

# Laboratorium Metod Numerycznych

## Rachunek macierzowy

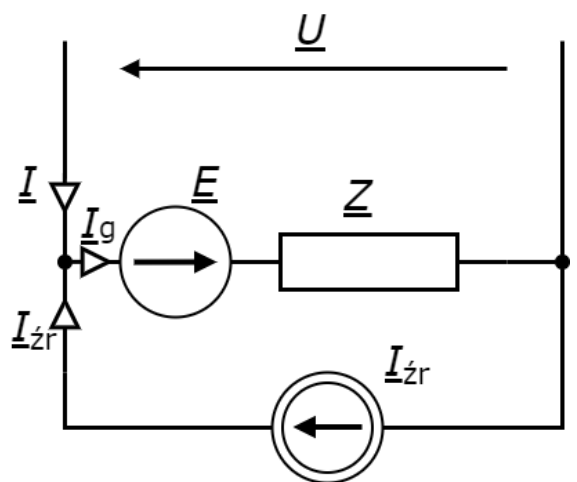
### Laboratorium 3

Rachunek macierzowy jest podstawowym narzędziem stosowanym przez większość metod numerycznych. Wiele problemów obliczeniowych można rozwiązać z wykorzystaniem prostych przekształceń macierzowych, metodami stosowanymi na zajęciach rachunkowych. Dobrym przykładem może być zastosowanie rachunku macierzowego przy wyznaczaniu rozkładu prądów w rozgałęzionym obwodzie elektrycznym metodami:

- prądów oczkowych
- potencjałów węzłowych
- wyznaczników

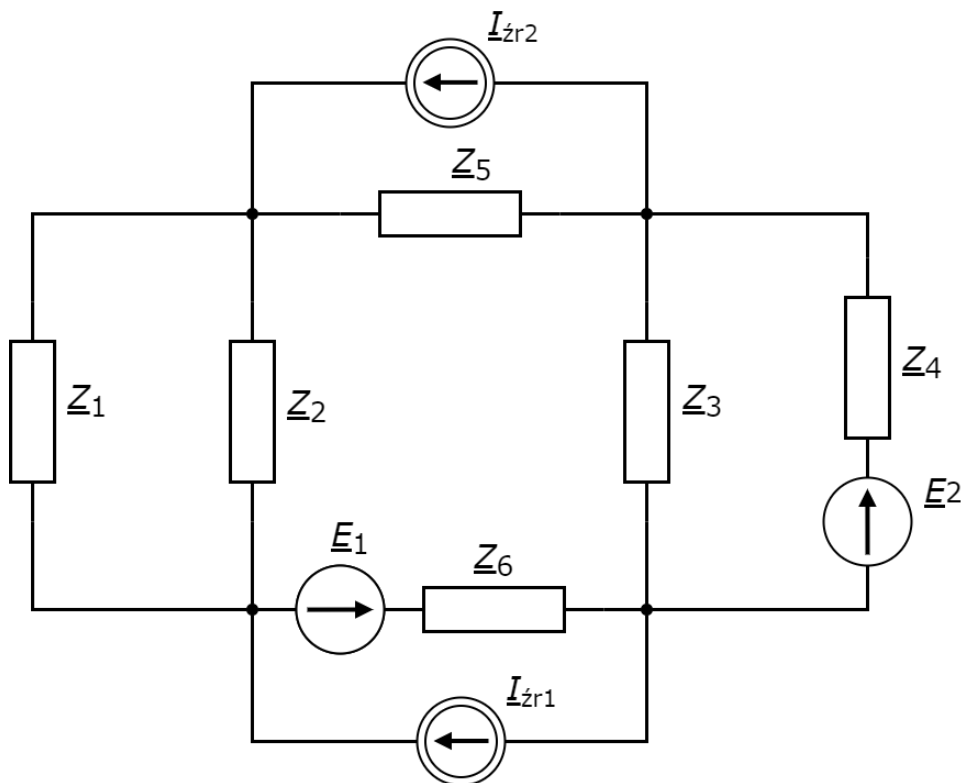
Rozgałęziony obwód elektryczny [1, 2] jest złożoną strukturą połączonych ze sobą gałęzi elektrycznych powstałej z jednego lub wielu połączonych ze sobą elementów idealnych. Indywidualną cechą opisującą każdą gałąź elektryczną jest natężenie płynącego przez nią prądu elektrycznego. Zbudowana w ten sposób gałąź jest włączona do struktury obwodu pomiędzy dwoma jego węzłami. Każdy z węzłów obwodu jest opisany potencjałem elektrycznym. Do każdego węzła obwodu podpiętych jest dwie lub więcej gałęzi. Układ kilku połączonych węzłami gałęzi tworzących kontur zamknięty określa się mianem oczka. Warunkiem koniecznym do zdefiniowania układu gałęzi jako oczka jest brak jakichkolwiek wewnętrznych gałęzi.

