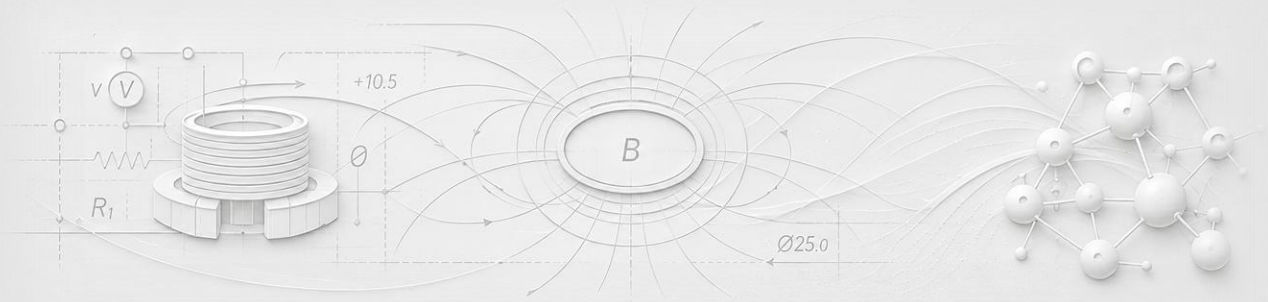
Metody numeryczne

dr inż. Michał Łanczont



Katedra Elektrotechniki i Technologii Nadprzewodnikowych

Informacje wstępne stacjonarne

01 **Wykłady**
2h co 2 tygodnie

02 **Zaliczenie**
Oceny:
Kolokwium
Laboratorium

03 **Laboratoria**
2h co 2 tygodnie

04 **Ocena**
Decyzja prowadzącego
Sprawozdania
Grupy 1 lub 2 osobowe

Informacje wstępne niestacjonarne

01 **Wykłady**
3h na 5 zjazdach

02 **Zaliczenie**
Oceny:
Kolokwium
Laboratorium

03 **Laboratoria**
3h na 5 zjazdach

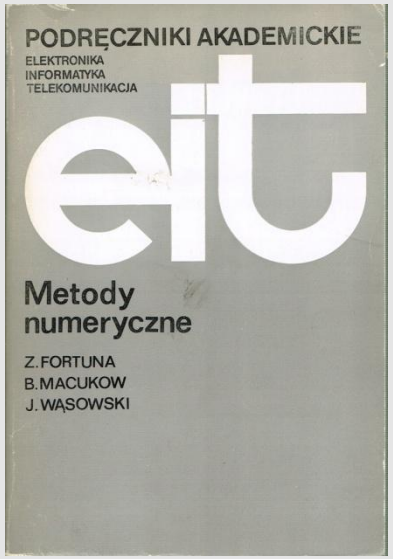
04 **Ocena**
Decyzja prowadzącego
Sprawozdania
Grupy 1 lub 2 osobowe

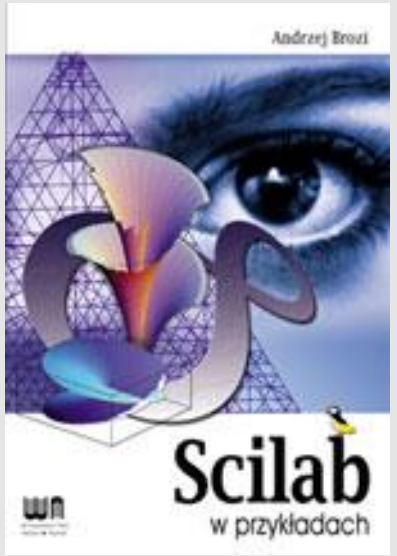
Kontakt

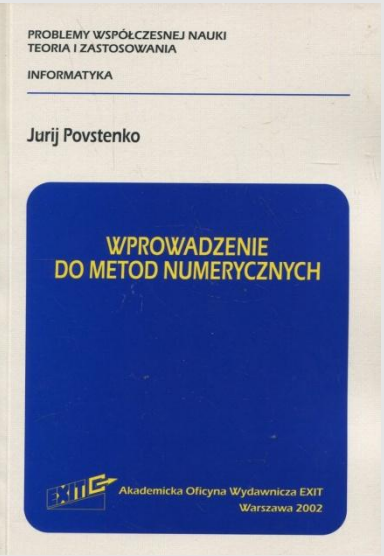
Pokój – 419
Laboratorium – 501 (RDZEWIAK)
m.lanczont@pollub.pl
http://lanczont.pollub.pl

- D. Kincaid, W. Chaney: *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa, 2006
- Z. Fortuna, B. Macukow, J. Wąsowski: *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa, 1998
- A. Brozi: *Scilab w przykładach*, Nakom, Poznań, 2007
- J. Povstenko: *Wprowadzenie do metod numerycznych*, EXIT, Warszawa, 2002



