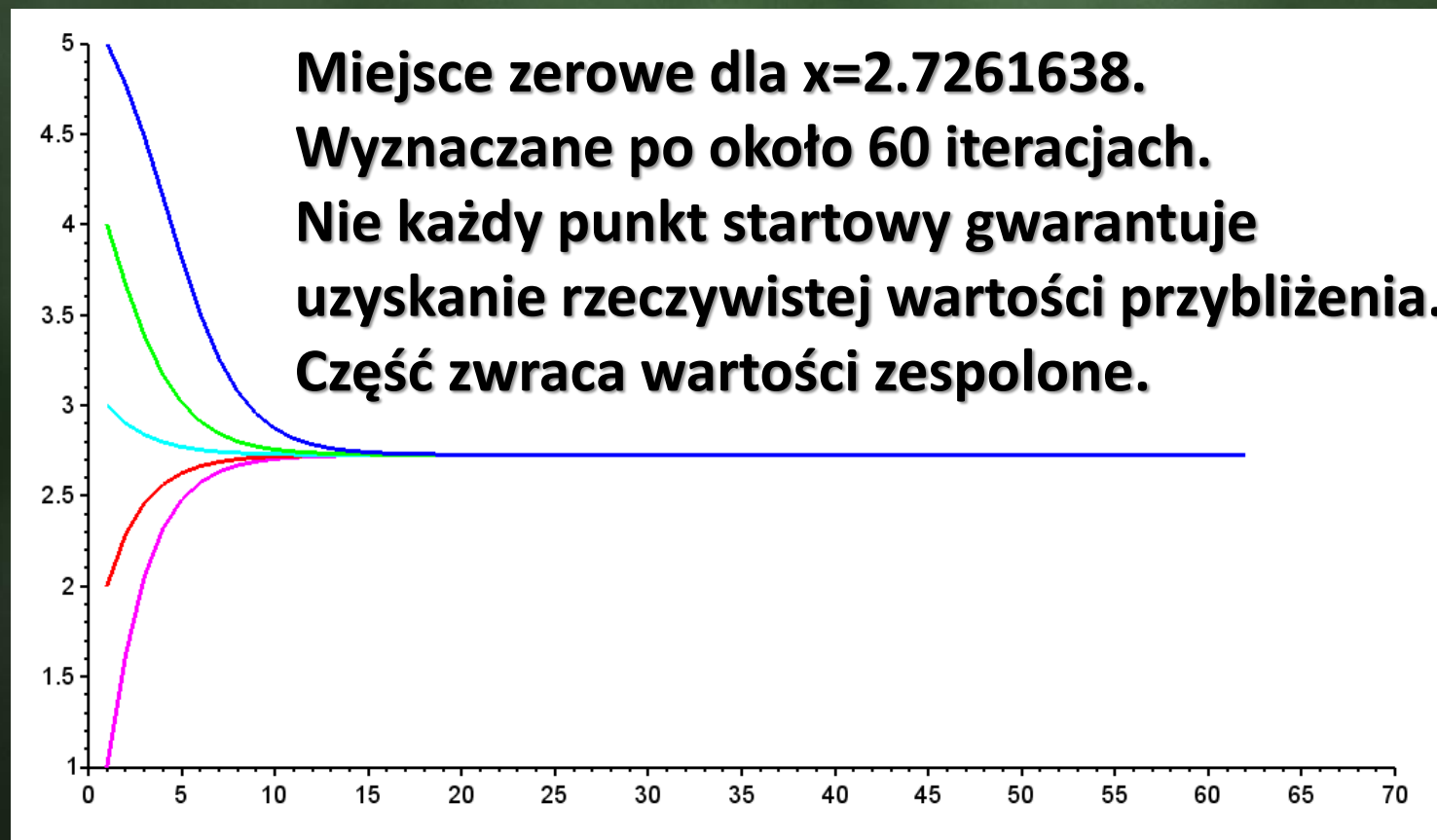
Przykład 5

- Pierwsza funkcja jest zbieżna tylko dla pierwszego miejsca zerowego



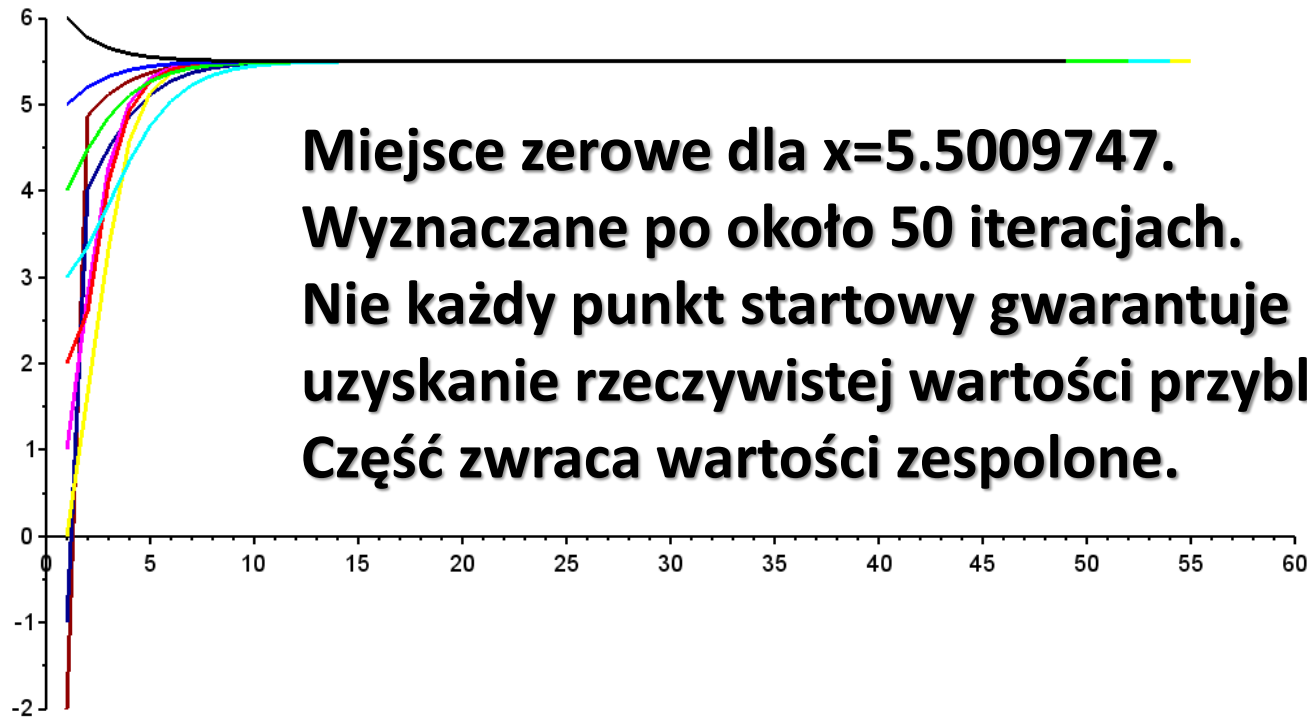
Przykład 5

- Druga funkcja jest zbieżna tylko dla drugiego miejsca zerowego



Przykład 5

- Trzecia funkcja jest zbieżna tylko do trzeciego miejsca zerowego



**Miejsce zerowe dla $x=5.5009747$.
Wyznaczane po około 50 iteracjach.
Nie każdy punkt startowy gwarantuje
uzyskanie rzeczywistej wartości przybliżenia.
Część zwraca wartości zespolone.**

Część II

Plan wykładu – część II

- Metody rozwiązywania równań różniczkowych
 - Metoda Taylora
 - Metoda Eulera
 - **Metoda Rungego-Kutty**
- Rozwiązywanie równań różniczkowych I rzędu
- Rozwiązywanie równań różniczkowych II rzędu
- Rozwiązywanie układów równań różniczkowych
- Funkcja Ode

Równanie różniczkowe

- Wiele zjawisk fizycznych określanych jako dynamiczne:
 - ruch,
 - rozkład sił,
 - stany nieustalone w obwodach elektrycznych,
- opisane są równaniami różniczkowymi. Rozwiązanie takich problemów w sposób analityczny często jest bardzo trudne i czasochłonne. Z tego powodu poszukując rozwiązania korzysta się z metod przybliżonych,

Równania różniczkowe

- Rozwiązanie układu równań różniczkowych sprowadza się do znalezienia funkcji $y_i = y_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$ spełniających w przedziale $\langle x_0, b \rangle$ zadany układ równań różniczkowych.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \\ \frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \\ \dots \\ \frac{dy_m}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_m) \end{cases}$$

- **Z warunkiem brzegowym:** $y_i(x_0) = y_{i,0}, i = 1, 2, \dots, m$

Równania różniczkowe

- Dla $m=1$ układ równań sprowadza się do najprostszej postaci, równania różniczkowego pierwszego rzędu jednej zmiennej.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Równania różniczkowe

- Do dalszych rozważań konieczne jest przyjęcie następujących założeń:
- Funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w przedziale $x_0 \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$
- Funkcja $f(x, y)$ na określonym przedziale spełnia warunek Lipschitza
 - Istnieje skończona liczba L (stała Lipschitza) taka że dla każdego $x \in \langle x_0, b \rangle$ i dowolnych y_1 i y_2 spełniona jest zależność

$$|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Równania różniczkowe

- Równania różniczkowe wyższych rzędów zazwyczaj można sprowadzić do układu równań różniczkowych I rzędu.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - (y^2 - y) = \cos(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \rightarrow f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \cos(x) - \frac{dy}{dx} + (y^2 - y)$$

- ,przyjmując: $y_1 = y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} = y_2$
- otrzymujemy układ równań I rzędu:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \cos(x) - y_2 + (y_1^2 - y_1) \end{cases}$$

Równania różniczkowe

- Rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego metodami jednokrokowymi wymaga zdefiniowania warunków brzegowych, a więc podania wartości początkowych x_0 i y_0 .
- Wyznaczane są kolejne wartości x_i i y_i , uzyskując tabelę kolejnych wartości funkcji stanowiącej rozwiązanie równania różniczkowego.

Równania różniczkowe

- Stosując metody interpolacyjne i aproksymacyjne można określić równanie poszukiwanej funkcji oraz wykreślić jej przybliżony przebieg w zadanym przedziale obliczeń.
- Stosując równanie **Taylora** można w sposób przybliżony rozwiązać równanie różniczkowe.

Wzór Taylora

- Analizowane równanie musi posiadać pochodne cząstkowe wyższych rzędów.
- Obliczenia wykonywane są dla określonego stałego kroku obliczeń Δx
- Im wyższy stopień przybliżenia będzie rozpatrywany tym wyższego rzędu pochodną równania trzeba będzie wyznaczyć.

