

# Laboratorium Metod Numerycznych

## Numeryczne rozwiązywanie równania nieliniowych

### Laboratorium 6

Wiele zjawisk fizycznych opisanych jest zależnościami nieliniowymi. Część z nich można aproksymować zależnościami liniowymi zachowując wystarczający poziom dokładności. Zjawiska te analizować można metodami opisanymi w poprzednich ćwiczeniach. Gdy linearyzacja problemu nie jest możliwa do wyznaczenia rozwiązania równania bądź układu równań liniowych należy zastosować jedną z znanych i stosowanych metod numerycznych.

Numeryczne wyznaczanie rozwiązania równania nieliniowego realizowane jest metodami iteracyjnymi, a jego zbieżność determinowana podanym błędem  $\varepsilon$  rozwiązania. W ćwiczeniu omówione i przećwiczone będą metody [1, 2]

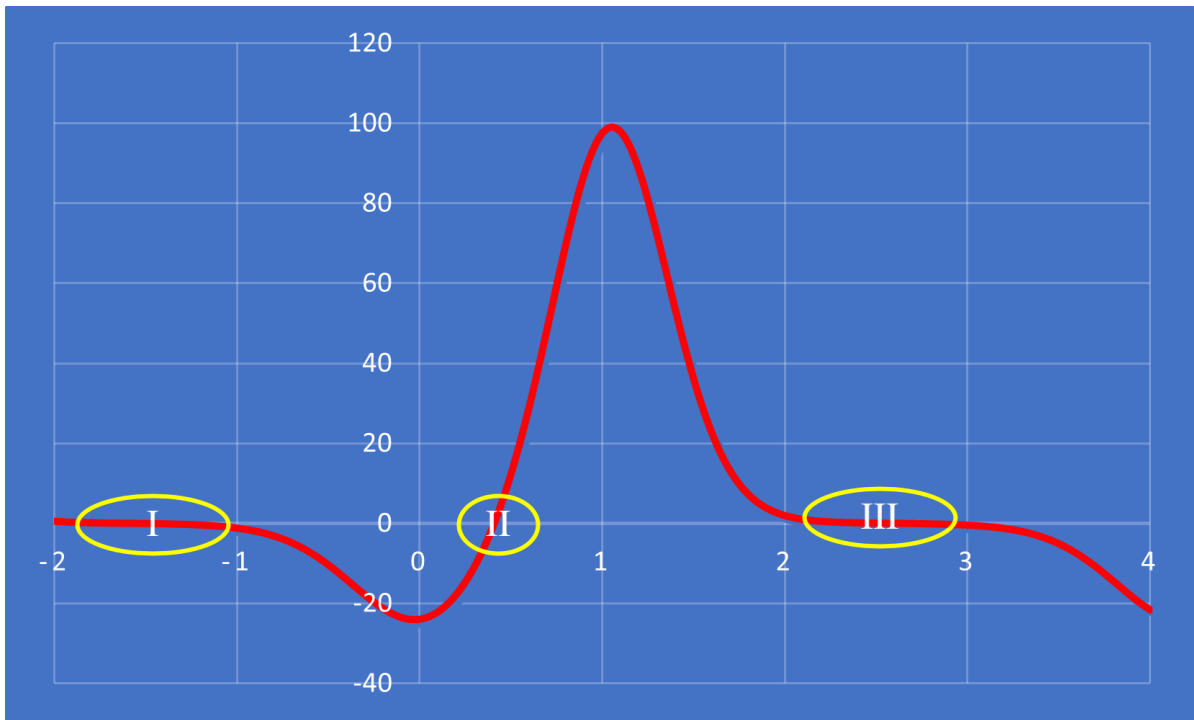
1. bisekcji
2. reguła fałsi
3. siecznych
4. stycznych
5. iteracji prostej

Numeryczne rozwiązywanie równania nieliniowego powyższymi metodami iteracyjnymi realizowane jest zazwyczaj w ściśle określonym przedziale  $(a, b)$ , w którym oczekiwane jest występowanie poszukiwanego rozwiązania.

Ważnym kryterium determinującym szybkość i dokładność odnalezienia rozwiązania równania jest dopuszczalny błąd obliczeń  $\varepsilon$  równania  $f(x) = 0$ . W najprostszym rozwiązaniu kryterium granicznego poszukiwania rozwiązania sprawdza się warunek  $f(x_k) \leq \varepsilon$ . Jeżeli warunek jest spełniony uznaje się wartość  $x_k$  za rozwiązanie, jeżeli nie, kontynuuje się obliczenia wyznaczając kolejne przybliżenie. Należy jednak zwrócić uwagę na rozpiętość poprawnego rozwiązania dla wybranego błędu dopuszczalnego. Zagadnienie to najlepiej rozpatrywać na konkretnym przypadku równania nieliniowego (1).