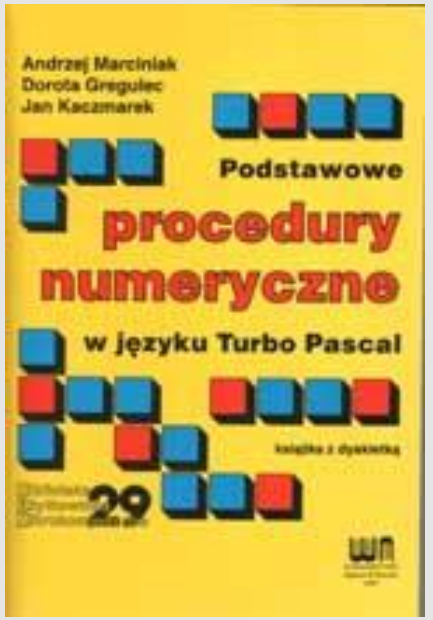


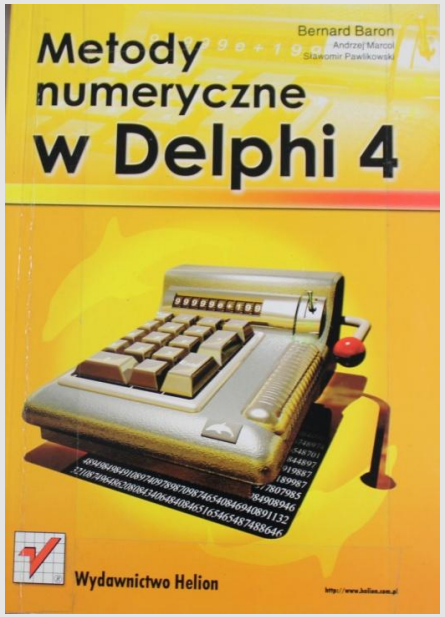




- A. Marciniak, D. Gregulec, J. Kaczmarek: *Podstawowe procedury numeryczne w języku Turbo Pascal*, Nakom, Poznań, 2000
- B. Baron, A. Marcol, S. Pawlikowski: *Metody numeryczne w Delphi 4*, Helion, Gliwice, 1999
- L. Jaroszynski, M. Łanczont: *Laboratorium Metod Numerycznych*, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin, 2014







Zakres materiału

1. Wprowadzenie do metod numerycznych, dokładność i wiarygodność obliczeń
2. Rachunek macierzowy i jego zastosowanie w analizie obwodów
3. Układy równań liniowych - metody bezpośrednie
4. Układy równań liniowych - metody iteracyjne
5. Numeryczne rozwiązywanie równań nieliniowych
6. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych
7. Numeryczne przetwarzanie danych

Część 1.



Wprowadzenie do metod numerycznych, dokładność i wiarygodność obliczeń

Podstawowe definicje

Metoda numeryczna jest uporządkowanym sposobem wyznaczania przybliżonego rozwiązania zadania matematycznego za pomocą skończonej liczby działań wykonywanych na liczbach.

Algorytm numeryczny jest jednoznacznym i skończonym opisem kolejnych operacji prowadzących od danych wejściowych do wyniku liczbowego.

Kompletny **algorytm** powinien określać także warunki dopuszczalności danych, sposób zakończenia obliczeń oraz sposób sprawdzenia wyniku.

Podstawowe definicje

Analiza numeryczna jest dziedziną zajmującą się konstruowaniem, badaniem i porównywaniem algorytmów numerycznych. Obejmuje analizę błędów, zbieżności, stabilności, uwarunkowania oraz kosztu obliczeniowego.



Metody numeryczne kiedy stosujemy?

- rozwiązanie analityczne nie istnieje w postaci zamkniętego wzoru;
- wzór analityczny istnieje, ale jego bezpośrednie użycie jest kosztowne, niewygodne albo niestabilne numerycznie;
- dane występują wyłącznie w postaci pomiarów lub próbek;
- model prowadzi do dużego układu równań;
- konieczne jest wielokrotne rozwiązywanie podobnych zadań dla zmiennych parametrów wejściowych;
- wynik ma zostać otrzymany z określoną, kontrolowaną dokładnością.

Środowisko obliczeniowe

Języki programowania

- Fortran
- C/C++, Pascal, Python, …

Środowiska obliczeniowe

- Matlab
- **Scilab**
- *OpenModelica*
- Mathematica



www.scilab.org

2026.1.0



Scilab jest środowiskiem przeznaczonym do obliczeń naukowych i inżynierskich. Umożliwia wykonywanie działań skalarnych i macierzowych, opracowywanie skryptów, tworzenie wykresów, rozwiązywanie zadań numerycznych oraz modelowanie układów dynamicznych w module **Xcos**.

Scilab 2026.1.0 Console

Plik Edycja Sterowanie Narzędzia ?

Przeglądarka plików

C:\Users\mlanc\Documents\

Nazwa

- Documents
  - ..
  - Arduino
  - Aslain_Modpack_Presets
  - Codex
  - Diablo III
  - Fritzing
  - HTML
  - KiCad
  - Moja muzyka
  - Moje obrazy
  - Moje wideo
  - My Cheat Tables
  - My Games
  - Niestandardowe szablony pakietu Office
  - PlatformIO
  - Visual Studio 2022

Filtr plików/katalogów

Scilab 2026.1.0 Console

```
Wykonanie rozruchu:
  ładowanie środowiska początkowego

-->
```

Przeglądarka zmiennych

Nazwa	Value	Typ	Widoczność	Memory

Historia poleceń

```
// -- 27/07/2026 17:21:36 -- //
  %i
  A
  A0
  A
// -- 22/08/2026 21:42:35 -- //
  format("e",16);
  mprintf("epsilon maszynowy = %.16e\n",%eps);
  mprintf("(1 + %%eps) - 1 = %.16e\n",(1+%eps)-1);
  mprintf("(1 + %%eps/2) - 1 = %.16e\n",(1+%eps/2)-1);
// -- 29/08/2026 19:23:24 -- //
```