Wzór Taylora

- Postać ogólna wzoru Taylora:

$$y(x + \Delta x) = y(x) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} (\Delta x)^n y^{(n)}(x)$$

- gdzie:
- **m** jest rzędem przybliżenia
- **y⁽ⁿ⁾** jest pochodną **n**-tego rzędu

Przykład 1

- Rozwiązać podane poniżej równanie stosując wzór Taylora:
- $y' = \cos(x) - \sin(y) + x^2$
- $y(-2\pi) = 60$
- Przedział obliczeń $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$

Przykład 1

- Konieczne jest określenie pochodnych wyższych rzędów zadanego równania:

$$y' = \cos(x) - \sin(y) + x^2$$

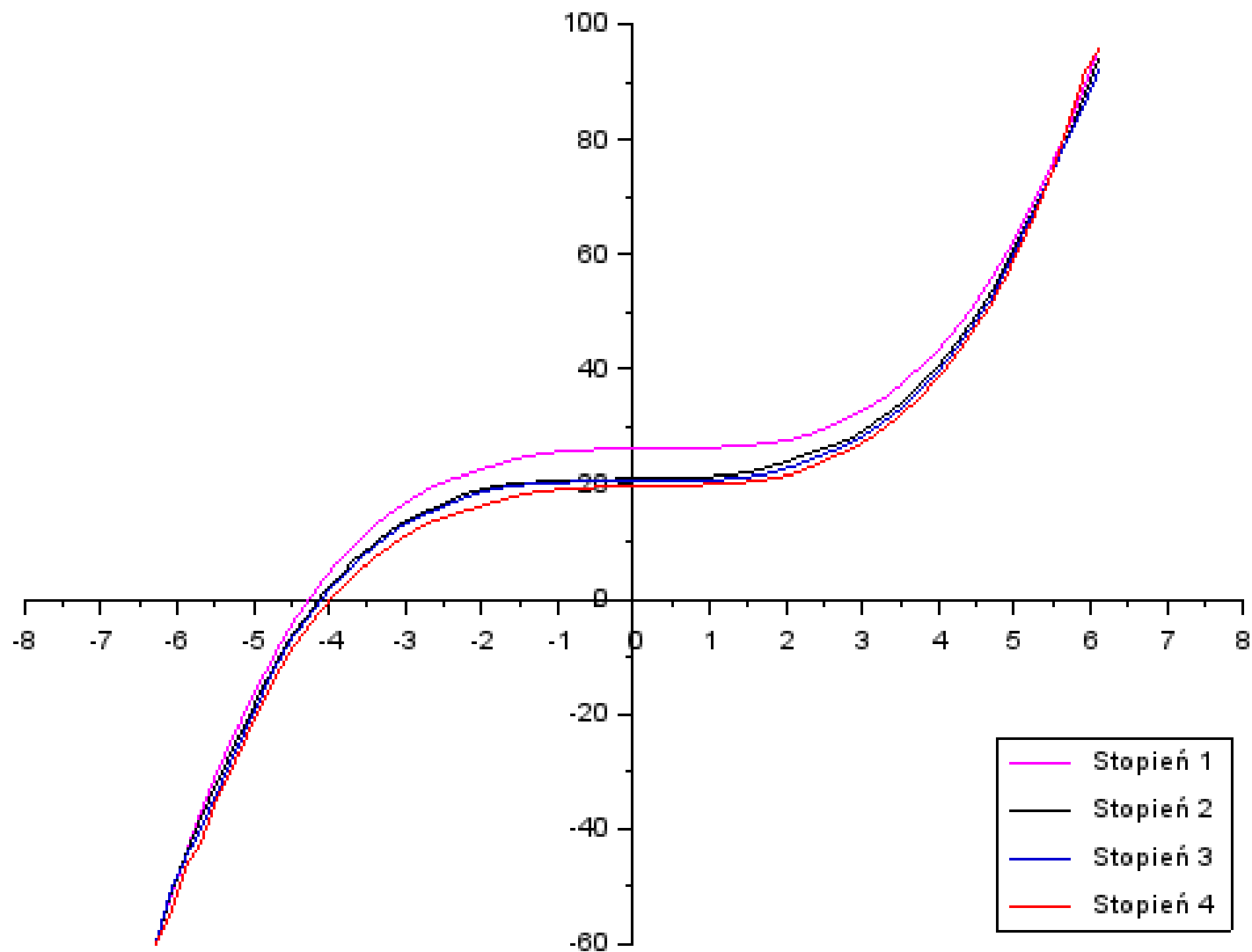
$$y'' = -\sin(x) - y' \cos(y) + 2x$$

$$y^{(3)} = -\cos(x) - y'' \cos(y) + (y')^2 \sin(y) + 2$$

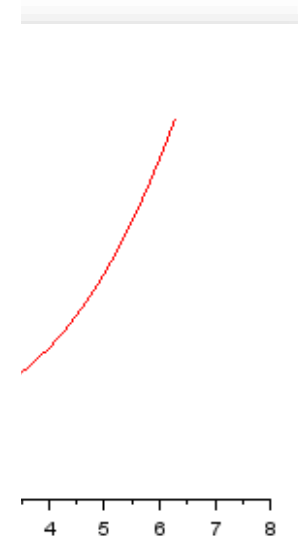
$$y^{(4)} = \sin(x) - y^{(3)} \cos(y) + 3y' y'' \sin(y) + (y')^3 \cos(y)$$

- W zadaniu przykładowym przyjęto przybliżenie czwartego rzędu.

Przykład 1



2) *sin(y(k));



$$1. E = u_R + u_C$$

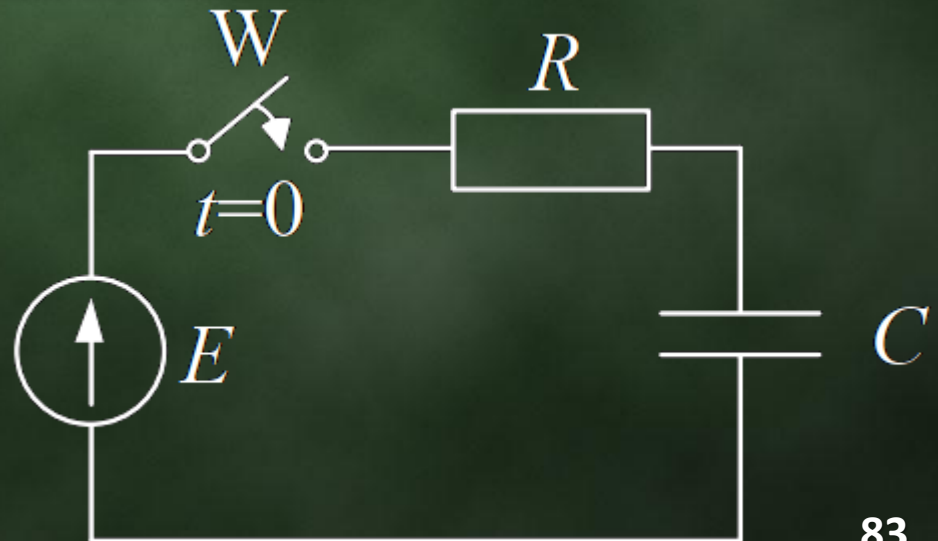
$$2. i = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$3. \frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{RC} = \frac{E}{RC} - \frac{u_C}{RC}$$

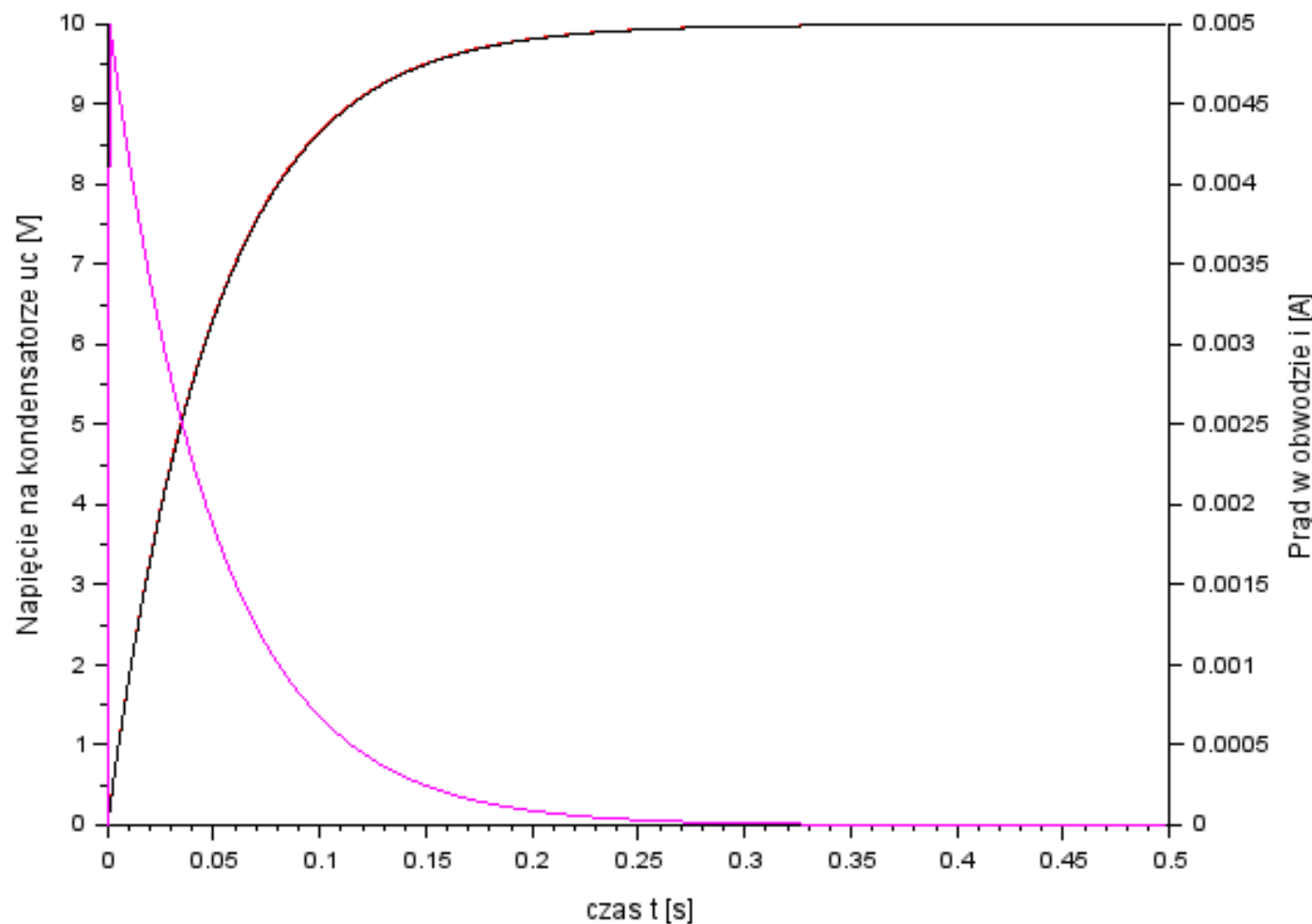
$$4. \frac{d^2 u_C}{dt^2} = -\frac{1}{RC}$$

napięcia na
alonym dla

- **R=2kΩ**
- **C=25μF**
- **t=0.5s**
- **Δt=0.001s**



Przykład 2



$\int i \cdot du(j) ;$

Metoda Eulera

- Metoda Eulera jest najprostszą z metod opartych na wzorze Taylora.
- Wykorzystuje tylko pochodną I rzędu.
- Aby uzyskać dokładne wyniki konieczne jest dobranie odpowiednio małego kroku obliczeń.
- Im mniejsze Δx tym dokładniejsze wyniki.