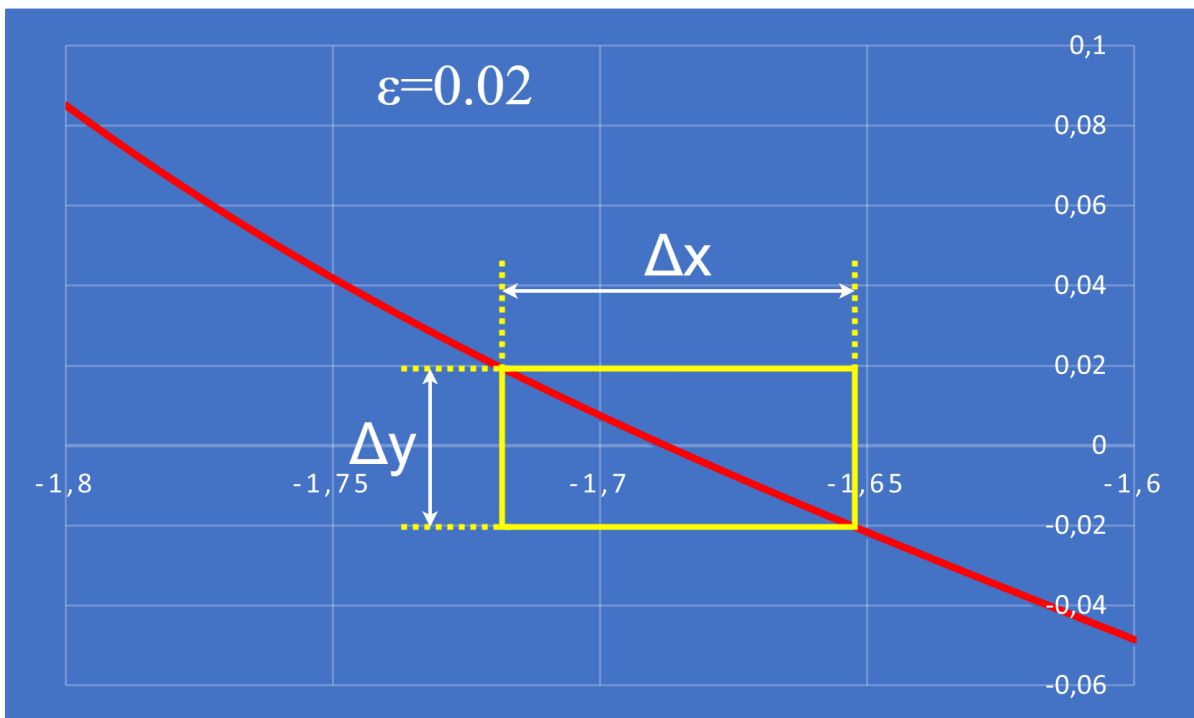
$$f(x) = 10^{2 \cdot \sin(1.5 \cdot x)} - 5^{2 \cdot \cos(1.5 \cdot x)} \quad (1)$$

Charakterystykę pokazującą przebieg funkcji w przedziale  $(-2, 4)$ , jak pokazano to na Rys.1.



Rys. 1: Przebieg przykładowej funkcji nieliniowej

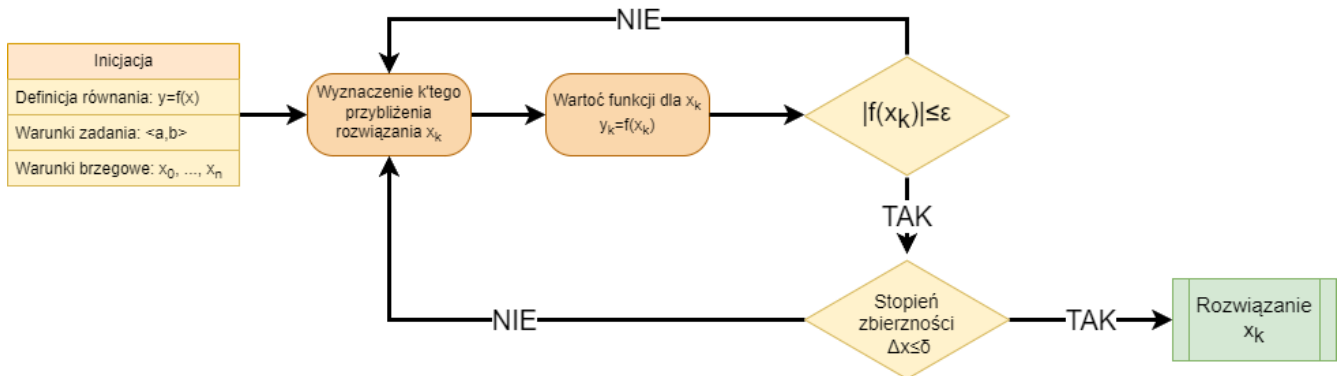
Można zauważyć że w analizowanym przedziale  $(-2, 4)$  funkcja ma trzy miejsca zerowe (rozwiązania), jak zaznaczono na Rys.1 jako obszary *I*, *II* i *III*. W obszarze *I* i *III* można zauważyć że zakres dopuszczalnych rozwiązań równania z błędem  $\varepsilon = 0.02$  obejmuje bardzo szeroki zakres wartości  $x$ , z błędem w granicach  $\varepsilon_x = \pm 0.04$ , czyli z dwukrotnie mniejszą dokładnością.



Rys. 2: Otoczenie *I* (i *III*) miejsca zerowego

Powoduje to, że w zależności od kąta nachylenia krzywej do osi  $Ox$  należało by rozważyć zwiększenie kryterium zbieżności, poprzez zmniejszenie wartości współczynnika  $\varepsilon$ . Alternatywnym rozwiązaniem jest sprawdzenie czy różnica pomiędzy kolejnymi rozwiązaniami równania jest dostatecznie mała i spełnia założone kryterium zbieżności dla rozwiązań  $\varepsilon_x$ . Kryterium to należało by weryfikować przy spełnionym warunku głównym rozwiązania równania nieliniowego  $f(x_k) \leq \varepsilon$ .

Wszystkie omawiane w ćwiczeniu metody rozwiązywania równań nieliniowych opierają się na tym samym algorytmie iteracyjnym, pokazany ma Rys.3.



Rys. 3: Uogólniony algorytm rozwiązywania równania nieliniowego metoda krokową

## 1) Metoda bisekcji - połowienia

Podstawową metodą iteracyjną rozwiązywania równań nieliniowych jest metoda **bisekcji**. Przy spełnionych warunkach metody:

- w przedziale  $\langle a, b \rangle$  jest jedno miejsce zerowe,
- na krańcach przedziału funkcja przyjmuje wartości o przeciwnych znakach  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,