Uogólniona postać gałęzi elektrycznej budowana przez idealne elementy pasywne może zawierać także elementy źródłowe (prądowy i napięciowy). Schemat gałęzi uogólnionej pokazano na Rys.1 [3].



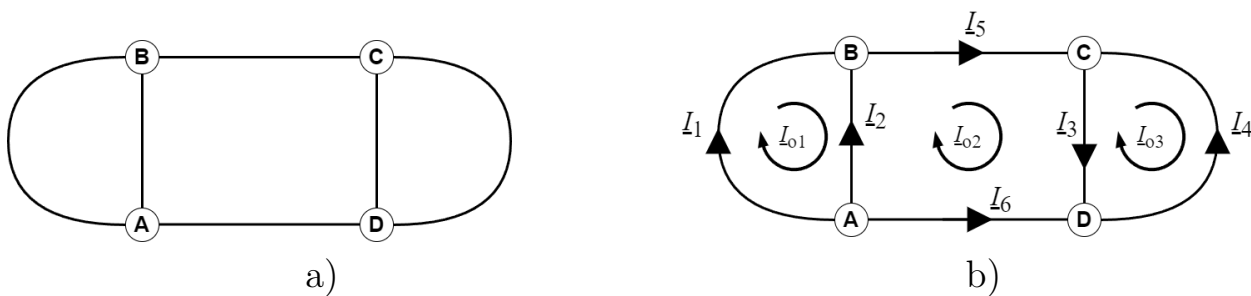
Rys. 1: Uogólniona gałąź obwodu elektrycznego

Wyznaczanie rozplywu prądów gałęziowych w rozgałęzionym obwodzie elektrycznym prądu przemiennego z wykorzystaniem rachunku macierzowego omówiona zostanie dla przykładowego układu pokazanego na Rys.2.



Rys. 2: Schemat analizowanego obwodu elektrycznego

każdy analizowany obwód elektryczny można przedstawić w formie uproszczonej za pomocą grafu obrazującego powiązanie gałęziowe węzłów obwodu. Podstawowa forma grafu określana jest jako niezorientowana, jak pokazano na Rys.3a. Uzupełniając opracowany graf o kierunki prądów gałęziowych i oczkowych uzyskuje się graf zorientowany ułatwiający przeprowadzenie obliczeń. Oznaczenie prądów gałęziowych i oczkowych na grafie jest dowolne. Zazwyczaj jednak kierunki prądów gałęziowych obiera się za zgodne wymuszeniami, a zwroty prądów oczkowych na zgodne z obiegiem wskazówek zegara, jak pokazano na Rys.3b.



Rys. 3: Diagram a) niezorientowany i b) zorientowany

Metody prądów oczkowych i potencjałów węzłowych realizowane są za pomocą podobnych przekształceń i podstawa uzyskania poprawnych wyników obliczeń jest

poprawne zapisanie macierzy strukturalnych opisujących powiązanie pomiędzy podstawowymi elementami obwodów zobrażowane za pomocą grafu zorientowanego.

## 1) Macierze i wektory danych

Elementy pasywne i wymuszeń budujące analizowany obwód przekazywane są do algorytmu obliczeniowego za pomocą macierzy i wektorów danych. Są one wspólne dla metody prądów oczkowych i potencjałów węzłowych.