News feed

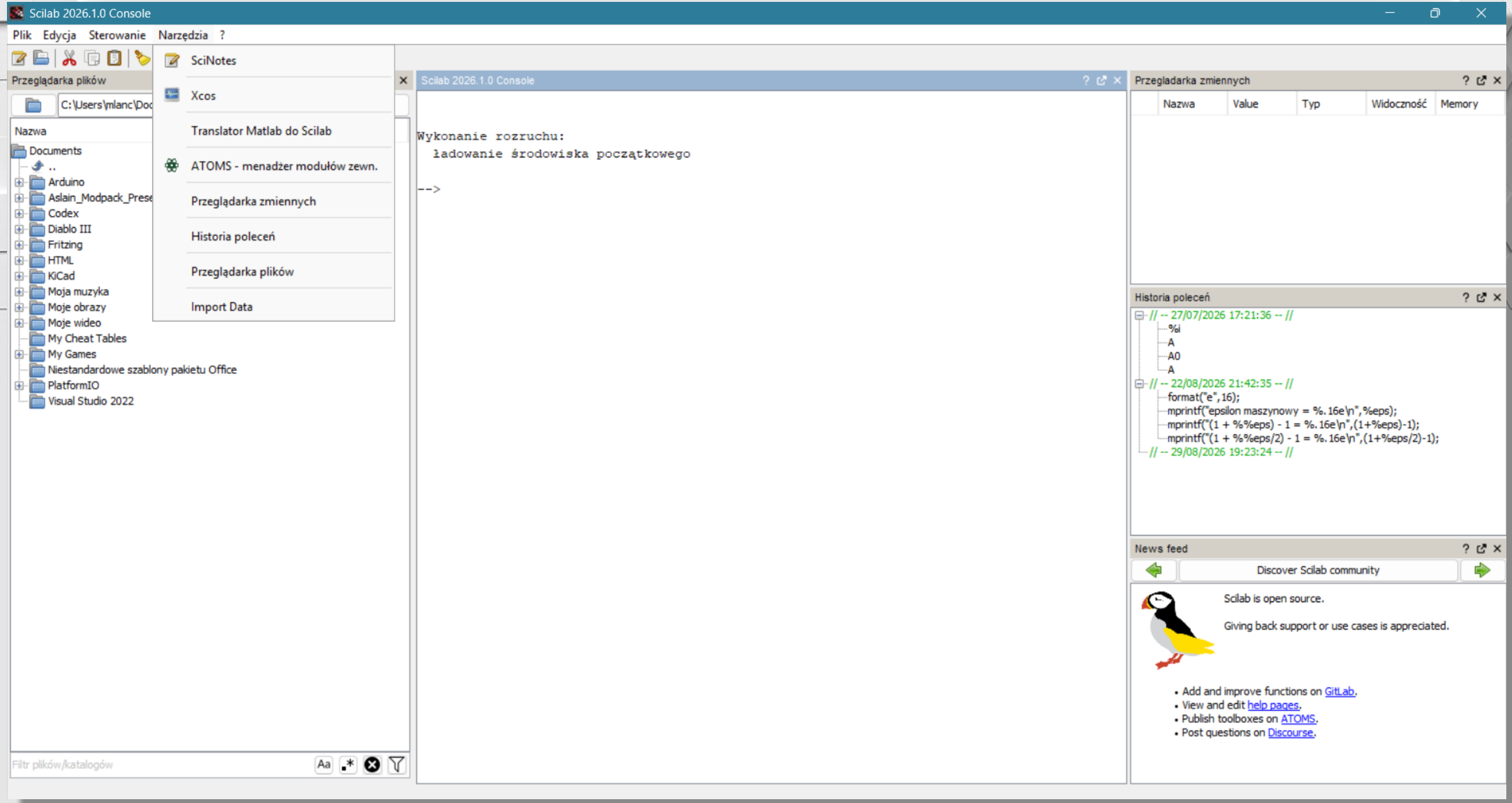
Discover Scilab community



Scilab is open source.

Giving back support or use cases is appreciated.

- Add and improve functions on GitLab.
- View and edit help pages.
- Publish toolboxes on ATOMS.
- Post questions on Discourse.


Scilab 2026.1.0 Console
Plik Edycja Sterowanie Narzędzia ?
SciNotes
Xcos
Translator Matlab do Scilab
ATOMS - menadżer modułów zewn.
Przeglądarka zmiennych
Historia poleceń
Przeglądarka plików
Import Data
Przeglądarka plików
C:\Users\mlanc\Doc
Nazwa
Documents
..
Arduino
Aslain_Modpack_Prese
Codex
Diablo III
Fritzing
HTML
KiCad
Moja muzyka
Moje obrazy
Moje wideo
My Cheat Tables
My Games
Niestandardowe szablony pakietu Office
PlatformIO
Visual Studio 2022
Filtr plików/katalogów
Aa
Scilab 2026.1.0 Console
Wykonanie rozruchu:
ładowanie środowiska początkowego
-->
Przegladarka zmiennych
Nazwa
Value
Typ
Widoczność
Memory
Historia poleceń
// -- 27/07/2026 17:21:36 -- //
%i
A
A0
A
// -- 22/08/2026 21:42:35 -- //
format("e",16);
mprintf("epsilon maszynowy = %.16e\n",%eps);
mprintf("(1 + %%eps) - 1 = %.16e\n",(1+%eps)-1);
mprintf("(1 + %%eps/2) - 1 = %.16e\n",(1+%eps/2)-1);
// -- 29/08/2026 19:23:24 -- //
News feed
Discover Scilab community
Scilab is open source.
Giving back support or use cases is appreciated.
• Add and improve functions on GitLab.
• View and edit help pages.
• Publish toolboxes on ATOMS.
• Post questions on Discourse.

szereg_sin2x_2.sce (D:\GoogleDrive\Wykłady\Metody numeryczne\Przykłady\sz...

Plik Edycja Format Ustawienia Okno Wykonaj ?

szereg_sin2x_2.sce (D:\GoogleDrive\Wykłady\Metody numeryczne\Przykłady\szereg_sin2x_2.sce) - SciNotes