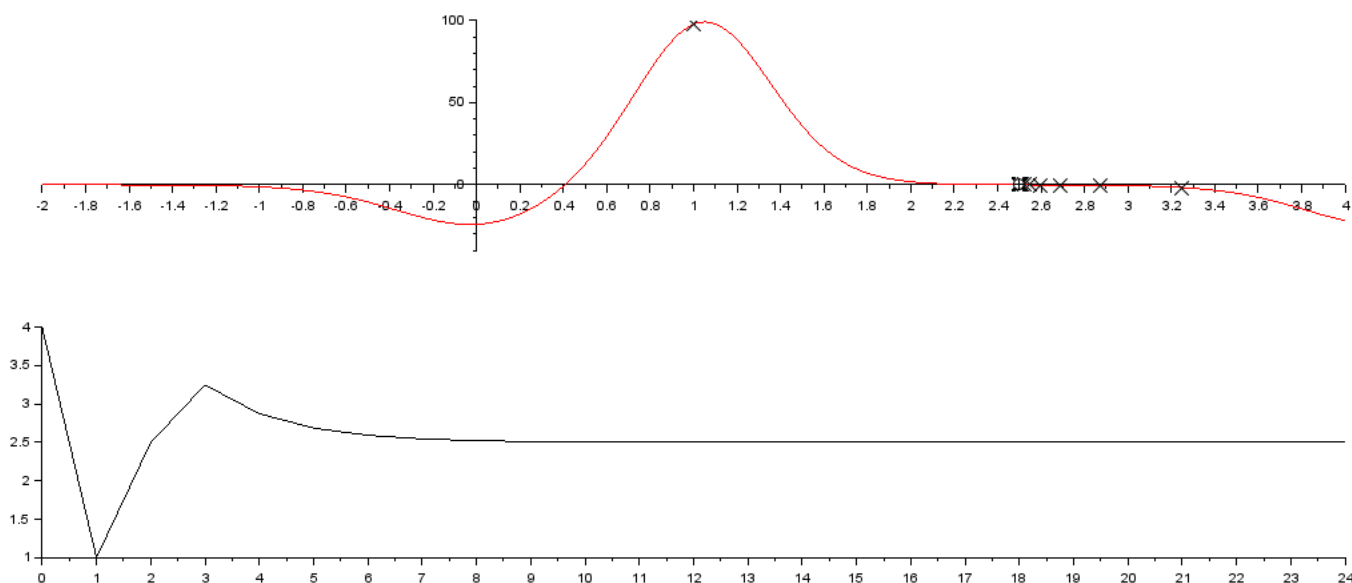
metoda gwarantuje zbieżność. Ze względu na metodykę dochodzenia do rozwiązania jest ona najwolniej zbieżna. Jeżeli w badanym przedziale  $\langle a, b \rangle$  jest więcej jak jedno miejsce zerowe metoda może wskazać tylko jedno z nich, a w ekstremalnym przypadku, w zależności od zaprogramowanych kryteriów zbieżności, może nie wskazać żadnego lub wskaże fałszywe rozwiązanie.

Algorytm metody **bisekcji** zakłada cyklicznie realizowanie:

- podziału przedziału poszukiwań na dwie równe części  $\langle a, c \rangle$  i  $\langle c, b \rangle$ ,
- wyznaczenie wartości funkcji w punkcie połowienia i sprawdzenie czy  $|f(c)| \leq \varepsilon$ ,
- przy spełnieniu warunku punkt  $c$  staje się rozwiązaniem równania,
- przy warunku niespełnionym należy określić w którym z dwóch nowych przedziałów  $\langle a, c \rangle$  lub  $\langle c, b \rangle$  znajduje się rozwiązanie równania nieliniowego poprzez wykonanie testów  $f(a) \cdot f(c) < 0$  i  $f(c) \cdot f(b) < 0$ ,
- przedział dla którego warunek jest prawdziwy będzie nowym zawężonym przedziałem poszukiwania i cykl jest powtarzany

Rozbudowując powyższy algorytm o dodatkowe, warunkowo wykonywane testy połowienia można zaprogramować algorytm wyszukujący więcej jak jedno rozwiązanie równania nieliniowego w badanym przedziale  $\langle a, b \rangle$ .

Na podstawie wypunktowanych powyżej kroków algorytmu opracowano funkcje `bisekcja()` zwracającą rozwiązanie zadanego równania nieliniowego z żadaną dokładnością  $\varepsilon$ . Dla przykładowej funkcji nieliniowej (1) w przedziale  $\langle -2, 4 \rangle$  odnaleziono jedno miejsce zerowe  $x \approx 2.5$  z zadaną dokładnością  $\varepsilon = 0.0000001$  po 25 krokach. Wykres zbieżności metody **bisekcji** dla zadanych warunków zadania pokazano na Rys.4.



Rys. 4: Przebieg badanej funkcji z zaznaczonym odnalezionym rozwiązaniem oraz wykres zbieżności metody

Na Rys.4 krzyżykami zaznaczono kolejne przybliżenia rozwiązanie funkcji nieliniowej zwracane przez metodę **bisekcji**. Rozwiązanie spełniające warunek zbieżności zaznaczono kwadratem.