- $Z_d$  - macierz diagonalna impedancji gałęziowych obwodu, jej kolejnymi elementami są impedancje gałęziowe poszczególnych gałęzi, w kolejności zgodnej z przyjętym indeksowaniem. Jest ona stosowana w algorytmie metody prądów oczkowych.

$$Z_d = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- W algorytmie metody potencjałów węzłowych wykorzystuje się macierz diagonalna admitancji  $Y_d = \frac{1}{Z_d}$ .

$$Y_d = \frac{1}{Z_d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\underline{Z}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\underline{Z}_6} \end{bmatrix} \quad (2)$$

- $E_g$  - wektor wymuszeń napięciowych lokalizujący położenie idealnych źródeł napięciowych w strukturze obwodu. Położenie wartości napięcia źródła w wektorze opowiada indeksowi gałęzi w której jest zlokalizowany. Należy pamiętać o uwzględnieniu zwrotu źródła napięciowego zgodnie z poniższymi zasadami:

- jeżeli zwrot źródła napięciowego jest przeciwny do założonego zwrotu prądu gałęziowego do wektora wymuszeń napięciowych  $E_g$  wartość napięcia źródłowego jest wstawiana ze znakiem minus

+ jeżeli zwrot źródła napięciowego jest zgodny z założonym zwrotem prądu gałęziowego do wektora wymuszeń napięciowych  $E_g$  wartość napięcia źródłowego jest wstawiana ze znakiem plus

Dla analizowanego obwodu wektor przyjmuje postać:

$$E_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{E}_2 \\ 0 \\ \underline{E}_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- $I_z$  - wektor wymuszeń prądowych lokalizuje położenie idealnych źródeł prądowych w obwodzie. Prawidłowe zapisanie wektora prądów źródłowych jest szczególnie istotne dla uzyskania prawidłowych wyników z metody. Wektor budowany jest w oparciu o gałęzie i w odniesieniu do kierunku założonych prądów gałęziowych. Źródło prądowe jest włączane równolegle do takiej gałęzi. Wartość prądu źródłowego w wektorze przyjmowana jest:

- + ze znakiem plus jeżeli kierunek prądu gałęziowego jest przeciwny do kierunku prądu źródłowego
- ze znakiem minus jeżeli kierunek prądu gałęziowego jest zgodny z kierunkiem prądu źródłowego

Dla analizowanego obwodu wektor przyjmuje postać:

$$I_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \underline{I}_{zr2} \\ \underline{I}_{zr1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 2) Metoda prądów oczkowych

W metodzie prądów oczkowych macierz strukturalna (incydencji) opisuje zależności pomiędzy prądami gałęziowymi a oczkowymi. Liczba wierszy macierzy zależy od liczby oczek w obwodzie, a kolumn od liczby gałęzi, natomiast wartości odpowiadają relacji pomiędzy prądem oczkowym a prądem gałęziowym zgodnie z podanymi poniżej warunkami:

- 1  $\rightarrow$  jeżeli gałąź należy do oczka i kierunek jej prądu jest przeciwny z prądem oczkowym
- 0  $\rightarrow$  jeżeli gałąź nie należy do oczka
- 1  $\rightarrow$  jeżeli gałąź należy do oczka i kierunek jej prądu jest zgodny z prądem oczkowym

Dla grafu pokazanego na Rys.3a oczkowa macierz incydencji  $B$  przyjmuje postać:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na podstawie zdefiniowanych macierzy i wektorów danych oraz macierzy incydencji można wyznaczyć wartości prądów gałęziowych na podstawie opisanego poniżej algorytmu.

1. obliczenie macierzy impedancji własnych i wzajemnych:

$$Z = B \cdot Z_d \cdot B^T \quad (6)$$

2. Wektor prądów oczkowych  $I_o$  może zostać wyznaczony, pod warunkiem wykonalności wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy impedancji własnych i wzajemnych:  $Z^{-1}$  - **istnieje**

$$I_o = Z^{-1} \cdot B \cdot (E_g - Z_d \cdot I_z) \quad (7)$$

3. Wyznaczenie prądów gałęziowych jest dwuetapowe, w zależności od występowania w analizowanym źródle prądowych:

I wartości wypadkowych prądów gałęziowych uogólnionych

$$I = B^T \cdot I_o \quad (8)$$

II jeżeli w obwodzie występują źródła prądowe ostateczne wartości prądów gałęziowych wyznacza się z zależności

$$I_g = I + I_z \quad (9)$$

### 3) Metoda potencjałów węzłowych

W metodzie potencjałów węzłowych także budowana jest macierz strukturalna (incydencji) opisująca zależności pomiędzy prądami gałęziowymi a węzłami. Liczba wierszy macierzy zależy od liczby węzłów w obwodzie, a kolumn od liczby gałęzi, natomiast wartości odpowiadają relacji pomiędzy prądem oczkowym a węzłem zgodnie z podanymi poniżej warunkami:

-1  $\rightarrow$  jeżeli gałąź jest związana z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest do węzła

0  $\rightarrow$  jeżeli gałąź jest związana z węzłem

1  $\rightarrow$  jeżeli gałąź jest związana z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest od węzła

Dla grafu pokazanego na Rys.3a pełna węzłowa macierz incydencji  $A_p$  przyjmuje postać:

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Warto zwrócić uwagę, że suma elementów w każdej kolumnie wynosi zero, jest to sposób na wstępną weryfikację poprawności zapisania macierzy incydencji dla metody potencjałów węzłowych.