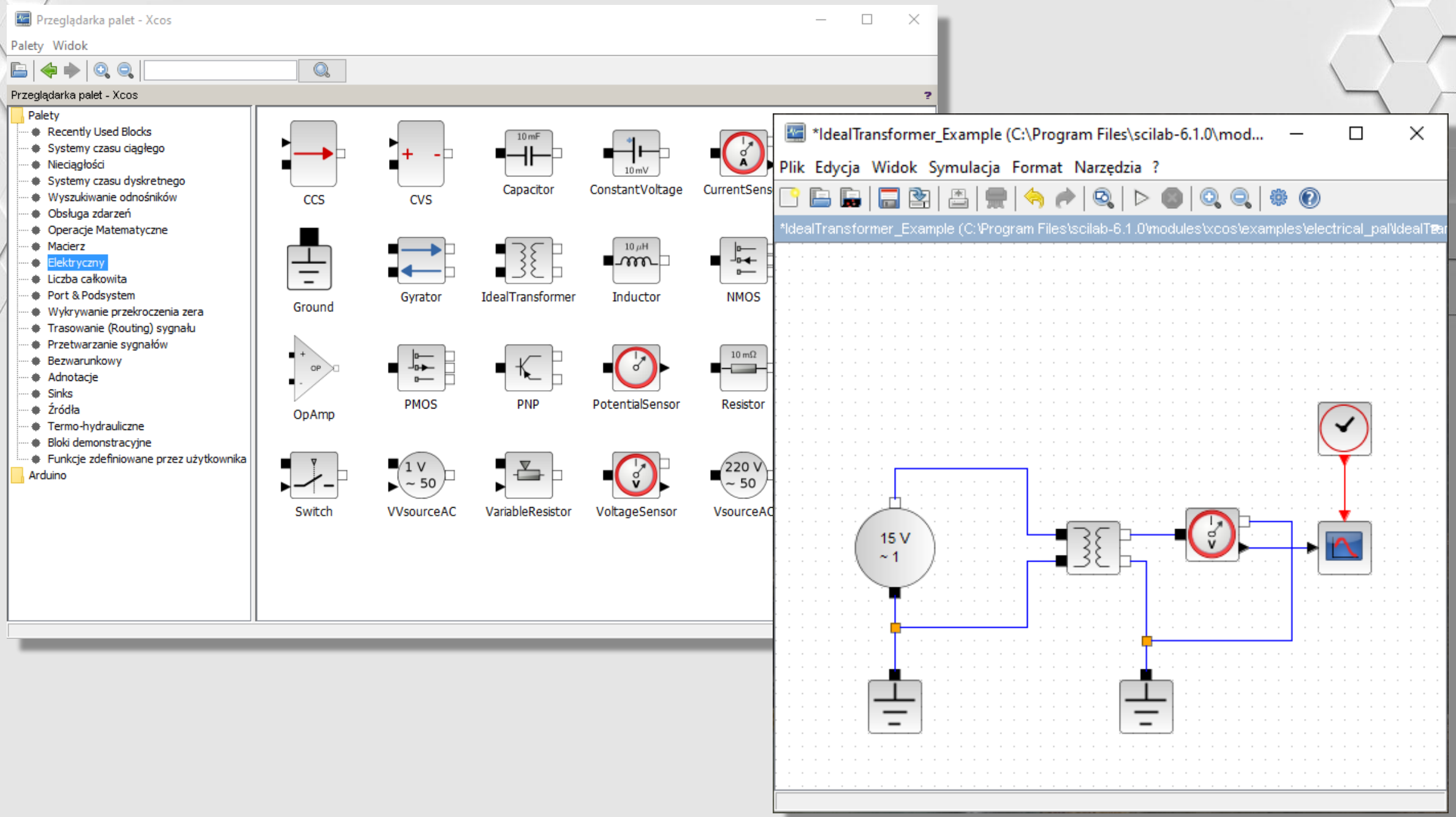
szereg_sin2x_2.sce

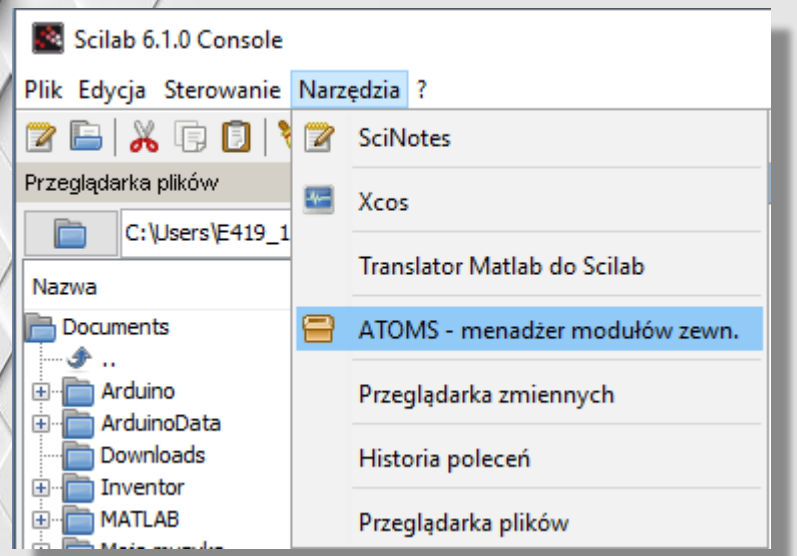
```
clear;
clc;
n=input('Podaj stopien przyblizenia: ');
k=1;

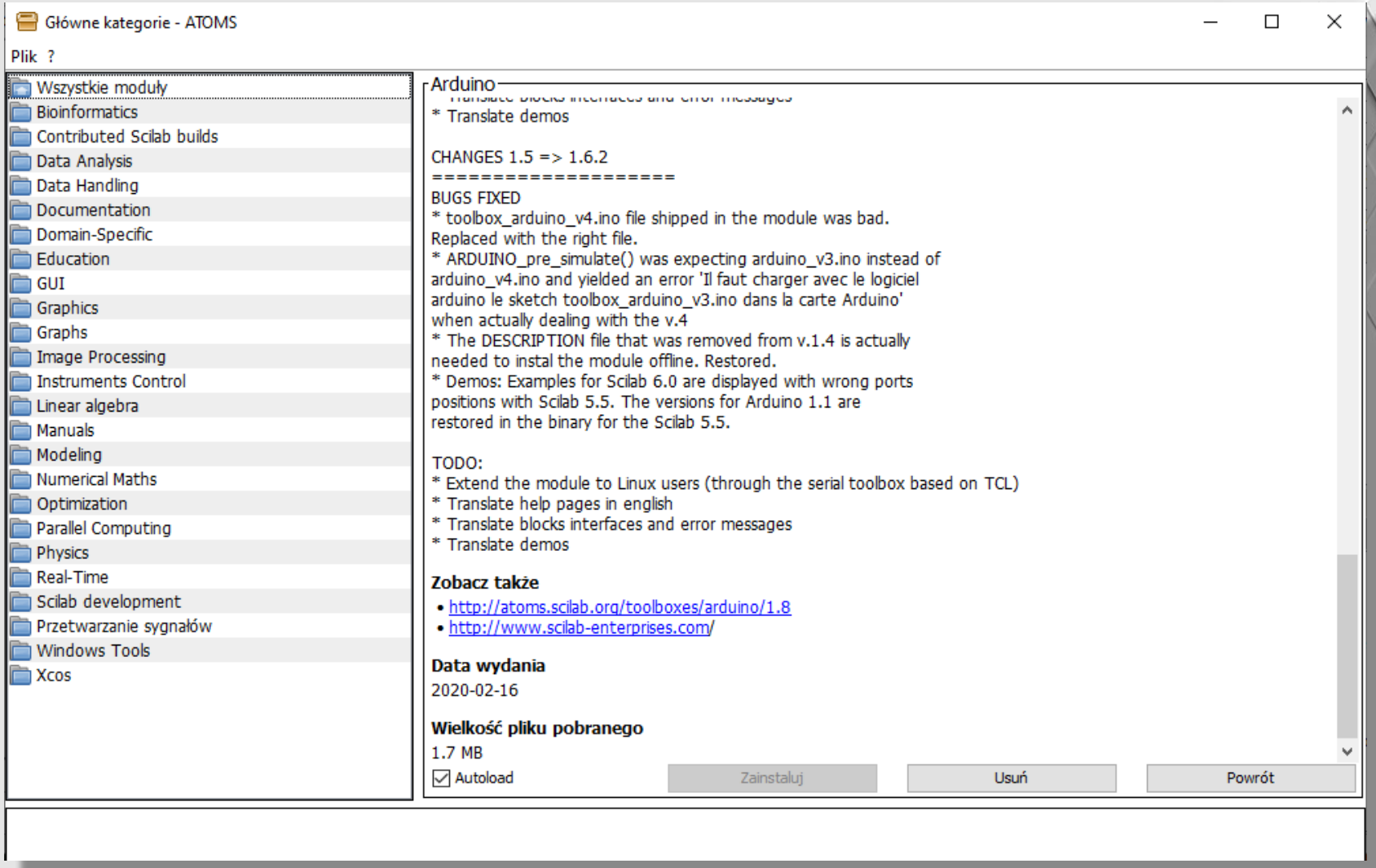
for i=1:1:1000
    x(i)=0;
end
for j=1:1:1000
    t(j)=((%pi)/1000)*(j-1);

    for i=0:1:n
        w=(((-1)^i)*(2^(2*i+1))*((t(j))^(2*i+1)))/(prod(1:2*i+1));
        x(j)=x(j)+w;
    end
end
plot2d(t,x,);
ster_axe=gca();
ster_axe.x_location="origin";
ster_axe.y_location="origin";