Metoda Eulera

- Metodę można opisać równaniem ogólnym w postaci:

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + \Delta x f(x, y)$$

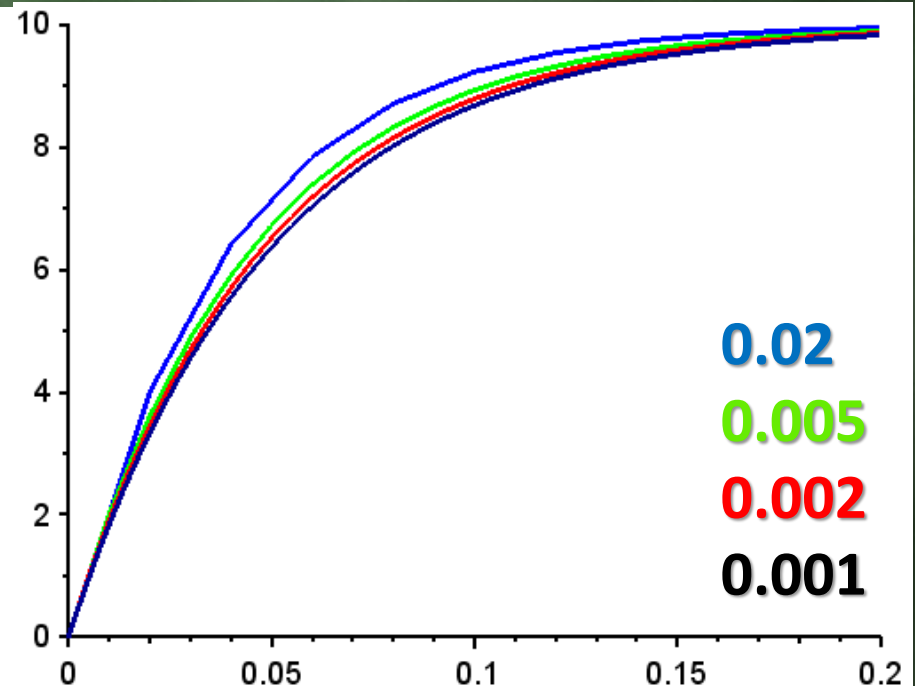
- gdzie:

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n + \Delta x, y_n)$$

Przykład 3

```
9  R=2e3;E=10;C=25e-6;  
10 dx=0.001;  
11 a=0; b=0.4;  
12 m=(b-a)/dx;  
13 x0=0; y0=0;  
14 x=zeros(1,m+1);  
15 y=zeros(1,m+1);  
16 x(1)=x0; y(1)=y0;  
17 for k=2:(m+1)  
18     y1=-y(k-1)/(R*C)+E/(R*C);  
19     y(k)=y(k-1)+dx*y1;  
20     x(k)=x(k-1)+dx;  
21 end  
22 plot2d(x,y);
```



Metoda Eulera

- Dokładność uzyskanych wyników związana jest z występowaniem dwóch rodzajów błędów obliczeniowych;
 - błędem metody – związanej z przyjętymi ograniczeniami – rzędem pochodnej równania różniczkowego,
 - błędem zaokrągleń – związanym z ograniczeniami maszyny obliczeniowej.
- Powyższe błędy można podzielić na lokalne i globalne.

Metody Rungego-Kutty

- W odróżnieniu od metody równań Taylora, metody Rungego-Kutty nie wymagają wyznaczania wyższych rzędów zadanego równania różniczkowego.
- W zależności o przyjętego rzędu metody konieczne jest zastosowanie wartości współczynników w równaniu obliczeniowym
- Wraz ze wzrostem rzędu metody rośnie dokładność otrzymywanych wyników, przy stałym kroku obliczeniowym.

Metoda Rungego-Kutty

- Ogólna idea metody polega na przybliżeniu rozwiązania równań różniczkowych, dzieląc krok czasowy na mniejsze kroki i obliczając wartości funkcji na każdym z tych kroków.
- Jest często używana do rozwiązywania równań różniczkowych, w tym równań różniczkowych zwyczajnych, równań różniczkowych cząstkowych i innych.

Metoda Rungego-Kutty

1. Oblicz wartości pochodnych funkcji na początku kroku czasowego.
2. Oblicz wartości pochodnych w połowie kroku czasowego.
3. Oblicz wartości pochodnych w połowie kroku czasowego, ale korzystając z pochodnych obliczonych w poprzednich krokach.
4. Oblicz wartości pochodnych na końcu kroku czasowego, korzystając z pochodnych z poprzednich kroków.
5. Uaktualnij wartości funkcji na podstawie obliczonych pochodnych.

Metody Rungego-Kutty

- Ogólna postać algorytmu metod:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m w_i k_i$$

$$\text{dla } i = 1 \rightarrow k_i = \Delta x f(x_n, y_n)$$

$$\text{dla } i > 1 \rightarrow k_i = \Delta x f \left(x_n + a_i \Delta x, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j \right)$$

- gdzie:

○ **m** – rząd metody

○ **w, a, b** – stałe zależne od rzędu metody

Metody Rungego-Kutty

| Rząd metody | Stałe w_i | Współczynniki k_i | Nazwa metody |
|-------------|--------------------------------|---|-----------------------------|
| 1 | $w_1=1$ | $k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$ | Eulera |
| 2 | $w_1=w_2=1/2$ | $k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$
$k_2=\Delta x f(x_n+\Delta x, y_n+k_1)$ | Heuna
(ulepszona Eulera) |
| 3 | $w_1=w_3=1/6$
$w_2=2/3$ | $k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$
$k_2=\Delta x f(x_n+\frac{1}{2}\Delta x, y_n+\frac{1}{2}k_1)$
$k_3=\Delta x f(x_n+\Delta x, y_n-k_1+2k_2)$ | Simpsona |
| 4 | $w_1=w_4=1/6$
$w_2=w_3=1/3$ | $k_1=\Delta x f(x_n, y_n)$
$k_2=\Delta x f(x_n+\frac{1}{2}\Delta x, y_n+\frac{1}{2}k_1)$
$k_3=\Delta x f(x_n+\frac{1}{2}\Delta x, y_n+\frac{1}{2}k_2)$
$k_4=\Delta x f(x_n+\Delta x, y_n+k_3)$ | Rungego-Kutty |

Przykład 4

○ Zadanie z przykładu 2 rozwiązać metodą Rungego-Kutty rzędów 1-4.

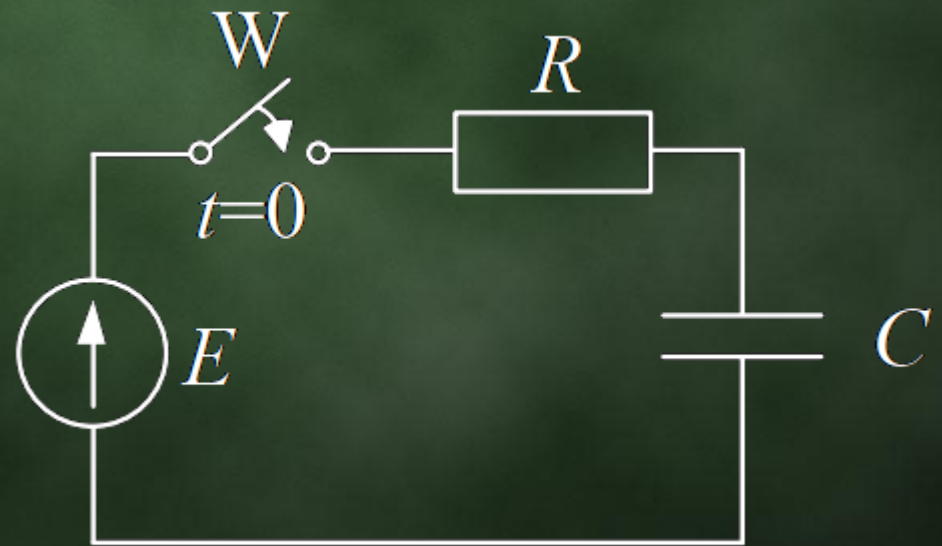
○ $E=10V$

○ $R=2k\Omega$

○ $C=25\mu F$

○ $t=0.5s$

○ $\Delta t=0.035s$



Przykład 4

```
clear;clc;clf;  
R=2e3;E=10;C=25e-6;  
tau=R*C;  
n=250;  
t0=0;  
tn=5*tau;  
dt=(tn-t0)/n;  
t=[t0];  
u=[0];  
i=[0];  
function u=rozwiazanie(t)  
    u=E*(1-exp(-t/(R*C)));  
endfunction  
function y=rownanie(x)  
    y=E/(R*C)-x/(R*C);  
endfunction
```

Przykład 4

```
function [x,y]=RK4(dx,xw,yw)
... k1=dx*rownanie(yw);
... k2=dx*rownanie(yw+0.5*k1);
... k3=dx*rownanie(yw+0.5*k2);
... k4=dx*rownanie(yw+k3)
... y=yw+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
... x=xw+dx;
endfunction
endfunction
```

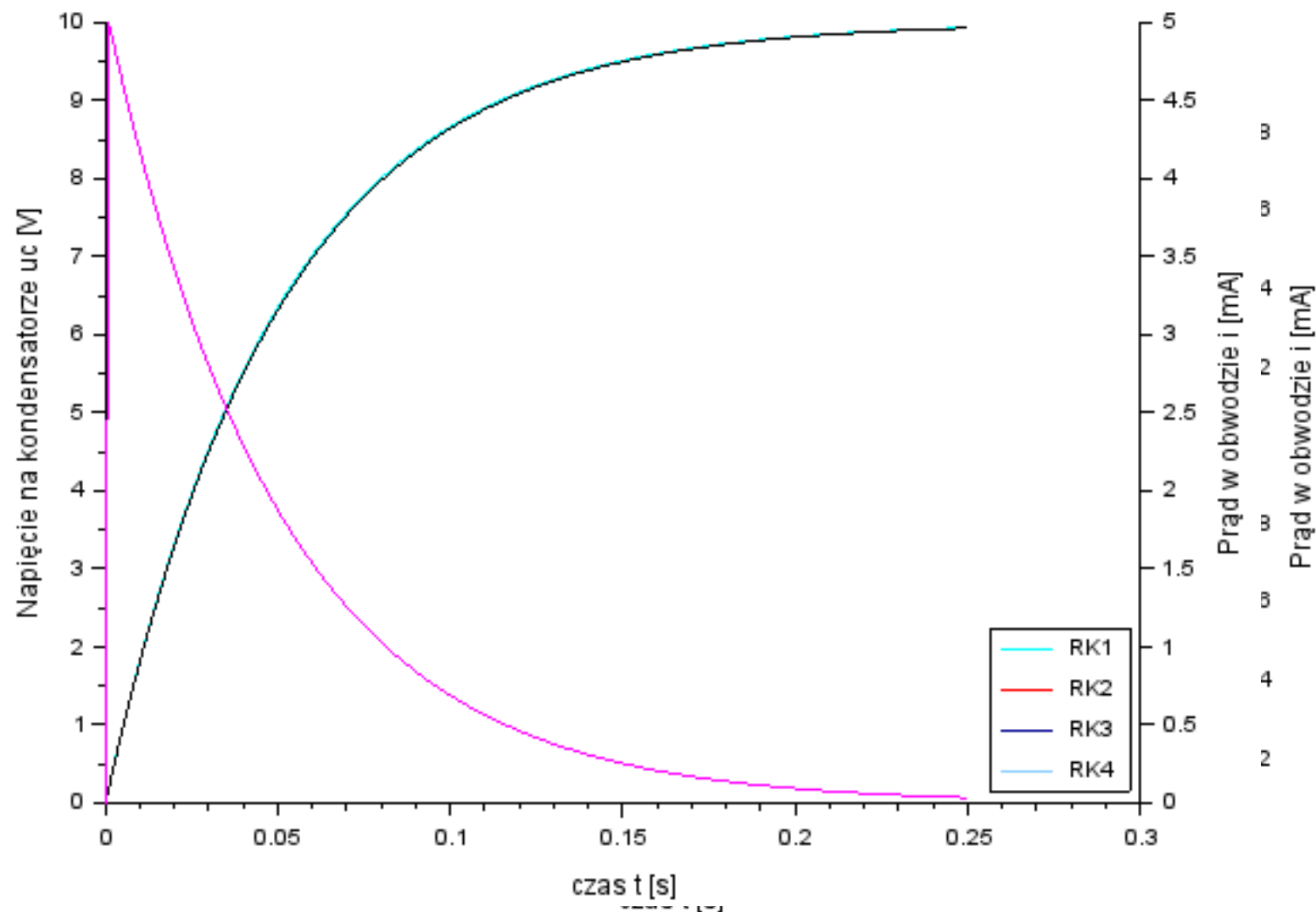
Przykład 4

```

kolor=[4,5,9,12];
for s=1:4
    for k=1:n
        switch s
            case 1 then
                [t(k+1),u(k+1)]=RK1(dt,t(k),u(k));
            case 2 then
                [t(k+1),u(k+1)]=RK2(dt,t(k),u(k));
            case 3 then
                [t(k+1),u(k+1)]=RK3(dt,t(k),u(k));
            case 4 then
                [t(k+1),u(k+1)]=RK4(dt,t(k),u(k));
            end
            i(k+1)=C*rownanie(u(k))*1000;
        end
    plot2d(t,u,kolor(s));
end