Metoda potencjałów węzłowych zakłada przyjęcie jednego z węzłów za węzeł odniesienia, w konsekwencji macierz incydencji ostateczna  $A$  powstanie poprzez usunięcie wiersza powiązanego z uziemionym węzłem. W wybór węzła uziemienia jest obojętny i nie wpływa na końcowy wynik, dla potrzeb przykładu przyjęto węzeł  $D$  jako węzeł odniesienia (uziemiony).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Weryfikację poprawności utworzenia macierzy incydencji (oczkowej i węzłowej) można przeprowadzić sprawdzając poniższe warunki:

$$AB^T == 0 \quad i \quad BA^T == 0 \quad (12)$$

Na podstawie zdefiniowanych macierzy i wektorów danych oraz macierzy incydencji można wyznaczyć wartości prądów gałęziowych na podstawie opisanego poniżej algorytmu.

1. obliczenie macierzy admitancji własnych i wzajemnych:

$$Y = A \cdot Y_d \cdot A^T \quad (13)$$

2. Wektor potencjałów węzłowych  $U_w$  może zostać wyznaczony, pod warunkiem wykonalności wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy admitancji własnych i wzajemnych:  $Y^{-1}$  - **istnieje**

$$U_w = Y^{-1} \cdot A \cdot (I_z - Y_d \cdot E_g) \quad (14)$$

3. Wektor napięć gałęziowych wyznacza się z zależności

$$U = A^T \cdot U_w \quad (15)$$

4. Ostatecznie wektor prądów gałęziowych oblicza się z zależności

$$I_g = Y_d \cdot (U + E_g) \quad (16)$$

#### 4) Weryfikacja obliczeniowa algorytmów

Dla przykładowego obwodu z Rys.2 i przyjętych poniżej danych przeprowadzono obliczenia weryfikujące poprawność opisanych powyżej algorytmów.

$$\underline{Z}_1 = 10i \Omega, \underline{Z}_2 = (20 - 20i) \Omega, \underline{Z}_3 = 10i \Omega,$$

$$\underline{Z}_4 = 20 \Omega, \underline{Z}_5 = 40 \Omega, \underline{Z}_6 = 10 \Omega,$$

$$\underline{E}_1 = 100i V, \underline{E}_2 = (100 - 100i) V,$$

$$\underline{I}_{zr1} = 2 A, \underline{I}_{zr2} = (1 + i) A$$

Kod źródłowy algorytmów obliczeniowych zapisano poniżej.

```
clear;clc;close();
format("v",5);
//DANE
Z1=10*i;
Z2=20-20*i;
Z3=10*i;
Z4=20;
Z5=40;
Z6=10;
E1=100*i;
E2=100-100*i;
Iz1=2;
Iz2=1+i;
//MACIERZE DANYCH
Z_d=[Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6];
Y_d=1./Z_d;
Zd=diag(Z_d);
Yd=diag(Y_d);
Eg=[0;0;0;E2;0;E1];
Iz=[0;0;0;0;Iz2;Iz1];
//MACIERZ INCYDENCJI
B= [1,-1,0,0,0,0;
    0,1,1,0,1,-1;
    0,0,-1,-1,0,0];
A= [1,1,0,0,0,1;
    -1,-1,0,0,1,0;
    0,0,1,-1,-1,0;
    0,0,-1,1,0,-1];
//METODA PRĄDÓW OCZKOWYCH
Z=B*Zd*B';
Io=inv(Z)*B*(Eg-Zd*Iz);
I=B'*Io;
Igo=I+Iz;
```

```

disp("Wyniki z metody prądów oczkowych.");
for i=1:6
    disp("I"+string(i)+"="+string(Igo(i))+" A, I"
        +string(i)+"="+string(abs(Igo(i)))+ " A");
end
//METODA POTENCJAŁÓW WĘZŁOWYCH
g=input("Podaj numer węzła uziemionego (1-4):");
A(g,:)=[];
Y=A*Yd*A';
Uw=inv(Y)*A*(Iz-Yd*Eg);
U=A'*Uw;
Igw=Yd*(U+Eg);
disp("Wyniki z metody potencjałów węzłowych.");
for i=1:6
    disp("I"+string(i)+"="+string(Igw(i))+" A, I"
        +string(i)+"="+string(abs(Igw(i)))+ " A");
end
format("v",10);
disp("Największa różnica pomiędzy metodami = "+string(norm(Igw-Igo)));