```


Przeglądarka palet - Xcos
Palety Widok
Przeglądarka palet - Xcos
Palety
Recently Used Blocks
Systemy czasu ciągłego
Nieciągłości
Systemy czasu dyskretnego
Wyszukiwanie odnośników
Obsługa zdarzeń
Operacje Matematyczne
Macierz
Elektryczny
Liczba całkowita
Port & Podsystem
Wykrywanie przekroczenia zera
Trasowanie (Routing) sygnału
Przetwarzanie sygnałów
Bezwarunkowy
Adnotacje
Sinks
Źródła
Termo-hydrauliczne
Bloki demonstracyjne
Funkcje zdefiniowane przez użytkownika
Arduino
CCS
CVS
Capacitor
ConstantVoltage
Ground
Gyrator
IdealTransformer
Inductor
NMOS
OpAmp
PMOS
PNP
PotentialSensor
Resistor
Switch
VVsourceAC
VariableResistor
VoltageSensor
VsourceAC
*IdealTransformer_Example (C:\Program Files\scilab-6.1.0\mod...
Plik Edycja Widok Symulacja Format Narzędzia ?
*IdealTransformer_Example (C:\Program Files\scilab-6.1.0\modules\xcos\examples\electrical_pal\IdealTr
15 V
~ 1


Scilab 6.1.0 Console
Plik Edycja Sterowanie Narzędzia ?
SciNotes
Xcos
Translator Matlab do Scilab
ATOMS - menadżer modułów zewn.
Przeglądarka zmiennych
Historia poleceń
Przeglądarka plików
Przeglądarka plików
C:\Users\E419_1
Nazwa
Documents
..
Arduino
ArduinoData
Downloads
Inventor
MATLAB


Główne kategorie - ATOMS
Plik ?
Wszystkie moduły
Bioinformatics
Contributed Scilab builds
Data Analysis
Data Handling
Documentation
Domain-Specific
Education
GUI
Graphics
Graphs
Image Processing
Instruments Control
Linear algebra
Manuals
Modeling
Numerical Maths
Optimization
Parallel Computing
Physics
Real-Time
Scilab development
Przetwarzanie sygnałów
Windows Tools
Xcos
Arduino
* Translate demos
CHANGES 1.5 => 1.6.2
BUGS FIXED
* toolbox_arduino_v4.ino file shipped in the module was bad.
Replaced with the right file.
* ARDUINO_pre_simulate() was expecting arduino_v3.ino instead of
arduino_v4.ino and yielded an error 'Il faut charger avec le logiciel
arduino le sketch toolbox_arduino_v3.ino dans la carte Arduino'
when actually dealing with the v.4
* The DESCRIPTION file that was removed from v.1.4 is actually
needed to instal the module offline. Restored.
* Demos: Examples for Scilab 6.0 are displayed with wrong ports
positions with Scilab 5.5. The versions for Arduino 1.1 are
restored in the binary for the Scilab 5.5.
TODO:
* Extend the module to Linux users (through the serial toolbox based on TCL)
* Translate help pages in english
* Translate blocks interfaces and error messages
* Translate demos
Zobacz także
http://atoms.scilab.org/toolboxes/arduino/1.8
http://www.scilab-enterprises.com/
Data wydania
2020-02-16
Wielkość pliku pobranego
1.7 MB
Autoload
Zainstaluj
Usuń
Powrót