```

Przykład 4


 r'');

Metody wielokrokowe (różnicowe)

- Metodę Eulera czy Rungego-Kutty określa się jako jednokrokowe, ponieważ do wyznaczenia kolejnego kroku konieczna jest znajomość tylko jednego poprzedzającego.
- W metodzie wielokrokowej wykorzystuje się k obliczonych wcześniej wartości $y_{n+1-k}, \dots, y_n$ ($k > 1$)

Metody wielokrokowe

- Metoda określona jest wzorem

$$y_{n+1} = \sum_{i=1}^k a_i y_{n+1-i} + \Delta x \sum_{i=0}^k b_i f_i(x_{n+1-i}, y_{n+1-i}), \text{ dla } n \geq k-1$$

- gdzie a_i i b_i są liczbami rzeczywistymi.
- Wymagane początkowe wartości wyznacza się zazwyczaj metodami jednokrokowymi (Rungego-Kutty) dla ujemnego Δx .

Metody wielokrokowe

- Dla $b_0=0$ wzór określa się jako wzór **ekstrapolacyjny (jawny)**. Szukana wartość y_{n+1} jest liniową kombinacją wcześniej wyznaczonych wartości.
- Jeżeli $b_0 \neq 0$ to wzór określa się jako wzór **interpolacyjny (uwikłany)**, otrzymujemy wówczas równanie z zmienną y_{n+1} występującą po obu stronach równania. Wyznaczenie jej wymaga zastosowania metod iteracyjnych.

Metody wielokrokowe

- W tabeli zestawiono najczęściej stosowane wzory metod wielokrokowych.
- Dla uzyskania maksymalnej efektywności algorytmu rozwiązywania równania różniczkowego wskazane jest zastosowanie optymalnego dobór rzędu algorytmu oraz kroku obliczeniowego.
- Przy ich doborze należy mieć na względzie zarówno stabilność algorytmu, jak i dopuszczalny błąd obliczeń.

Metody wielokrokowe

| Lp. | Wzór | Rząd metody |
|-----|---|-------------|
| 1 | $y_{n+1} = y_n + \Delta x y'_n$ (ekstrapolacyjny Eulera) | 1 |
| 2 | $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} (3y'_n - y'_{n-1})$ | 2 |
| 3 | $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{12} (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$ | 3 |
| 4 | $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$ | 4 |
| 5 | $y_{n+1} = y_n + \frac{4}{3} \Delta x (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$ | 4 |
| 6 | $y_{n+1} = y_n + \Delta x y'_{n+1}$ (interpolacyjny Eulera) | 1 |
| 7 | $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} (y'_{n+1} + y'_n)$ | 1 |
| 8 | $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{2} (5y'_{n+1} + 8y'_n - y'_{n-1})$ | 3 |
| 9 | $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{24} (9y'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})$ | 4 |
| 10 | $y_{n+1} = \frac{1}{8} (9y_n - y_{n-2}) + \frac{3}{8} \Delta x (y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})$ | 4 |

Układy równań różniczkowych

- Układy równań różniczkowych I rzędu można rozwiązywać metodami Eulera, Rungego-Kutty lub wzorem Taylora.
- Algorytm postępowania jest analogiczny jak przy rozwiązywaniu jednego równia różniczkowego.

Układy równań różniczkowych^{15:21}

Wzór Taylora – przykład 5

- Rozwiązać układ równań różniczkowych:
- $\Delta t=0.001, t_0=0, x_0=0.5, y_0=1$

- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 - 2x \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 5y \end{cases}$$

Przykład 5

- Pochodne cząstkowe równania dla wzoru Taylor'a

- II.
$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = 2y'y - 2x' \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 2x'x - 5y' \end{cases}$$

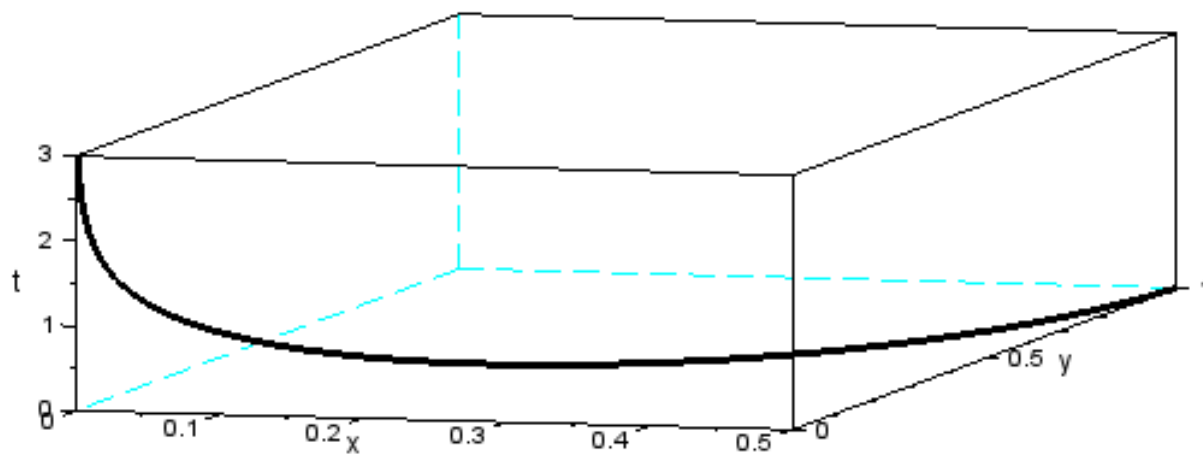
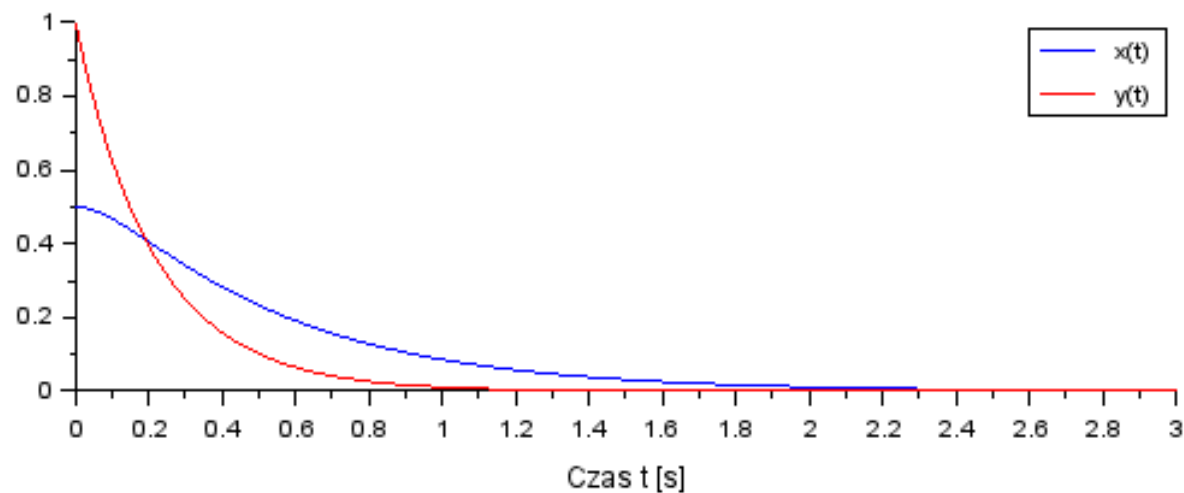
- III.
$$\begin{cases} \frac{d^3 x}{dt^3} = 2y''y + 2(y')^2 - 2x'' \\ \frac{d^3 y}{dt^3} = 2x''x + 2(x')^2 - 5y'' \end{cases}$$

- IV.
$$\begin{cases} \frac{d^4 x}{dt^4} = 2y'''y + 6y''y' - 2x''' \\ \frac{d^4 y}{dt^4} = 2x'''x + 6x''x' - 5y''' \end{cases}$$

Przykład 5

```
subplot(211)
plot2d(t, [x y], [2 5])
xlabel("Czas t [s]");
legends(["x(t)" "y(t)"], [2 5], opt="ur");
subplot(212)
param3d(x, y, t, 45, 45, "x@y@t", 5)
gcf().children.children.thickness = 3;
gca().sub_ticks = [4, 4, 4];
.... y(k+1)=y(k);
.... for i=1:4
....     x(k+1)=x(k+1)+(dt^i)/(factorial(i))*dx(i);
....     y(k+1)=y(k+1)+(dt^i)/(factorial(i))*dy(i);
.... end
.... t(k+1)=t(k)+dt;
end
```