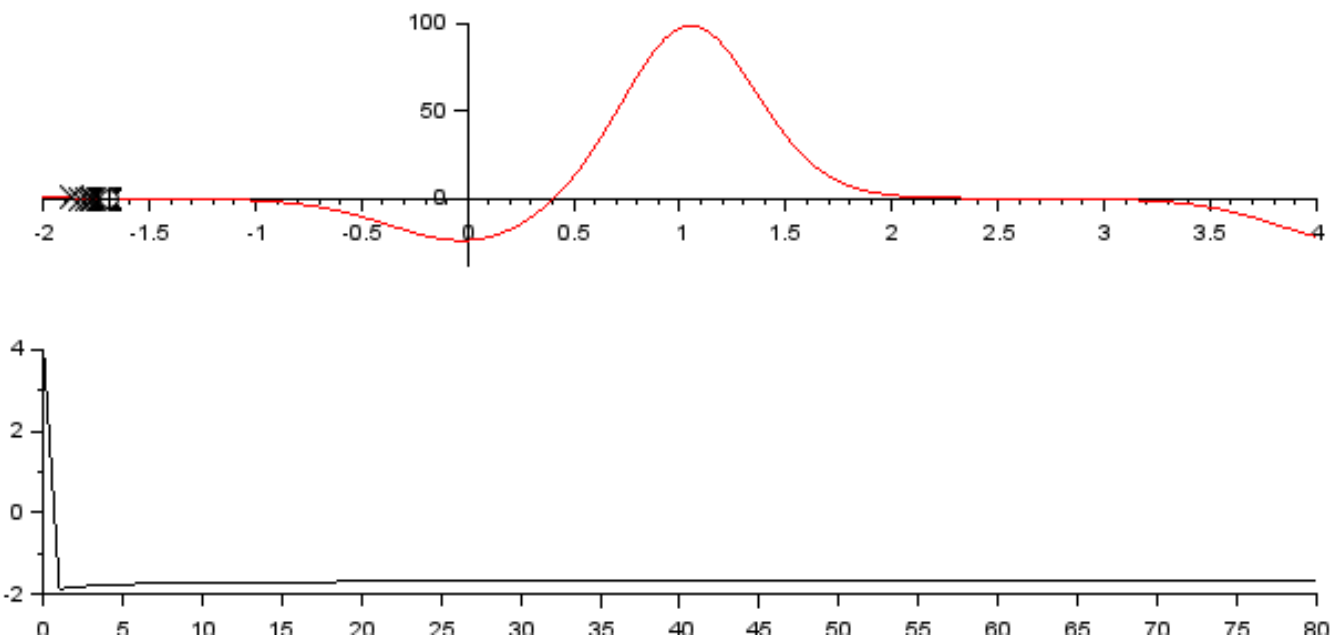
## 2) Metoda regula falsi

Metoda **regula falsi** (fałszywej prostej) jest iteracyjną metodą wyznaczania rozwiązania równania nieliniowego opierającą się na założeniu że każdą krzywą można w dostatecznie wąskim przedziale aproksymować odcinkiem prostej. Kolejne przybliżenia wyznaczone są jako punkt przecięcia prostej wyznaczonej przez punkty na wykresie funkcji leżące na krańcach przedziału poszukiwania z osią  $Ox$ . Podobnie jak w metodzie **bisekcji** warunkiem wyznaczenia przybliżonej wartości rozwiązania jest przyjmowanie przez funkcję nieliniową na krańcach przedziału  $\langle a, b \rangle$  wartości o przeciwnych znakach ( $f(a) \cdot f(b) < 0$ ). Niespełnienie warunku przez punkty graniczne spowoduje że przybliżenie rozwiązania zostanie odnalezione poza tym przedziałem. W ekstremalnym przypadku gdy  $f(a) = f(b)$  punkt nie zostanie wskazany.

Algebraicznie poszukiwane rozwiązanie można wyznaczyć z poniższej zależności.

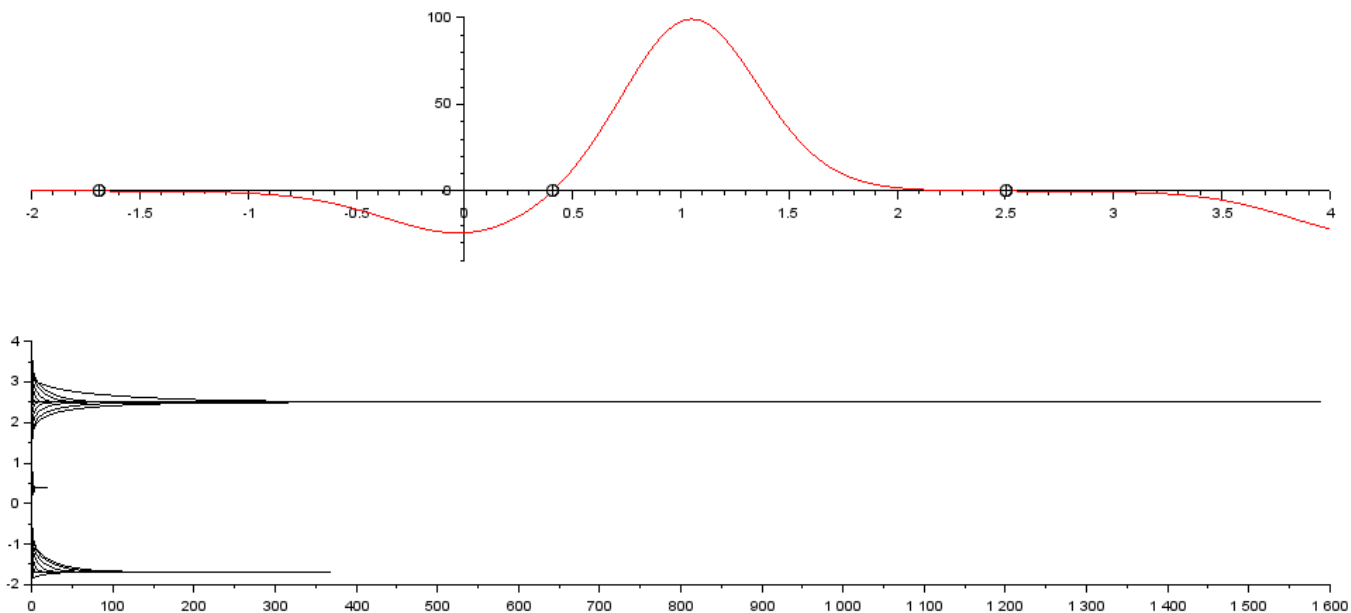
$$x_k = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (2)$$

Algorytm metody jest identyczny jak w metodzie **bisekcji**, różnica występuje jedynie w metodyce wyznaczania kolejnego przybliżenia. Jeżeli wyznaczony punkt nie spełnia warunku zbieżności  $f(x_k) \leq \varepsilon$ , punkt  $x_k$  staje się nowym punktem granicznym przedziału poszukiwań, a określenie drugiego jest uzależnione od spełnienia przez jeden z poprzednich punktów granicznych warunku przeciwnego znaku na krańcach przedziału  $f(x_k) \cdot f(a) < 0$ . Cykl jest powtarzany do czasu uzyskania rozwiązania spełniającego warunek zbieżności  $\varepsilon$ . Dla analizowanego w ćwiczeniu przykładowego równania nieliniowego uzyskano rozwiązanie z metody **regula falsi** po 81 krokach o wartości  $x \approx -1.69$ . Podobnie jak w metodzie bisekcji odnalezienie pozostałych miejsc zerowych równania wymaga modyfikacji kodu (aby wykrycie było realizowane automatycznie) lub zmiany przedziały wyszukiwania.