Skrypt obliczeniowy powinien być odtwarzalny. Oznacza to, że musi zawierać definicję danych, obliczenia, miarę jakości wyniku i prezentację wniosków. Sam zrzut okna programu nie jest wystarczającym objaśnieniem metody.

```
clear; clc;
    // Dane wejściowe
U = 230;
R = 46;
    // Obliczenie
P = U^2/R;
    // Prezentacja wyniku z jednostką
mprintf("P = %.6f W\n", P);
```

Liczba wyświetlonych cyfr nie jest informacją o dokładności fizycznej. Jeżeli *U* i *R* są znane z dokładnością do jednego procenta, wydruk kilkunastu cyfr wartości *P* nie czyni wyniku dokładniejszym.

Znaczenie analizy numerycznej

Betonowa konstrukcja podstawy **Sleipner A** zatonęła **23 sierpnia 1991 r. podczas próbnego balastowania w Gandsfjorden koło Stavanger,** a więc jeszcze przed ustawieniem platformy na docelowym miejscu na Morzu Północnym. Nie było ofiar.

Straty szacowano na około 700 mln–1 mld USD.

Przyczyną katastrofy były błędy na etapie analizy MES i wynikał z błędów popełnionych przy:

- **dyskretyzacji**
- **jakości siatki MES**
- **błędu rozwiązania**
- **weryfikacji wyników numerycznych**



Znaczenie analizy numerycznej

Tragedia w Dhahran w Arabii Saudyjskiej

Katastrofa wydarzyła się 25 lutego 1991 r.
Pocisk Scud uderzył w koszary wojsk amerykańskich;
zginęło 28 żołnierzy.

System przechowywał czas z ograniczoną precyzją.
Po około 100 godzinach błąd wynosił według GAO
dokładnie około 0,3433 s, co przy prędkości Scuda
odpowiadało przesunięciu przewidywanej pozycji o
około 687 m.

Katastrofa wynikła z błędów reprezentacji i kumulowania błędów zaokrągleń.

Gotowa poprawka systemu dotarła dzień po tragedii.



Znaczenie analizy numerycznej

4 czerwca 1996 r., około 40 s po rozpoczęciu lotu, **Ariane 5 Flight 501** utraciła prawidłowe dane z systemu bezwładnościowego.

Bezpośrednim źródłem problemu była konwersja 64-bitowej liczby zmiennoprzecinkowej do 16-bitowej liczby całkowitej ze znakiem. Wartość nie mieściła się w zakresie typu docelowego, co wywołało wyjątek.

Straty szacowane na ok. 370 mln USD, plus ładunek na nawet ok. 500 mnl USD.

Katastrofa wynikła z:

- **przepełnienia,**
- **zakresu reprezentacji,**
- **obsługi błędów.**



Znaczenie analizy numerycznej

Indeks giełdy w Vancouver rozpoczął w 1982 r. od wartości **1000,000**.

Był przeliczany tysiące razy dziennie. Po każdej operacji wynik był **obcinany do trzech miejsc po przecinku zamiast prawidłowo zaokrąglany**. Każdy pojedynczy błąd był minimalny, ale zawsze miał ten sam znak, więc błędy systematycznie się akumulowały.

W listopadzie 1983 r. indeks wynosił **524,811**; po ponownym przeliczeniu poprawną metodą otrzymano **1098,892**.

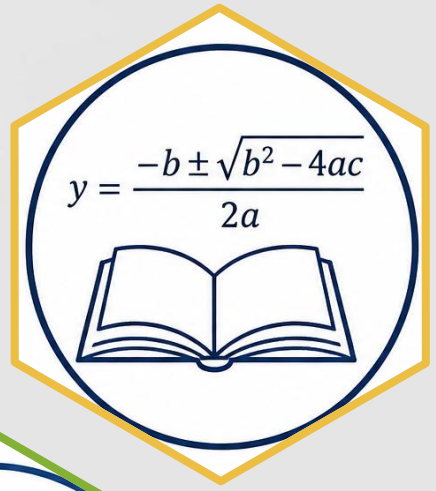
Problem wynikał z:

- **małego błędu** pojedynczej operacji
- **bardzo duża** liczba iteracji
- **ogromny błąd** końcowy.

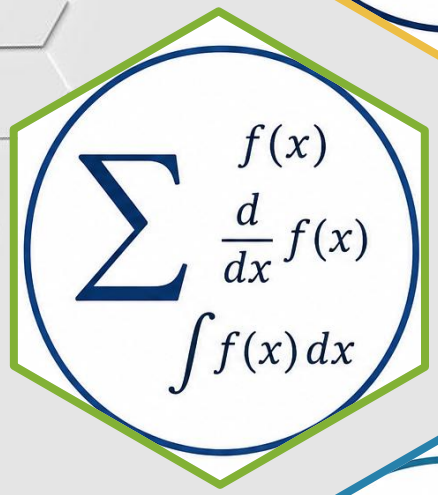


Typowe zadania obejmują rozwiązywanie:

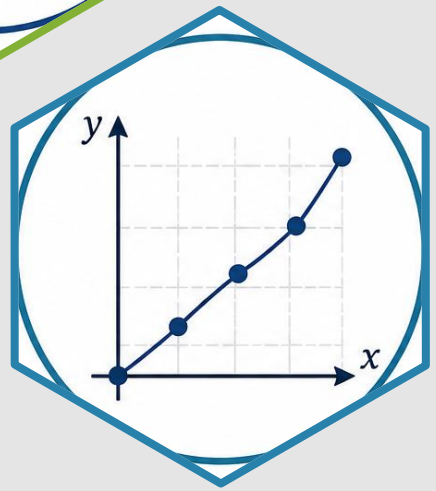
1. układów równań liniowych i nieliniowych,
2. wyznaczanie wartości i wektorów własnych,
3. interpolację i aproksymację,
4. różniczkowanie i całkowanie numeryczne
5. rozwiązywanie równań różniczkowych.