Przykład 5

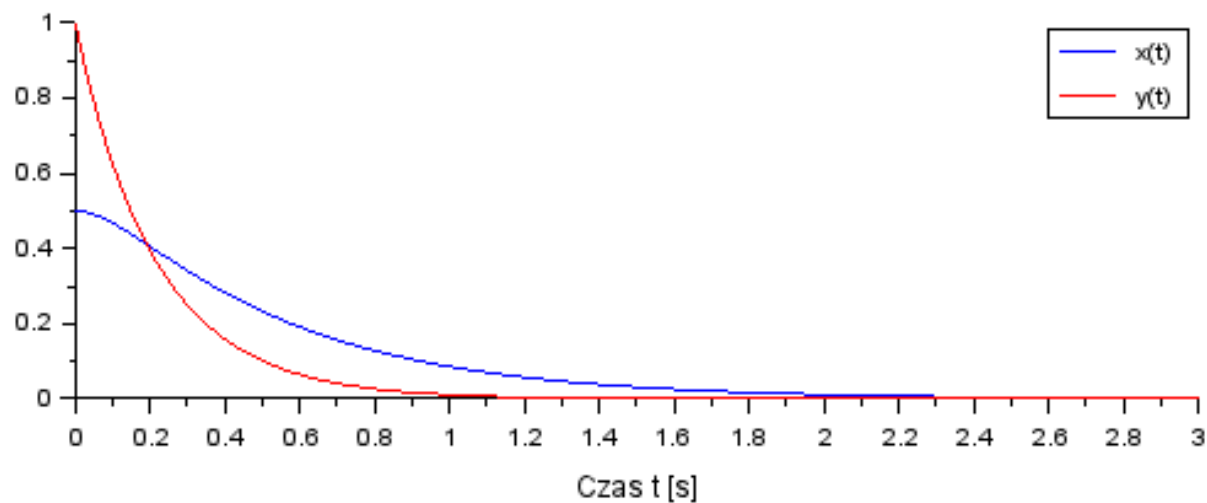


Przykład 6

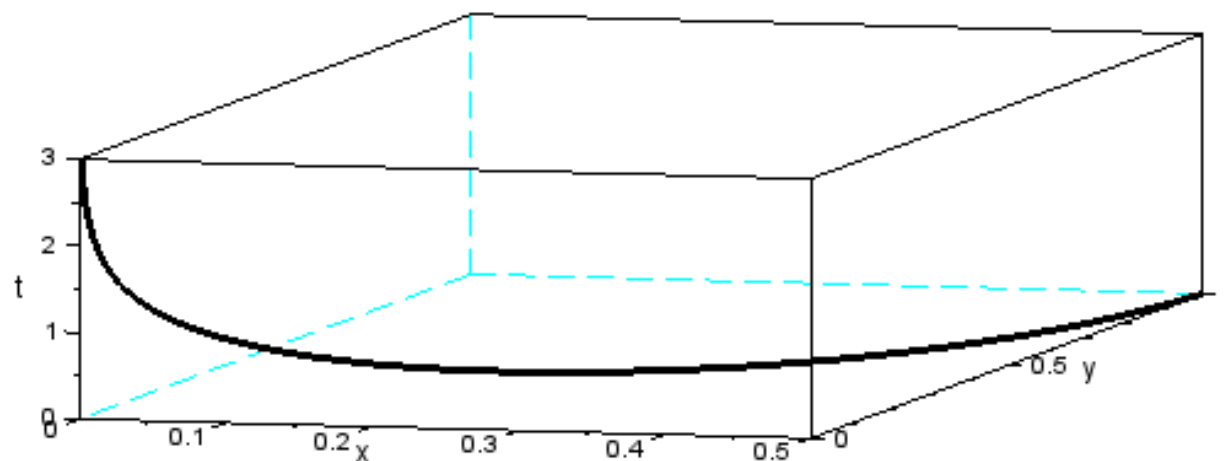
- Rozwiązanie zadanego układu równań metodą Runge-Kutty'ego
- $\Delta t=0.001, t_0=0, x_0=0.5, y_0=1$

- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 - 2x \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 5y \end{cases}$$

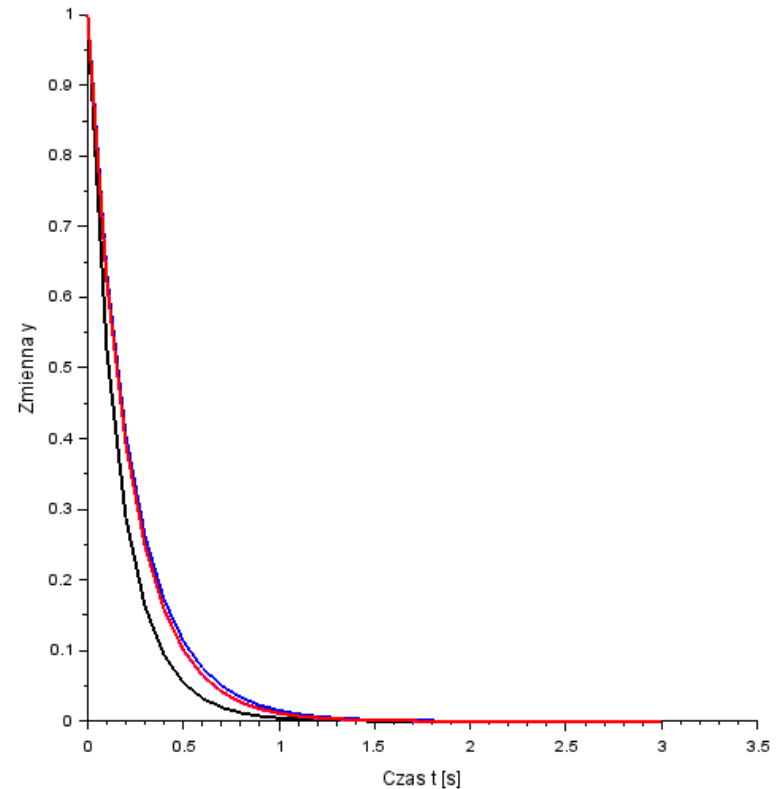
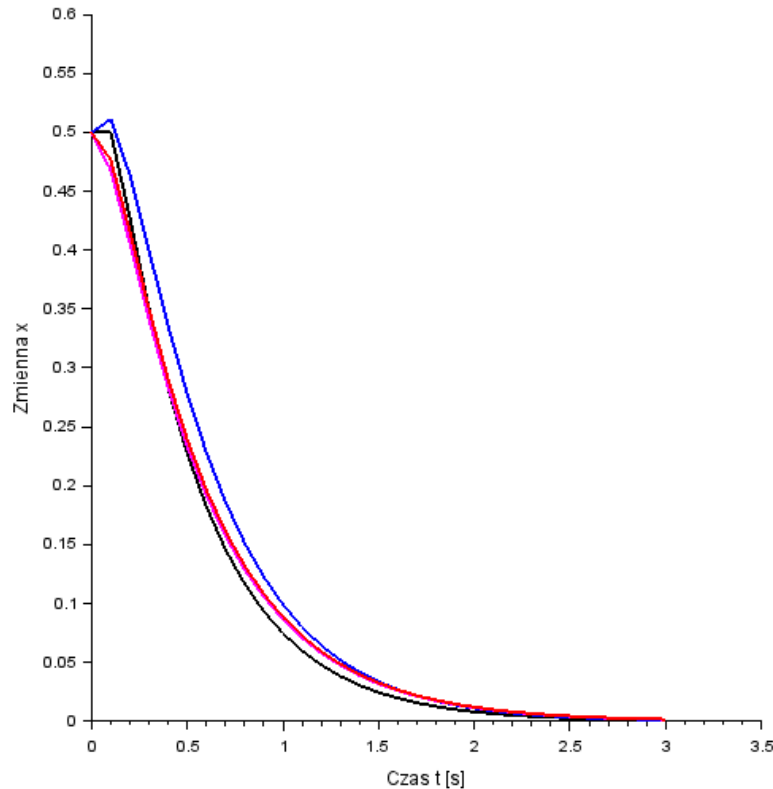
Przykład 6



$y(k)$;



Przykład 6 – RK¹-RK⁴ dla $\Delta t=0.1$

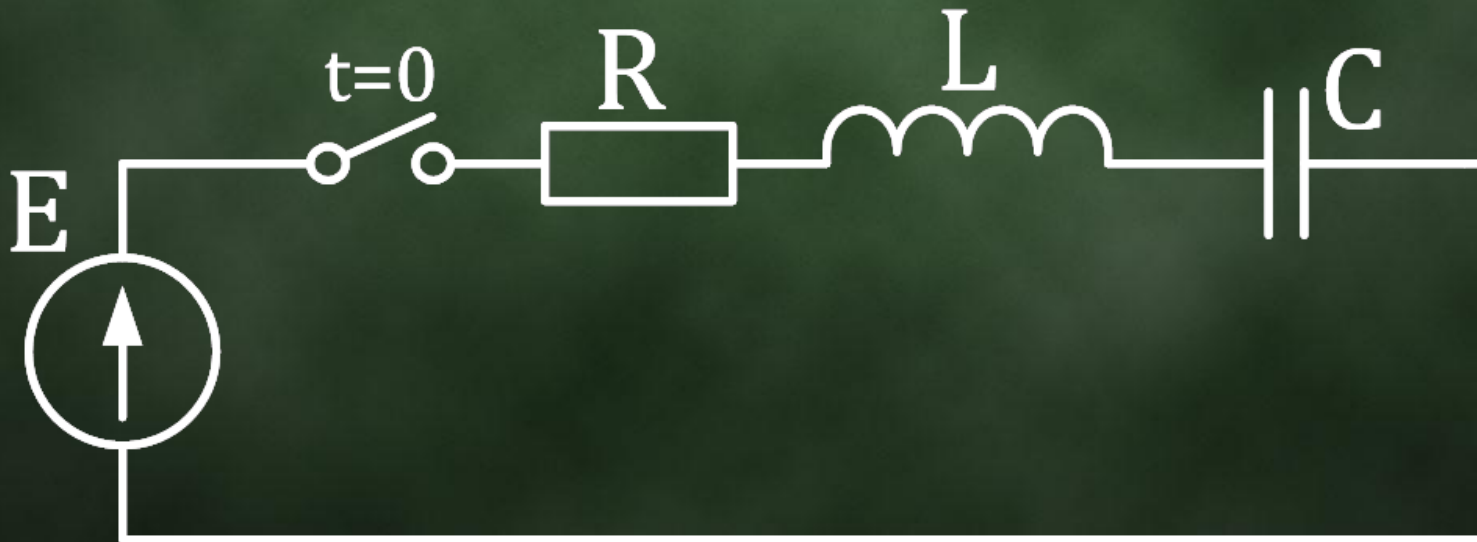


Równania różniczkowe wyższych rzędów

- Metodami Eulera, Rungego-Kutty oraz wzorem Taylora można rozwiązywać także równania różniczkowe wyższych rzędów.
- Konieczne jest wtedy sprowadzenie takiego równania do układu równań I rzędu.