```

Niezależnie od wyboru węzła odniesienia wyniki z obu metod są identyczne, z różnicą na poziomie obliczeniowych środowiska ( $10^{-15}$ ). Wyniki przykładowej symulacji pokazano poniżej.

```

"Wyniki z metody prądów oczkowych."
"I1=-3.32-%i*1.62 A, I1=3.69 A"
"I2=1.23-%i*0.43 A, I2=1.3 A"
"I3=-0.48-%i*6.8 A, I3=6.82 A"
"I4=1.6-%i*4.76 A, I4=5.02 A"
"I5=-1.08-%i*1.04 A, I5=1.5 A"
"I6=4.08+%i*2.04 A, I6=4.56 A"
Podaj numer węzła uziemionego (1-4):1
"Wyniki z metody potencjałów węzłowych."
"I1=-3.32-%i*1.62 A, I1=3.69 A"
"I2=1.23-%i*0.43 A, I2=1.3 A"
"I3=-0.48-%i*6.8 A, I3=6.82 A"
"I4=1.6-%i*4.76 A, I4=5.02 A"
"I5=-1.08-%i*1.04 A, I5=1.5 A"
"I6=4.08+%i*2.04 A, I6=4.56 A"
"Największa różnica pomiędzy metodami = 2.391D-15"

```



## 5) Metoda wyznaczników

Każdy rozgałęziony obwód elektryczny można opisać za pomocą równań utworzonych na podstawie I i II prawa Kirchhoffa.

1. Suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.
2. W zamkniętym obwodzie suma spadków napięć równa jest sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie.

Dla przykładowego obwodu można więc zapisać układ równań na podstawie powyższych praw. Utworzyć można trzy równania na podstawie II prawa Kirchhoffa i cztery na podstawie I prawa Kirchhoffa. Przy opisie obwodu elektrycznego jedno, dowolne równanie prądowe (I prawo) pomija się, jak pokazano na poniższym układzie równań.

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 - \underline{I}_2 \underline{Z}_2 = 0 \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 + \underline{I}_5 \underline{Z}_5 - \underline{I}_6 \underline{Z}_6 = -\underline{E}_1 \\ -\underline{I}_3 \underline{Z}_3 - \underline{I}_4 \underline{Z}_4 = -\underline{E}_2 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_6 = \underline{I}_{z1} \\ -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 + \underline{I}_5 = \underline{I}_{z2} \\ \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 = -\underline{I}_{z2} \end{cases} \quad (17)$$

Powyższy układ można następnie zapisać w postaci macierzowej  $A \cdot x = b$ , jak pokazano poniżej.

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & -\underline{Z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & 0 & \underline{Z}_5 & -\underline{Z}_6 \\ 0 & 0 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\underline{E}_1 \\ -\underline{E}_2 \\ \underline{I}_{z1} \\ \underline{I}_{z2} \\ -\underline{I}_{z2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Jedną z najczęściej stosowanych metod rozwiązania takiego układu równań na ćwiczeniach rachunkowych jest metoda wyznaczników. Warunkiem koniecznym do jej wykonania jest aby wyznacznik macierzy głównej był różny od zera. W rozpatrywanym zadaniu wyznacznik macierzy głównej wynosi  $-29000 - 10000i$ , a więc warunek wykonalności obliczeń dla metody wyznaczników jest spełniony.