Rozwiązanie **analityczne** jest opisane dokładnym wzorem wynikającym z przekształceń matematycznych, na przykład: x = √2.



Obliczenia **symboliczne** działają na symbolach i wyrażeniach, zachowując zależności matematyczne, na przykład: ∫ 2x dx = x2 + C.



Obliczenia **numeryczne** działają bezpośrednio na reprezentacjach liczb i zwracają wartość liczbową, na przykład: √2 ≈ 1,41421356237.

Rozwiązanie **analityczne** nie jest automatycznie najlepszą podstawą algorytmu. Matematycznie równoważne wzory mogą różnić się odpornością na błędy zaokrągleń.

Przykładowo pierwiastki równania kwadratowego:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

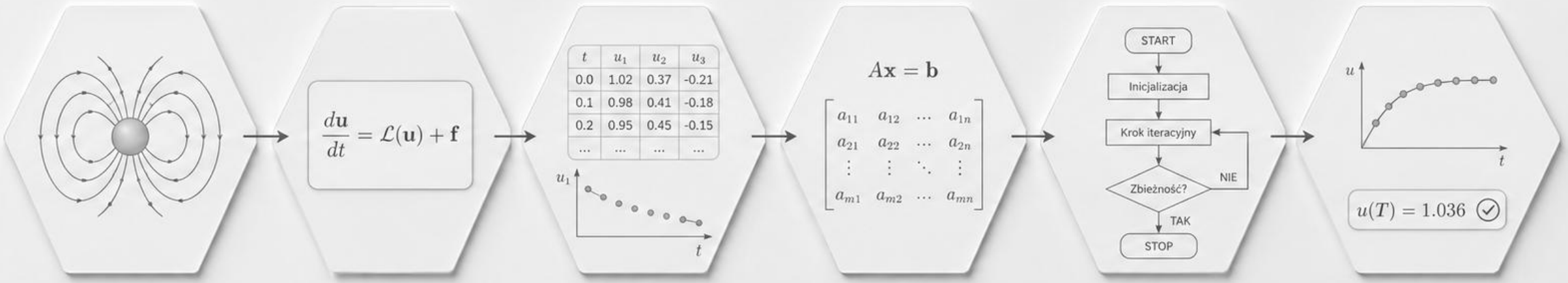
można zapisać jako

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jeżeli $b^2 \gg 4ac$ i odejmowane są liczby o zbliżonych wartościach, jedna z gałęzi wzoru może tracić cyfry znaczące. Postać korzystniejszą numerycznie uzyskuje się przez wyznaczenie jednego pierwiastka bez niekorzystnego odejmowania, a drugiego z zależności

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Łańcuch prowadzący do wyniku



Na każdym etapie mogą powstać inne rodzaje rozbieżności.

Dobry model może zostać rozwiązany niedokładnie z powodu niewłaściwego algorytmu lub zbyt luźnego kryterium zakończenia.

Algorytm przybliżony i tolerancja

Wiele metod wyznacza ciąg przybliżeń

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$$

który przy odpowiednich założeniach dąży do rozwiązania dokładnego x. W praktyce obliczenia kończy się po skończonej liczbie kroków.

Trzeba więc ustalić:

- punkt początkowy $\mathbf{x^{(0)}}$;
- wzór przejścia od bieżącego przybliżenia do następnego;
- miarę jakości przybliżenia $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right|$;
- tolerancję - *Jak dokładnego wyniku potrzebujemy?*;
- maksymalną liczbę iteracji;
- sposób zgłoszenia braku zbieżności.

Przykłady algorytmu obliczeniowego

Metoda babilońska obliczania pierwiastka n'tego stopnia

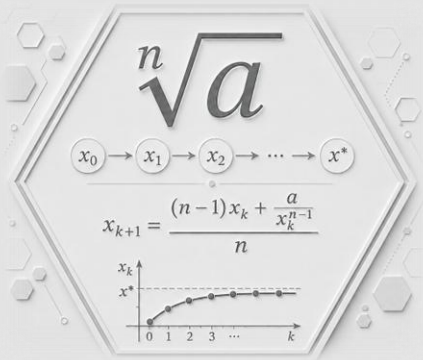
Wyznaczając: $x = \sqrt[n]{a}$,

Poszukuje się rozwiązania równania:

$$f(x) = x^n - a = 0$$

Z metody Newtona:

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} - \frac{f\left(x_{(k)}\right)}{f'\left(x_{(k)}\right)}$$



Ponieważ:

$$f'(x_{(k)}) = nx^{n-1}$$

otrzymuje się

$$x_{(k+1)} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_{(k)} + \frac{a}{x_{(k)}^{n-1}}\right]$$

$x = \sqrt{10}$

$$x_{(k+1)} = \frac{1}{2}\left[x_{(k)} + \frac{a}{x_{(k)}}\right]$$

Dla $x_{(0)} = 3$

$$x_{(1)} = \frac{1}{2}\left[3 + \frac{10}{3}\right] \approx 3.167$$

$$x_{(2)} = \frac{1}{2}\left[3.167 + \frac{10}{3.167}\right] \approx 3,162$$

$x = \sqrt[3]{10}$

$$x_{(k+1)} = \frac{1}{3}\left[2x_{(k)} + \frac{a}{x_{(k)}^2}\right]$$

Dla $x_{(0)} = 2$

$$x_{(1)} = \frac{1}{3}\left[4 + \frac{10}{4}\right] \approx 2.167$$

$$x_{(2)} = \frac{1}{3}\left[2 \cdot 2.167 + \frac{10}{2.167^2}\right] \approx 2.154$$