Przykład 7

- Dla danego obwodu wyznaczyć przebieg prądu w obwodzie i napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym.
- Warunki początkowe są zerowe.
- $E=100\text{V}$, $R=0.25\Omega$, $L=25\text{mH}$, $C=33\text{mF}$



Przykład 7

○Równanie II rzędu opisujące analizowany

obwód:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

○Należy przekształcić w układ równań I rzędu:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_c}{L} \\ \frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C} \end{cases}$$

Przykład 7

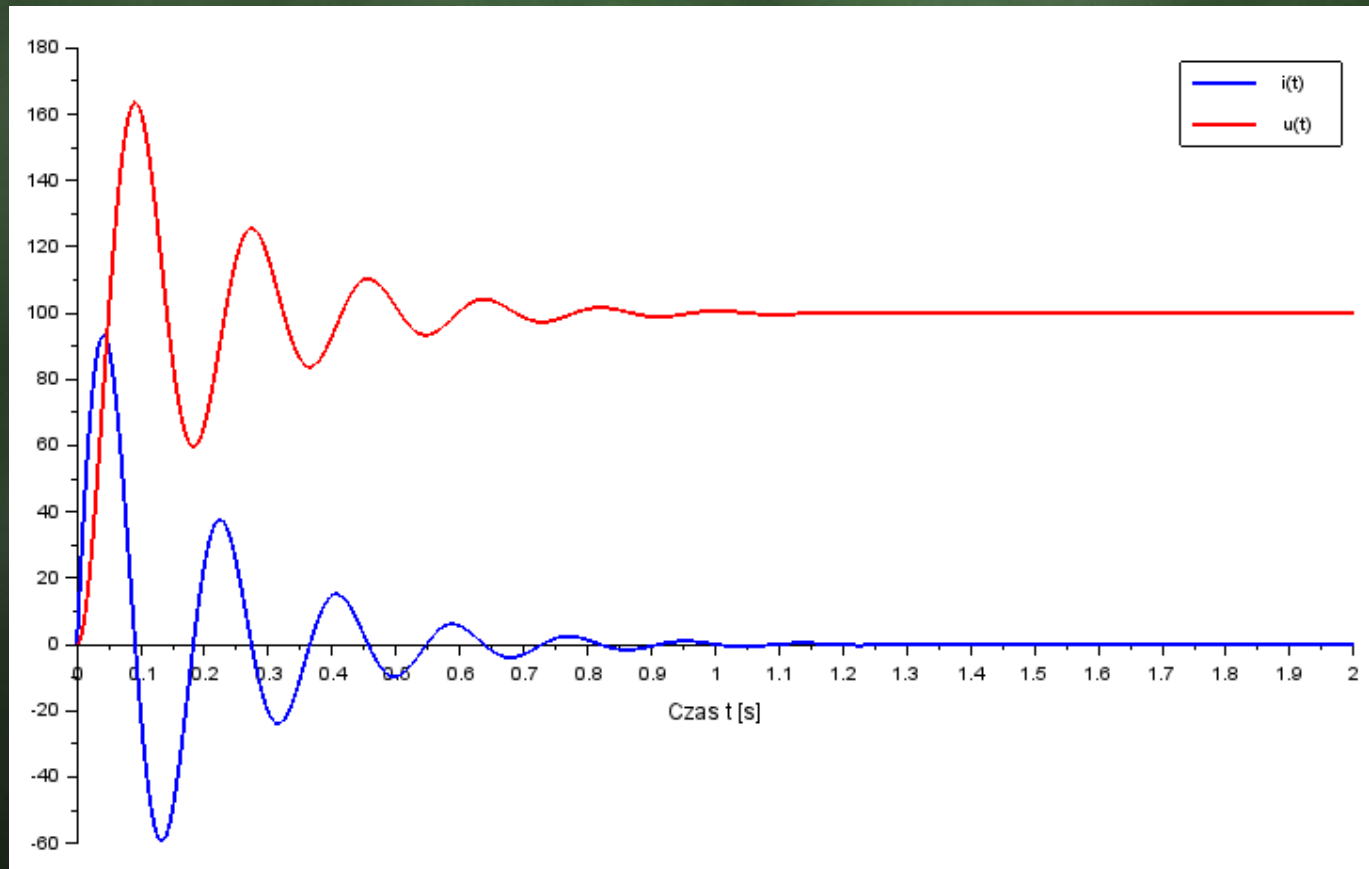
```

for k=1:n
    [t(k+1), i(k+1), u(k+1)] = RK4(dt, t(k), i(k), u(k));
end
plot2d(t, [i u], [2 5]);
osie=gca();
osie.x_location="origin";
osie.y_location="origin";
xlabel("Czas t [s]");
legends(["i(t)" "u(t)"], [2 5], opt="ur");
k1=dt*eq1(xo, yo+0.5*k2);
k2=dt*eq2(xo, yo+k1);
k3=dt*eq3(xo, yo+k2);
k4=dt*eq4(xo, yo+k3);
y=yo+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
t=to+dt;
endfunction
endfunction

```

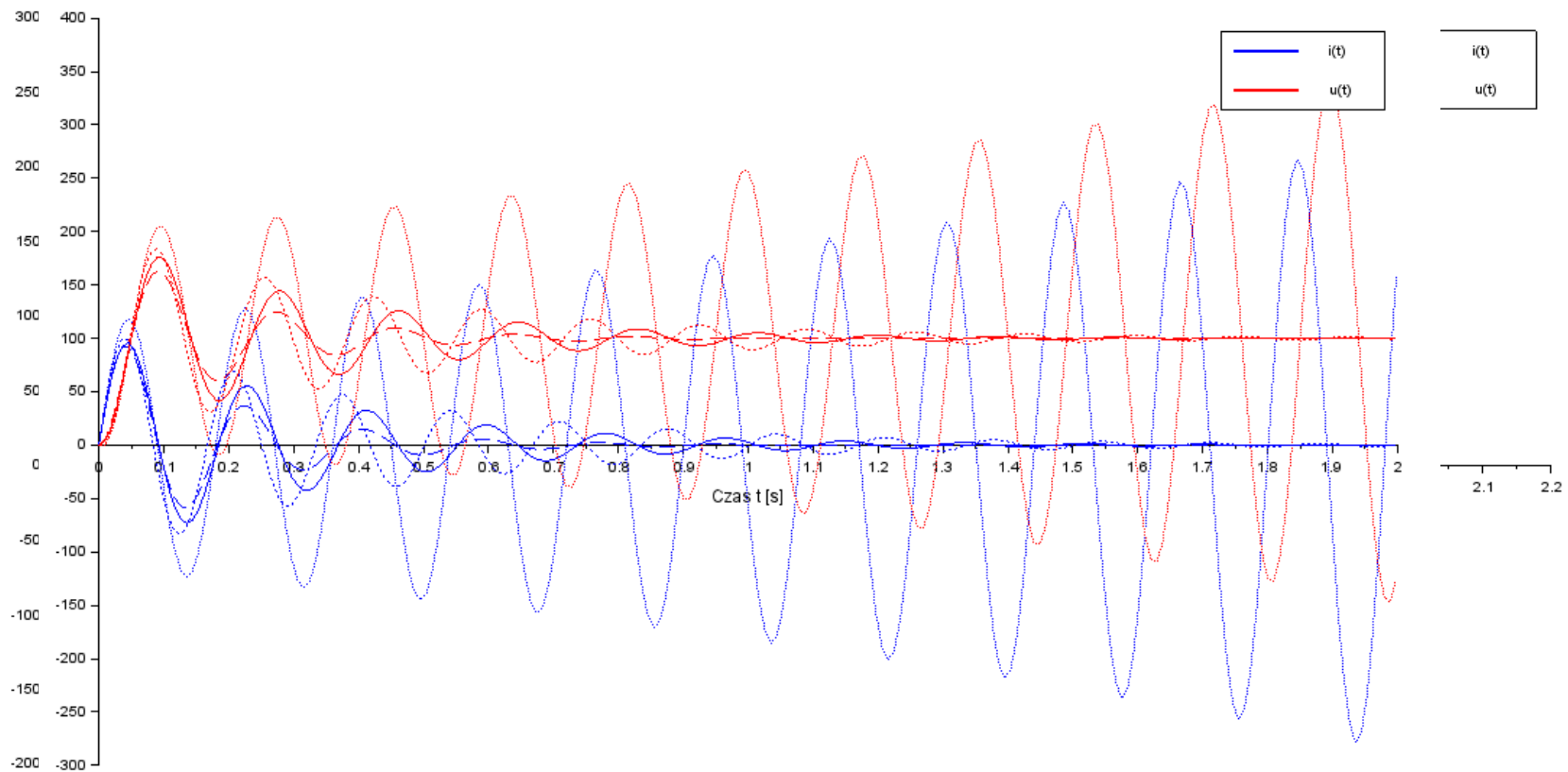
Przykład 7

- Dla kroku obliczeniowego $\Delta t=0.0001$ w przedziale $t \in \langle 0, 2 \rangle$ uzyskano rozwiązanie.



Przykład 7

- Dobranie odpowiedniego kroku obliczeń stopnia metody ma znaczący wpływ na uzyskanie prawidłowego rozwiązania.



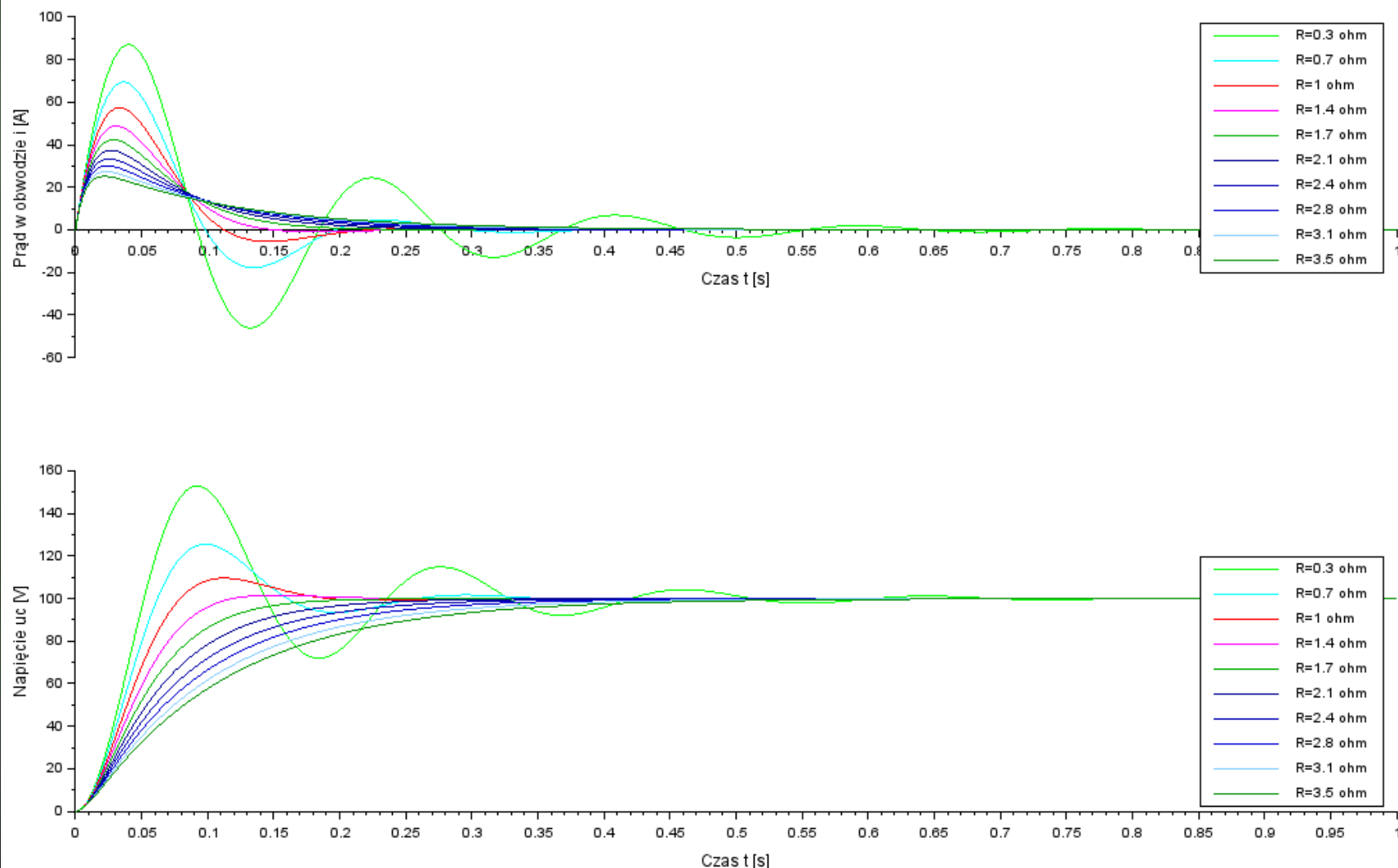
Przykład 7

○ W przypadku obwodów RLC w zależności od wartości rezystancji można opisać cztery rodzaje przebiegów sygnałów prądowego i napięciowego