Rys. 5: Przebieg badanej funkcji z zaznaczonym odnalezionym rozwiązaniem oraz wykres zbieżności metody

Skuteczność metody (szybkość odnajdywania rozwiązania) zależy od warunków brzegowych (doboru przedziału wyszukiwania) oraz przebiegu funkcji nieliniowej w analizowanym przedziale. Metoda w pewnych sytuacjach może zwrócić rozwiązanie spoza przedziału wyszukiwania. Dzięki tej właściwości w prosty sposób można zaprogramować kod wyszukujący wszystkie miejsca zerowe w zadanym przedziale. W testowym skrypcie zaprogramowano skwantyfikowane wyszukiwanie w przedziale  $\langle a, b \rangle$  co  $\Delta x$  w efekcie odnaleziono wszystkie miejsca zerowe równania nieliniowego, jak pokazano na Rys.6.



Rys. 6: Wyszukiwanie wszystkich miejsc zerowych

Statystykę wyszukiwania zestawiono w tabeli pokazanej poniżej.

Tab. 1: Statystyka wyszukiwania rozwiązania funkcji nieliniowej w przedziale  $\langle -2, 4 \rangle$  w skoku  $\Delta x = 0.2$  metodą **regula falsi**

Lp.	$x_k$	$n_{mini}$ i przedział	$n_{max}$ i przedział
1	-1.69	6 dla $\langle -1.6, -1.4 \rangle$	370 dla $\langle -0.4, -0.2 \rangle$
2	0.41	6 dla $\langle 0.2, 0.4 \rangle$	21 dla $\langle 0, 0.2 \rangle$
3	2.5	6 dla $\langle 2.6, 2.8 \rangle$	1591 dla $\langle 1, 1.2 \rangle$

### 3) Metoda siecznych

Stanowi modyfikację metody **regula falsi** w której prosta wykreślana jest na podstawie dwóch ostatnich przybliżeń. Stąd też podawane jako warunek początkowy, przedział poszukiwania  $\langle a, b \rangle$  jest implementowany jako dwa pierwsze przybliżenia rozwiązania równania nieliniowego. Algorytm metody nie wymaga już jak w wcześniejszych testowania znaków funkcji na granicach przedziału. Podobnie jak w metodzie **regula falsi**, można odnaleźć rozwiązanie poza początkowym przedziałem poszukiwania.

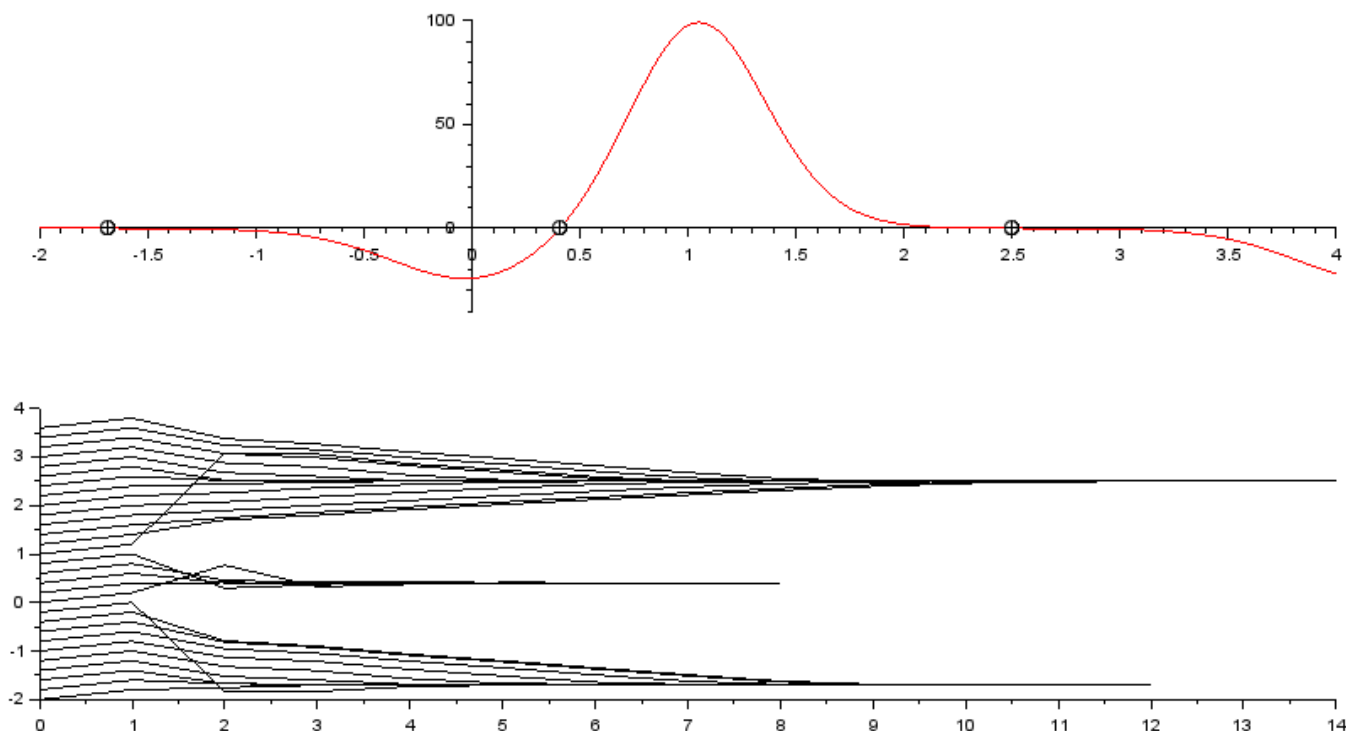
Algorytm metody siecznych składa się z trzy etapowego cyklu powtarzanego do czasu spełnienia warunku zbieżności  $\varepsilon$ .