Poszczególne wartości prądów wyznacza się dzieląc wyznacznik macierzy powstałej przez zastąpienie kolumny odpowiadającej wyznaczanemu prądowi wartościami z wektora wymuszeń. Zmodyfikowaną macierz dla wyznaczenia wartości pierwszego

prądu gałęziowego zapisano poniżej.

$$Z_{I_1} = \begin{bmatrix} 0 & -Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_1 & Z_2 & Z_3 & 0 & Z_5 & -Z_6 \\ -E_2 & 0 & -Z_3 & -Z_4 & 0 & 0 \\ I_{z1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I_{z2} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -I_{z2} & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Wartość prądu wyznacza się jako iloraz wyznacznika zmodyfikowanej macierzy przez wyznacznik macierzy głównej układu równań, jak pokazano poniżej.

$$I_n = \frac{W_{Z_n}}{W_Z} \quad (20)$$

Dla przykładowego obwodu opracowano algorytm obliczeniowy na podstawie metody wyznaczników i uzyskano pokazane poniżej wyniki, zgodne z wynikami uzyskanymi z metody prądów oczkowych i potencjałów węzłowych.

"Wyniki uzyskane metodą wyznaczników."

"I1=-3.32-%i\*1.62 A, I1=3.69 A"

"I2=1.23-%i\*0.43 A, I2=1.3 A"

"I3=-0.48-%i\*6.8 A, I3=6.82 A"

"I4=1.6-%i\*4.76 A, I4=5.02 A"

"I5=-1.08-%i\*1.04 A, I5=1.5 A"

"I6=4.08+%i\*2.04 A, I6=4.56 A"

Na podstawie zapisanych w skrypcie macierzy tworzących równanie macierzowe z wykorzystaniem funkcji `linsolve()` przeprowadzono weryfikację uzyskanych wyników. Funkcja `linsolve` rozwiązuje równanie w postaci  $Ax + b = 0$ , co sprawia że poprawne wywołanie tej funkcje dla analizowanego przypadku wymaga podania drugiego z jej atrybutów ze znakiem minus.

```
--> Ispr=linsolve(Z,-b)          --> abs(Ispr)
Ispr =                            ans =
-3.32 - 1.62i                      3.69
 1.23 - 0.43i                      1.30
-0.48 - 6.8i                       6.82
 1.6  - 4.76i                      5.02
-1.08 - 1.04i                      1.50
 4.08 + 2.04i                      4.56
```

## Zadania

Na podstawie informacji zawartych w niniejszej instrukcji wyznaczyć rozptyw prądu w rozgałęzionym obwodzie elektrycznym prądu przemiennego metodami:

1. prądów oczkowych,
2. potencjałów węzłowych,
3. wyznaczników.

Poprawność otrzymanych wyników zweryfikować za pomocą funkcji `linsolve()`. Obliczenia wykonać dla obwodu spełniającego poniższe kryteria:

- obwód składa się z minimum sześciu oczek
- każda z gałęzi zawiera elementy  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $RL$  lub  $RC$
- obwód zasilany jest przez co najmniej dwa idealne źródła napięciowe i co najmniej dwa idealne źródła prądowe
- źródła napięciowe włączone są szeregowo do wybranych gałęzi
- źródła prądowe włączone są równolegle do wybranych gałęzi

Opracowany skrypt:

- wykonuje obliczenia zaleconymi metodami i funkcją weryfikującą
- wyświetla informacje o danych wejściowych zadania
- wyświetla wraz z opisami macierze i wektory danych dla każdego z zadań
- wyświetla wyniki w postaci wartości zespolonych i skutecznych prądów
- eksportuje wyniki zadania w postaci wartości zespolonych i skutecznych prądów do pliku `*.csv` o nazwie podanej przez użytkownika
- skrypt weryfikuje poprawność uzyskanych wyników sprawdzając I prawo Kirchhoffa dla węzłów obwodu i II prawo Kirchhoffa dla oczek, wyświetla wyniki weryfikacji w postaci wykresów wskazowych

Poszczególne zadania obliczeniowe (metody obliczeniowe) i wybrane czynności prezentacji danych realizują funkcje. Zdefiniowane funkcje zapisać w zewnętrznym pliku `*.sci` i załadować w głównym skrypcie programu. Schemat obwodu, grafy i parametry obwodu zamieścić w pliku `*.pdf`.

## Bibliografia

- [1] S. Bolkowski. *Elektrotechnika teoretyczna, Tom I*. WSiP, 1986.
- [2] S. Bolkowski. *Elektrotechnika*. WSiP, 2012.
- [3] M. Łanczont J. Jaroszyński. *Laboratorium Metod numerycznych*. Lublin: Politechnika Lubelska, 2014.