- Aperiodyczny $R > R_{kr}$
- Aperiodyczny krytyczny $R = R_{kr}$
- Oscylacyjny $R < R_{kr}$
- Stan bez rezystancyjny $R = 0$

$$○ R_{kr} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} = 1.7 \, \Omega$$

Przykład 7



Funkcja ODE

- W środowisku obliczeniowym Scilab dostępna jest funkcja realizująca rozwiązywanie układów równań różniczkowych.
- Funkcja **ode** (Ordinary Different Equations) umożliwia rozwiązanie zdefiniowanego układu równań różniczkowych jedną z dostępnych metod.
- Funkcja **ode** wymaga zdefiniowania funkcji z układem równań stanu odpowiadających zadanemu układowi równań różniczkowych

Funkcja ODE

- Składnia funkcji:

- $y = \text{ode}([type], y_0, t_0, t, f)$

gdzie:

- y – wektor lub macierz wyjściowa

- $[type]$ – wskazanie metody obliczeniowej

- y_0 – wektor wartości początkowych

- t_0 – wartość początkowa zmiennej podcałkowej

- t – wektor wartości zmiennej podcałkowej

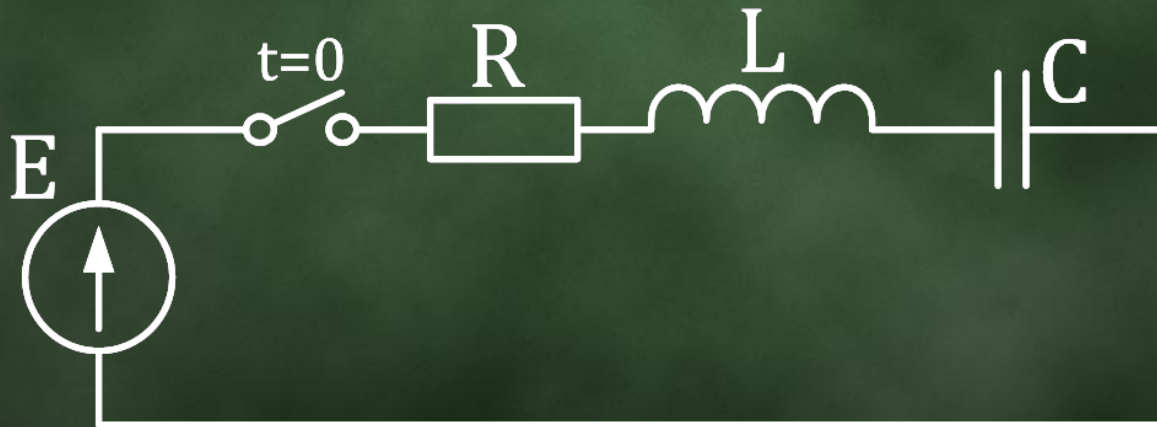
- f – nazwa funkcji zawierającej definicję równań stanu

Funkcja ODE

- Zaimplementowane metody obliczeniowe:
- `adams` – metoda Adamsa
- `stiff` – metoda różniczkowania wstecznego BDF
- `rk` – metoda Rungego-Kutty rzędu 4
- `rkf` – metoda Rungego-Kutty rzędu 4 i 5
- `fix` – zmodyfikowana metodark
- `discrete`, `roots` – inne metody
- Wybór metody obliczeniowej nie jest konieczny. W takiej sytuacji funkcja rozwiązuje zadanie metodą Adamsa i BDM, dynamicznie wybiera w czasie obliczeń korzystniejszą metodę.

Przykład 8

- Dla danego obwodu wyznaczyć przebieg prądu i napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym. Warunki początkowe są zerowe.
- $E=100\text{V}$, $R=0.25\Omega$, $L=25\text{mH}$, $C=33\text{mF}$



- Zadanie rozwiązać za pomocą funkcji **ode**.

Przykład 8

- W pierwszym etapie należy wyprowadzić równania stanu dla analizowanego obwodu.
- Wyjść należy z równań Kirchhoffa dla analizowanego obwodu dążąc do zapisania postaci różniczkowej.

$$E = Ri + u_L + u_C$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} + u_C$$

$$E = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

Przykład 8

- Na podstawie równania różniczkowego zapisujemy równania stanu:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{E - RC \frac{du_c}{dt} - u_c}{LC}$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u_c$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_c}{L}$$

Przykład 8

- Na podstawie równań stanu określić można zmienne stanu:

$$x_1 = \frac{du_C}{dt} \quad x_2 = u_C \quad x_3 = i$$

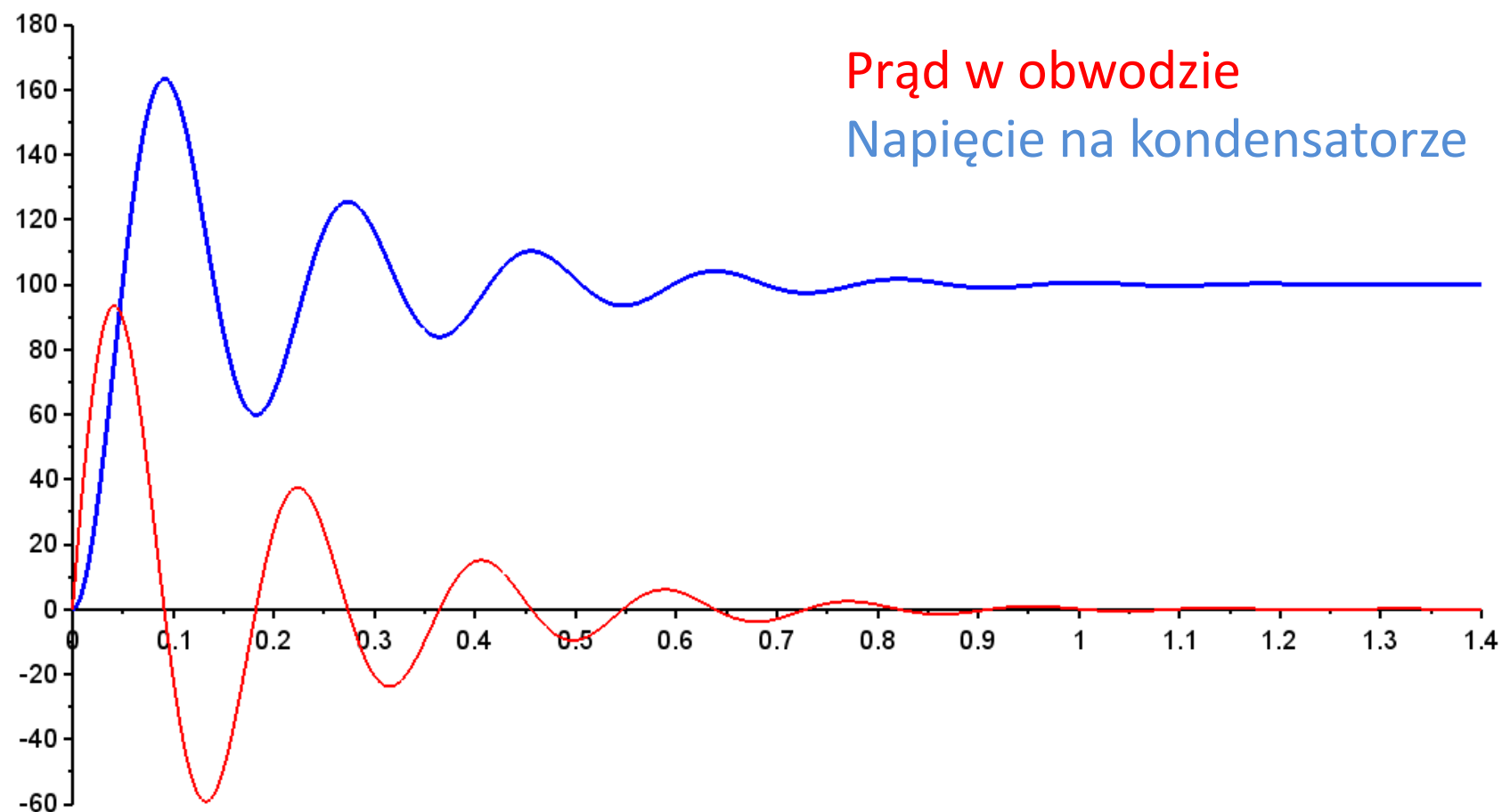
- Finalnie równania stanu przyjmują postać

$$\begin{cases} y_1 = \frac{E - RCx_1 - x_2}{LC} \\ y_2 = \frac{x_3}{C} \\ y_3 = \frac{E - Rx_3 - x_2}{L} \end{cases}$$

Przykład 8

```
1 clc;clear;
1 function [y]=R_stanu(t,x)
2     y(1)=(E-R*C*x(1)-x(2))/(L*C);
3     y(2)=x(3)/C;
4     y(3)=(E-R*x(3)-x(2))/L;
5 endfunction
7 R=0.25; L=25e-3; C=33e-3; E=100;
8 df=0.0001;
9 y0=[0;0;0];
10 t0=0;
11 t=0:df:1.4;
12 y=ode(y0,t0,t,R_stanu);
13 uc=y(2,:);
14 i=y(3,:);
15 plot2d(t,[uc',i']);
```

Przykład 8



XCOS

- Środowisko programowania graficznego
- Rozwiązanie równania różniczkowego
 - Systemy czasu ciągłego
 - Operacje matematyczne
 - Trasowanie sygnału
 - Źródła
 - Sinks
- Rozwiązanie metodą przetwarzania sygnałów

XCOS

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = \frac{E - RC \frac{du_C}{dt} - u_C}{LC}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_C}{L}$$