- wyznaczenie kolejnego przybliżenia rozwiązania  $x_{k+1}$  na podstawie wcześniejszych dwóch przybliżeń  $x_{k-1}$  i  $x_k$
- dodanie wyznaczonego punktu do listy przybliżonych rozwiązań funkcji nieliniowej
- sprawdzenie warunku zbieżności  $f(x_{k+1}) \leq \varepsilon$ , dla warunku niespełnionego cykl jest powtarzany, a dla spełnionego  $x_{k+1}$  jest rozwiązaniem równania nieliniowego

Kolejne przybliżenie może być wyznaczane z poniższej zależności lub z równania (2) z metody **regula falsi**.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (3)$$

Na podstawie zapisanego powyżej algorytmu i zależności (3) opracowano skrypt wyznaczający miejsca zerowe przykładowej funkcji nieliniowej (1) w przedziale  $\langle -2, 4 \rangle$ . Wyniki symulacji zestawiono w postaci graficznej na Rys.7 i statystyki wyników w tabeli .



Rys. 7: Wyszukanie wszystkich miejsc zerowych metodą siecznych

Tab. 2: Statystyka wyszukiwania rozwiązania funkcji nieliniowej w przedziale  $\langle -2, 4 \rangle$  w skoku  $\Delta x = 0.2$  metodą **siecznych**

Lp.	$x_k$	$n_{mini}$ i przedział	$n_{max}$ i przedział
1	-1.69	4 dla $\langle -1.8, -1.6 \rangle$	11 dla $\langle -0.6, -0.4 \rangle$
2	0.41	4 dla $\langle 0.2, 0.4 \rangle$	7 dla $\langle 0, 0.2 \rangle$
3	2.5	4 dla $\langle 2.4, 2.6 \rangle$	13 dla $\langle 1.2, 1.4 \rangle$

Można zauważyć, że niezależnie od wyboru punktu startowego metoda jest zdecydowanie szybsza od omówionych wcześniej metod **bisekcji** i **regula falsi**. Po ustawieniu punktów granicznych poszukiwania rozwiązania  $\langle -2, 4 \rangle$  jako pierwszych przybliżeń odnajdywane jest pierwsze miejsce zerowe -1.69 po 7 krokach.

## 4) Metoda stycznych

Metoda **stycznych** w literaturze występuje także pod nazwą metody **Newtona-Raphsona**. Charakteryzuje się zbieżnością kwadratową. Rozwiązanie metodą stycznych równania nieliniowego w zadanym przedziale  $\langle a, b \rangle$  aby było zbieżne powinno spełniać poniższe warunki

- w przedziale poszukiwania musi posiadać dokładnie jedno rozwiązanie,
- ma różne znaki na krańcach przedziału  $f(a)f(b) < 0$ ,
- pierwsza i druga pochodna w zadanym przedziale mają stały znak.

W metodzie krzywa aproksymowana jest styczna w punkcie na krzywej określonym przez ostatnie przybliżenie rozwiązania. Kolejne jest zaś wyznaczone przez przecięcie prostej z osią  $Ox$ . Metoda ta charakteryzuje się tym że wymaga podania tylko jednego warunku brzegowego, pierwszego przybliżenia, którym może być np. początek przedziału poszukiwania rozwiązania. Punkt przecięcia prostej stycznej z osią  $Ox$  wyznaczany jest z zależności zapisanej poniżej.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (4)$$

Zależność (4) wymaga obliczenia pierwszej pochodnej funkcji nieliniowej w punkcie  $x_k$ . Po przekształceniach równanie opisujące pochodną funkcji testowej (1) przyjmuje postać zapisana poniżej.

$$f'(x) = 3 \cdot (\log(10) \cdot \cos(1.5 \cdot x) \cdot 10^{2 \cdot \sin(1.5 \cdot x)} + \log(5) \cdot \sin(1.5 \cdot x) \cdot 5^{2 \cdot \cos(1.5 \cdot x)}) \quad (5)$$

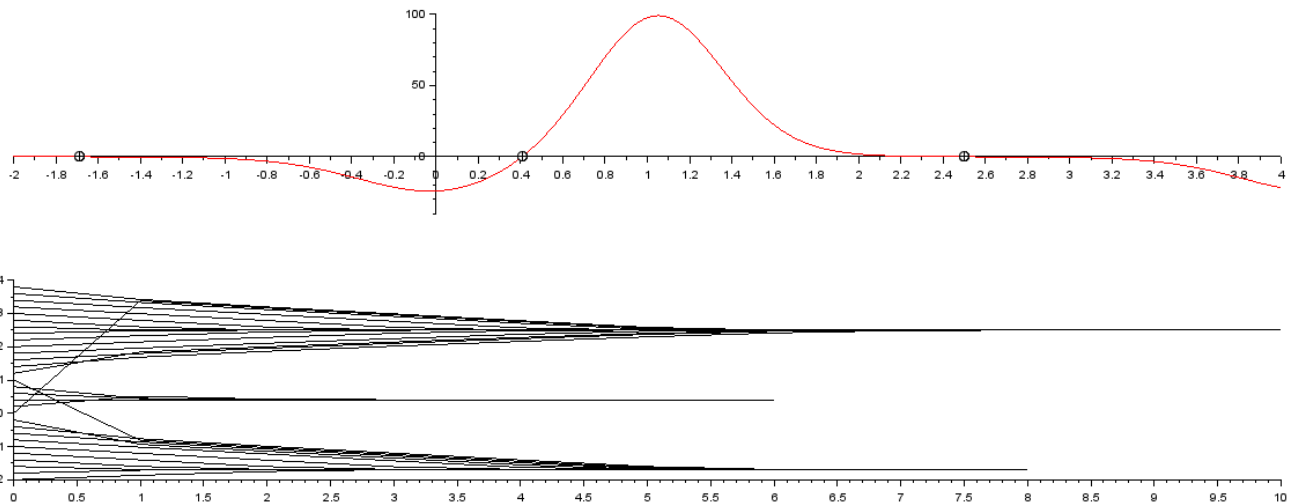
W środowisku **Scilab**'a dostępną jest funkcja pochodnej `deff()` zwracającą wektor przyrostowy dla tablicy wartości. Za jego pomocą można wyznaczyć wartość pochodnej funkcji w punkcie na podstawie podanej poniżej zależności.

```
dy=diff(funkcja(x))./diff(x);
```

gdzie `funkcja()` jest zdefiniowaną w kodzie funkcją z równanie nieliniowym, `x` jest tablicą zawierającą wartości zmiennej `x` w otoczeniu punktu  $x_k$  dla którego ma być liczona pochodna  $\langle x_k - \Delta x, x_k + \Delta x \rangle$ , a `dy` jest wektorem zawierającym wartości pochodnej funkcji w otoczeniu punkty  $x_k$ .