Zestaw A

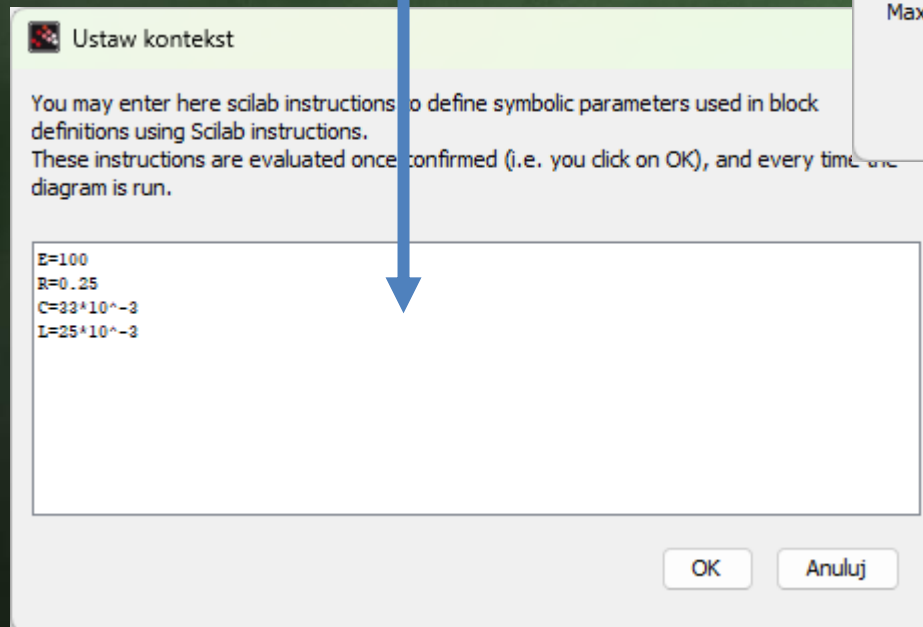
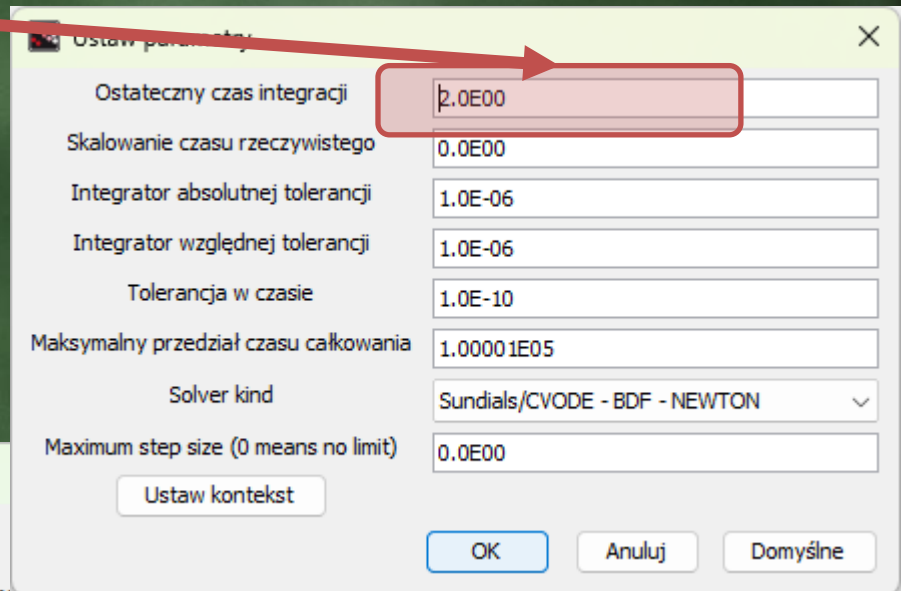
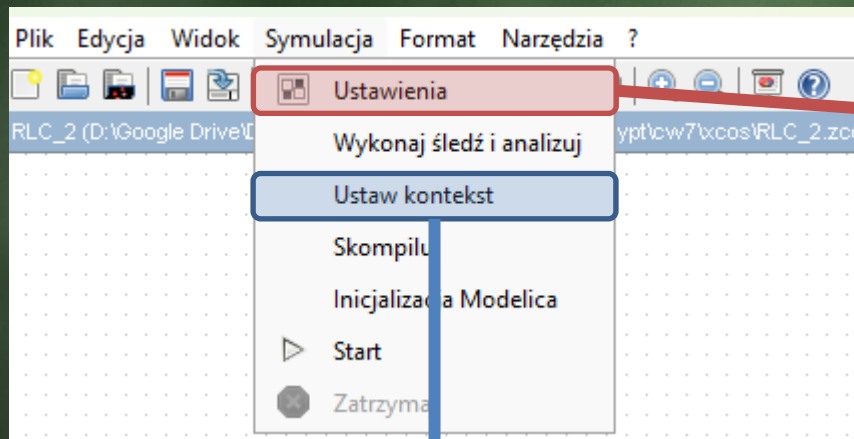
$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u_C}{L}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

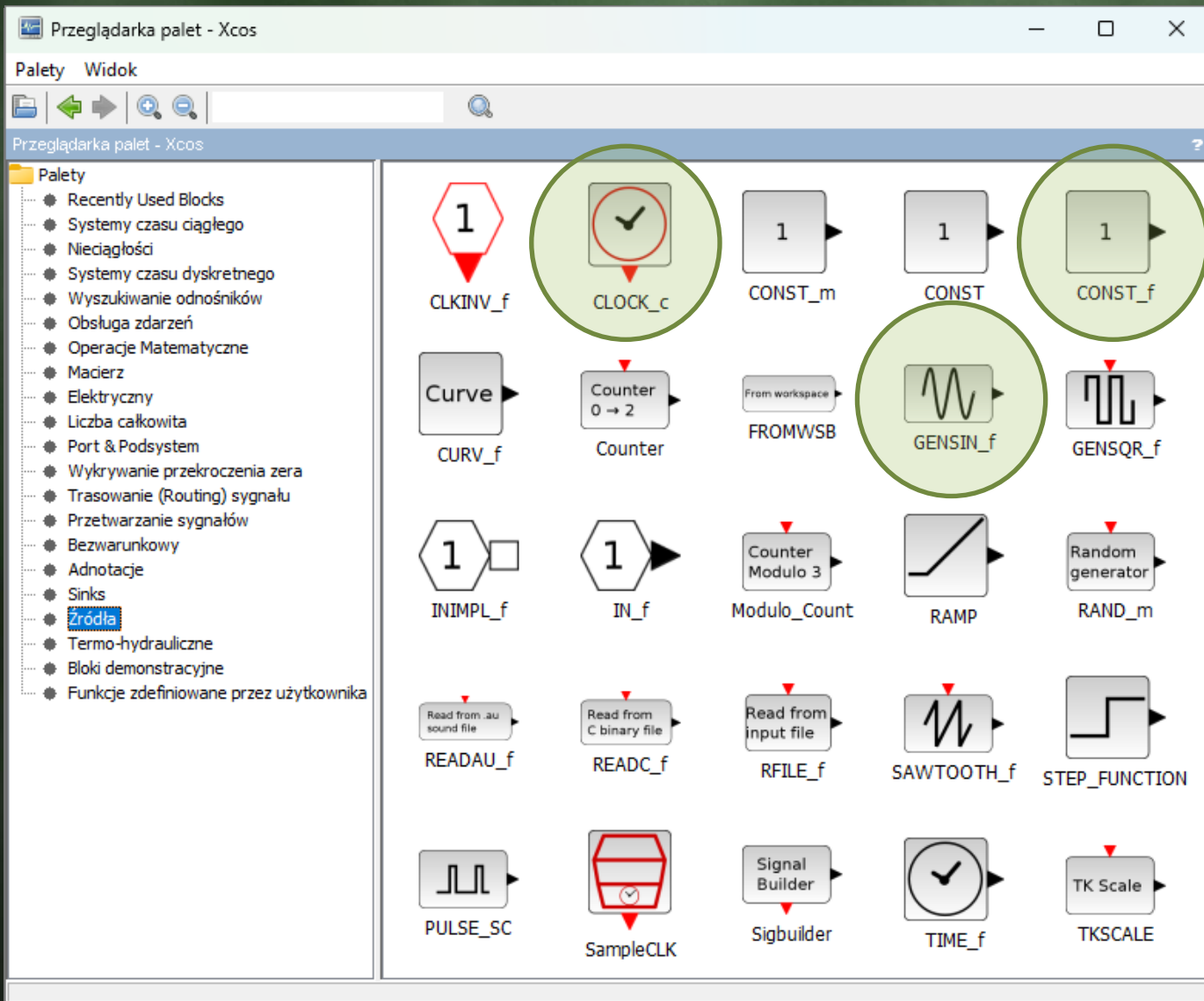
Zestaw B

XCOS

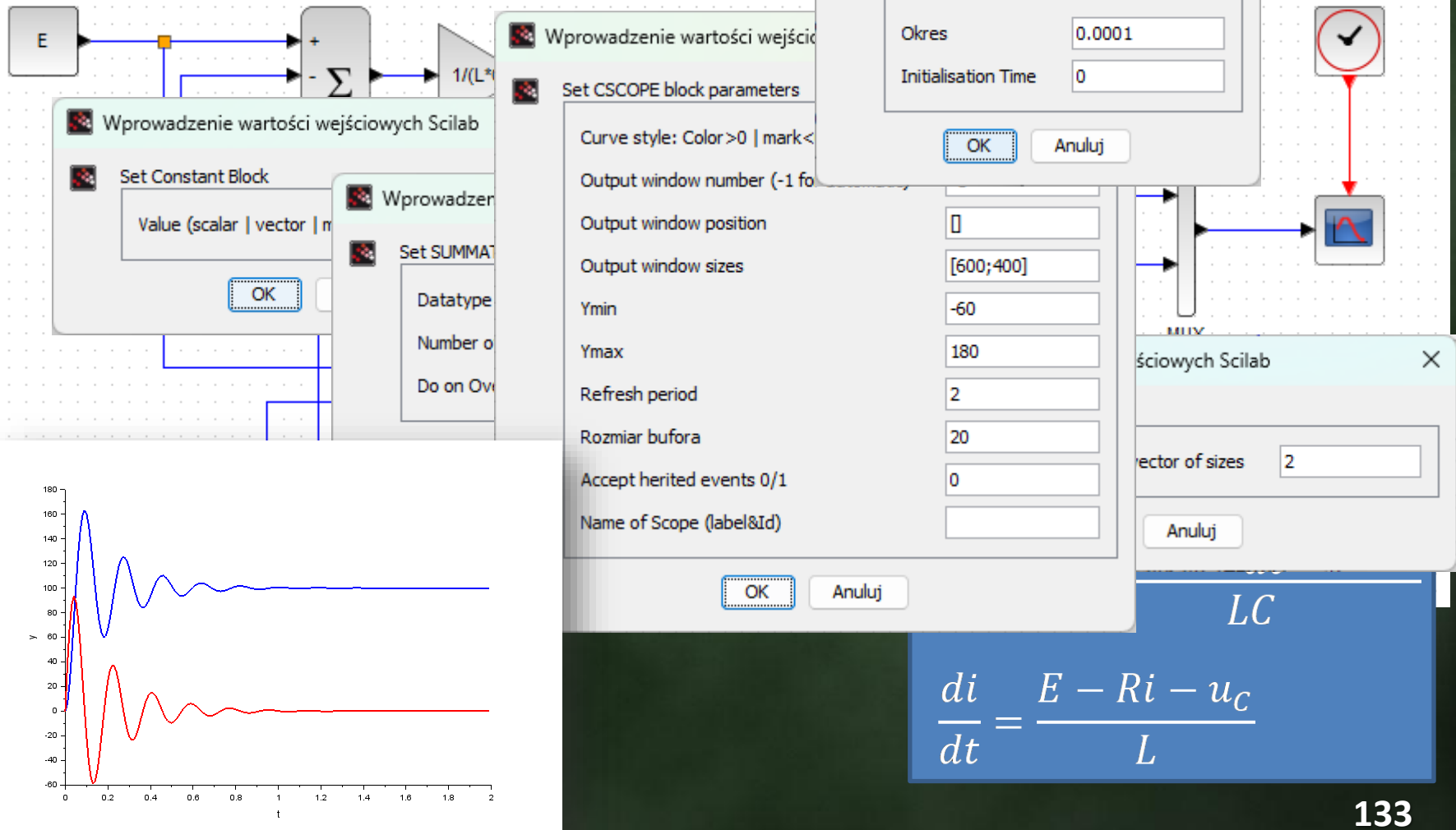
15:21



XCOS - Bloki



XCOS – MODEL A



XCOS – MODEL B