Dla obu metod obliczenia pochodnej funkcji uzyskano identyczne wyniki w przedziale poszukiwania rozwiązania  $\langle -2, 4 \rangle$ , skanując z krokiem  $\Delta x = 0.2$ , odnajdując wszystkie miejsca zerowe po minimum 4 a maksimum 10 krokach, jak pokazano na Rys.8. Można zauważyć mniejszy kąt nachylenia krzywej nieliniowej do osi  $Ox$  w pobliżu miejsca zerowego tym mniejszej dokładności pierwszego przybliżenia wymaga aby metoda była zbieżna do tego rozwiązania.

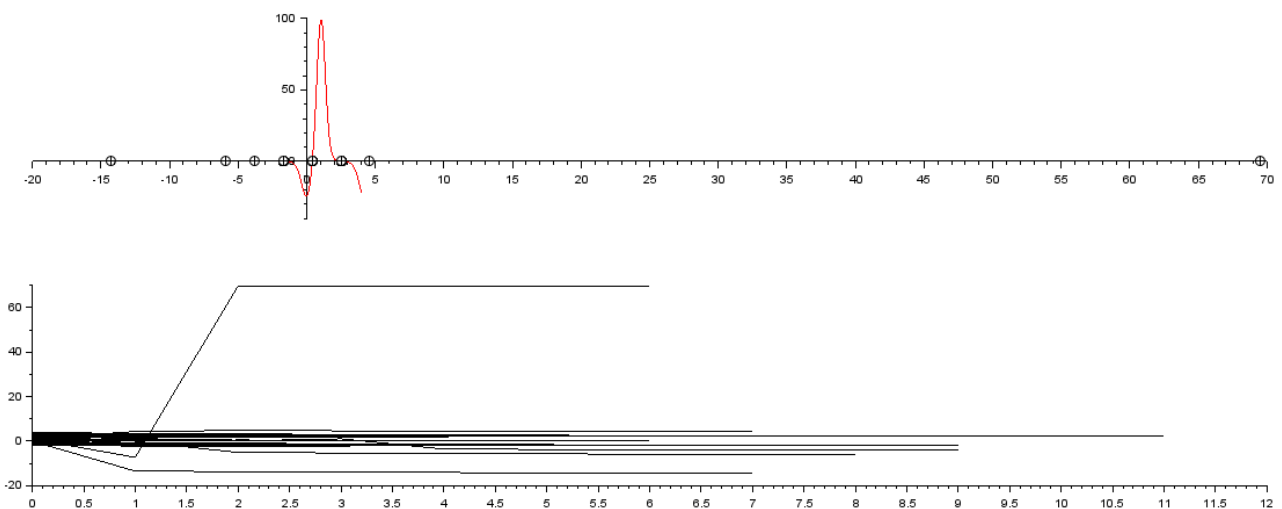




Rys. 8: Wyszukanie wszystkich miejsc zerowych metodą stycznych

W zależności o wartości pierwszego przybliżenia, punktu startowego metoda może odnaleźć:

- najbliższe miejsce zerowe,
  - inne miejsce zerowe z analizowanego przedziału,
  - miejsce zerowe spoza przedziału,
  - nie odnaleźć żadnego miejsca zerowego,
- , jak pokazano na Rys.9.



Rys. 9: Wyszukanie wszystkich miejsc zerowych metodą stycznych, także poza przedziałem poszukiwania

## 5) Metoda iteracji prostej

W metodzie **iteracji prostej** przybliżoną wartość rozwiązania równania nieliniowego  $f(x) = 0$  wyznacza się z zależności  $\hat{x}_k = g(x_{k-1})$  wyznaczonej poprzez przekształ-

cenie równania właściwego. Realizowane jest to na analogicznych zasadach jak przy metodzie iteracyjnej ogólnej stosowanej dla układów równań liniowych.

Warunkiem podstawowym jest występowanie w równaniu nieliniowym kilku (przynajmniej dwóch) członów z niewiadomą. Możliwe jest więc poprzez wyłączenie niewiadomej z każdego z tych członów uzyskać odpowiadającą mu postać równania iteracyjnego. Aby równanie iteracyjne mogło być zbieżne do rozwiązania równania nieliniowego musi spełniać poniższe warunki:

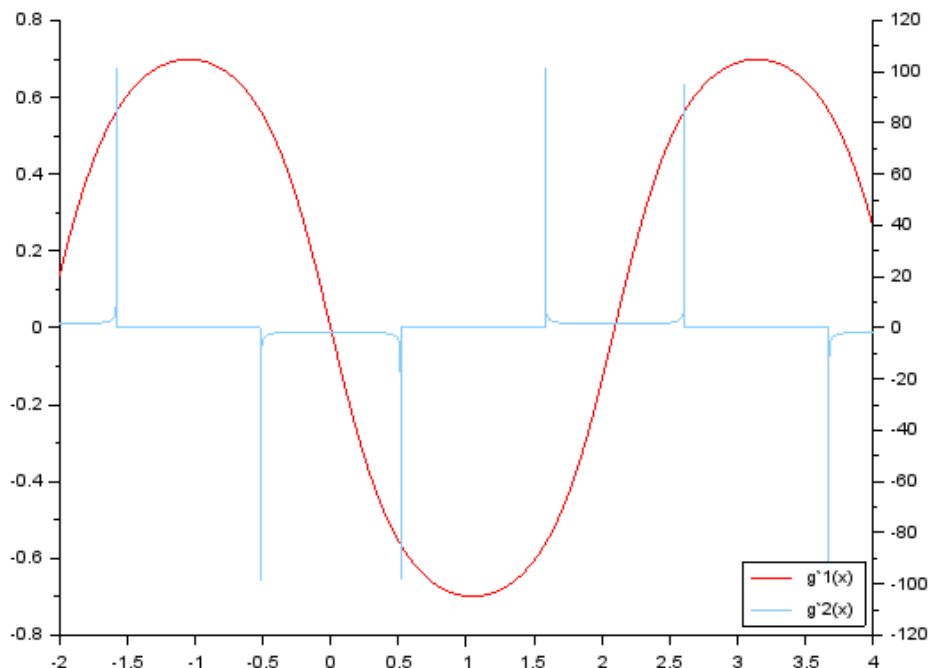
- $|g'(x)| < 1$
- $|g(x_{k+1}) - g(x_k)| < |g(x_k) - g(x_{k-1})|$

Dla przykładowego równania nieliniowego (1) można zapisać dwa równania iteracyjne, pokazane poniżej.

$$g_1(x) = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{asin} \left( \frac{1}{2} \log_{10} 5^{2 \cdot \cos(\frac{3}{2} \cdot x)} \right) \quad (6)$$

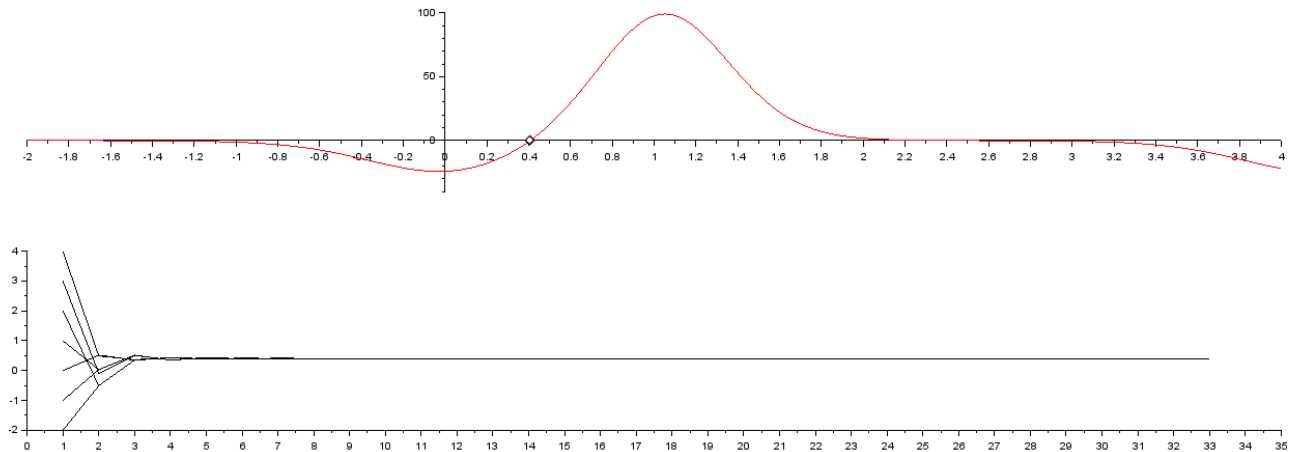
$$g_2(x) = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{acos} \left( \frac{1}{2} \log_5 10^{2 \cdot \sin(\frac{3}{2} \cdot x)} \right) \quad (7)$$

Dla obydwu równań iteracyjnych sprawdzono warunki zbieżności, pokazane na Rys.10, można zauważyć że warunek jest pełniony tylko dla równania  $g_1(x)$ .



Rys. 10: Przebieg zmian pierwszych pochodnych równań iteracyjnych  $g_1(x)$  i  $g_2(x)$

Przeprowadzona dla równania iteracyjnego (6) symulacja niezależnie od wartości pierwszego przybliżenia  $x_k$  zwraca to samo rozwiązanie o wartości 0.41 po około 31 krokach (liczba iteracji niemal identyczna dla każdego punktu startowego  $x_0$ ), jak pokazano na Rys.11.



Rys. 11: Wyszukanie wszystkich miejsc zerowych metodą iteracji prostej dla równania iteracyjnego  $g_1(x)$

Skuteczność metody **iteracji prostej** ściśle zależy od równania funkcji nieliniowej, zwracając jedno, kilka lub żadne miejsce zerowe (rozwiązanie). Metoda ta jest często implementowana w silniku obliczeniowym funkcji wyznaczających rozwiązanie równania i układów równań nieliniowych. W środowisku **Scilab**'a jest to funkcja `fsolve()`. Jej podstawowe wywołanie wymaga podania dwóch atrybutów, punktu startowego  $x_0$  i funkcji z deklaracją funkcji nieliniowej. Dla przykładowego równania nieliniowego (1) zwróciła ona dla tych samych warunków startowych co metoda iteracji prostej dwa miejsca zerowe  $x_1 \approx -1.69$  i  $x_2 \approx 2.5$ .

## Zadania

Na podstawie niniejszej instrukcji, wiadomości wykładowych i literaturowych wyznaczyć w oparciu o omówione metody i funkcję `fsolve()` miejsca zerowe równania nieliniowego spełniającego poniższe kryteria:

- równanie nieliniowe składające się z przynajmniej trzech członów różnego typu zawierającego zmienną
- poszczególne człony zawierają element:
  - funkcji trygonometrycznej ( $\sin, \cos, \tan, \dots$ )
  - funkcji potęgowej ( $x^n, n^x, e^x, \frac{1}{x}, \dots$ )
  - funkcji logarytmicznej ( $\log(x), \ln(x), \dots$ )
  - funkcji liniowej ( $nx, \dots$ )
  - stałej ( $n$ )

Opracowany dla każdej metody algorytm wyszukuje wszystkie miejsca zerowe w zadanym przedziale  $\langle a, b \rangle$ . Przedział poszukiwań dobrać tak aby umiejscowione w nim były trzy miejsca zerowe. Zaimplementować w algorytmie obliczeniowym kryteria zbieżności rozwiązania. Skrypt prezentuje wyniki w postaci:

- listy miejsc zerowych

- liczby iteracji po jakich odnaleziono dane rozwiązanie
- wykres przebiegu funkcji nieliniowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi
- wykresy zbieżności

## Bibliografia

- [1] B. Mochnacki E. Majchrzak. Metody numeryczne. Podstawy teoretyczne, aspekty praktyczne. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2004.
- [2] J. Povstenko. Wprowadzenie do metod numerycznych. Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2002.