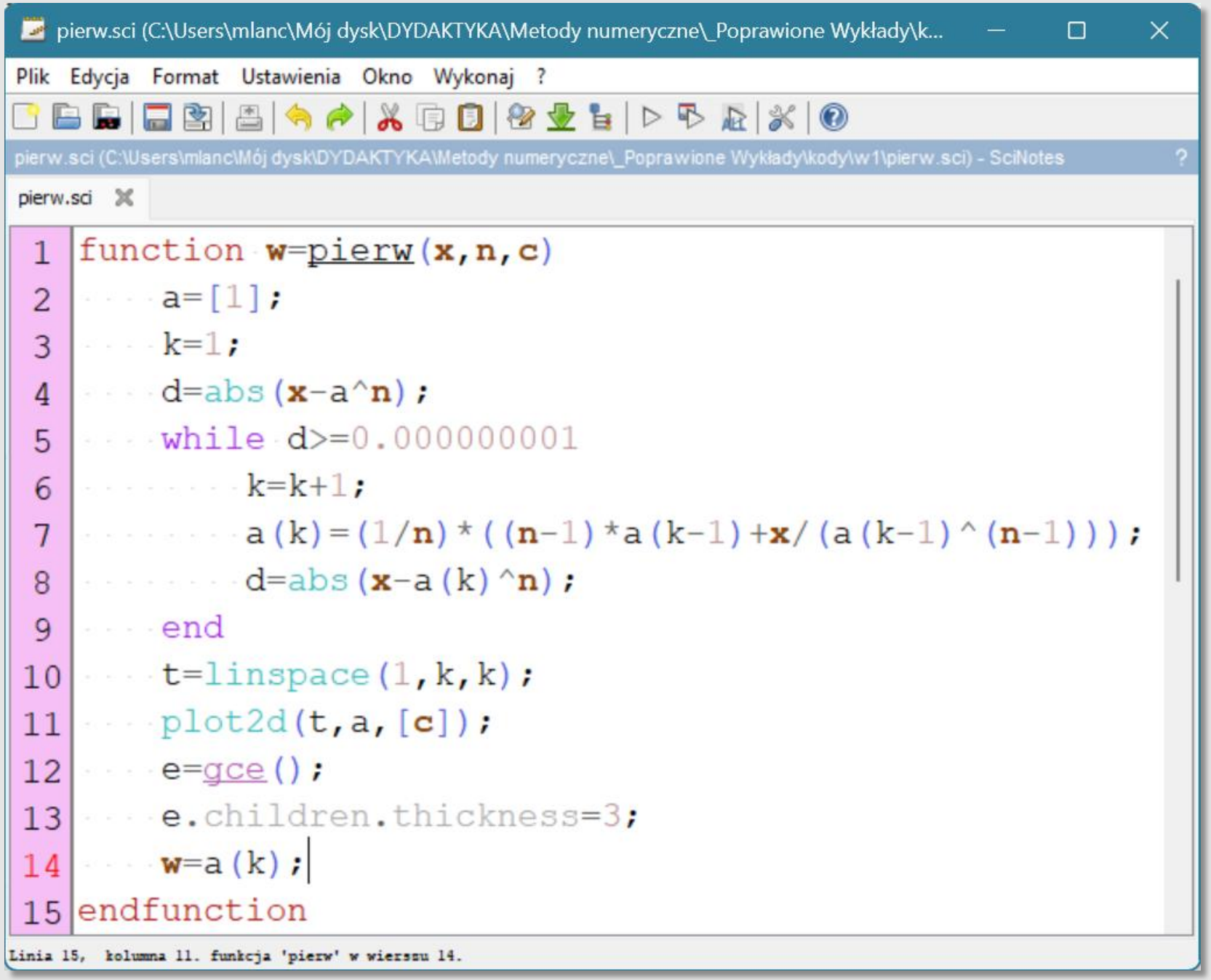
pierw.sci (C:\Users\mlanc\Mój dysk\DYDAKTYKA\Metody numeryczne_Poprawione Wykłady\kody\w1\pierw.sci) - SciNotes

Plik Edycja Format Ustawienia Okno Wykonaj ?

pierw.sci (C:\Users\mlanc\Mój dysk\DYDAKTYKA\Metody numeryczne_Poprawione Wykłady\kody\w1\pierw.sci) - SciNotes

*pierw.sci

```
1  clear; clc; clf
1  function w=pierw(x,n,c)
2
3  endfunction
5  disp('Program liczy wartość pierwiastka n-tego stopnia liczby x');
6  nazwa=['1'];
7  kolor=[1];
8  wynik=[0];
9  for i=1:5;
10     X=input('X=');
11     A=input('wykladnik A=');
12     wynik(i)=pierw(X,A,i);
13     nazwa(i)='Pierwiastek '+ string(A) + '-stopnia liczby ' + string(X)
    + ' = ' + string(wynik(i));
14     kolor(i) = i;
15 end
16 legend(nazwa);
17 disp(nazwa);
```


pierw.sci (C:\Users\mlanc\Mój dysk\DYDAKTYKA\Metody numeryczne_Poprawione Wykłady\k...
Plik Edycja Format Ustawienia Okno Wykonaj ?
pierw.sci (C:\Users\mlanc\Mój dysk\DYDAKTYKA\Metody numeryczne_Poprawione Wykłady\kody\w1\pierw.sci) - SciNotes
pierw.sci
1 function w=pierw(x,n,c)
2 a=[1];
3 k=1;
4 d=abs(x-a^n);
5 while d>=0.000000001
6 k=k+1;
7 a(k)=(1/n)*((n-1)*a(k-1)+x/(a(k-1)^(n-1)));
8 d=abs(x-a(k)^n);
9 end
10 t=linspace(1,k,k);
11 plot2d(t,a,[c]);
12 e=gce();
13 e.children.thickness=3;
14 w=a(k);
15 endfunction
Linia 15, kolumna 11. funkcja 'pierw' w wierszu 14.

Scilab 2026.1.0 Console

```
  "Program liczy wartość pierwiastka n-tego stopnia liczby x"
X=10

wykladnik A=3

X=25

wykladnik A=4

X=36

wykladnik A=2

X=125

wykladnik A=3

X=512

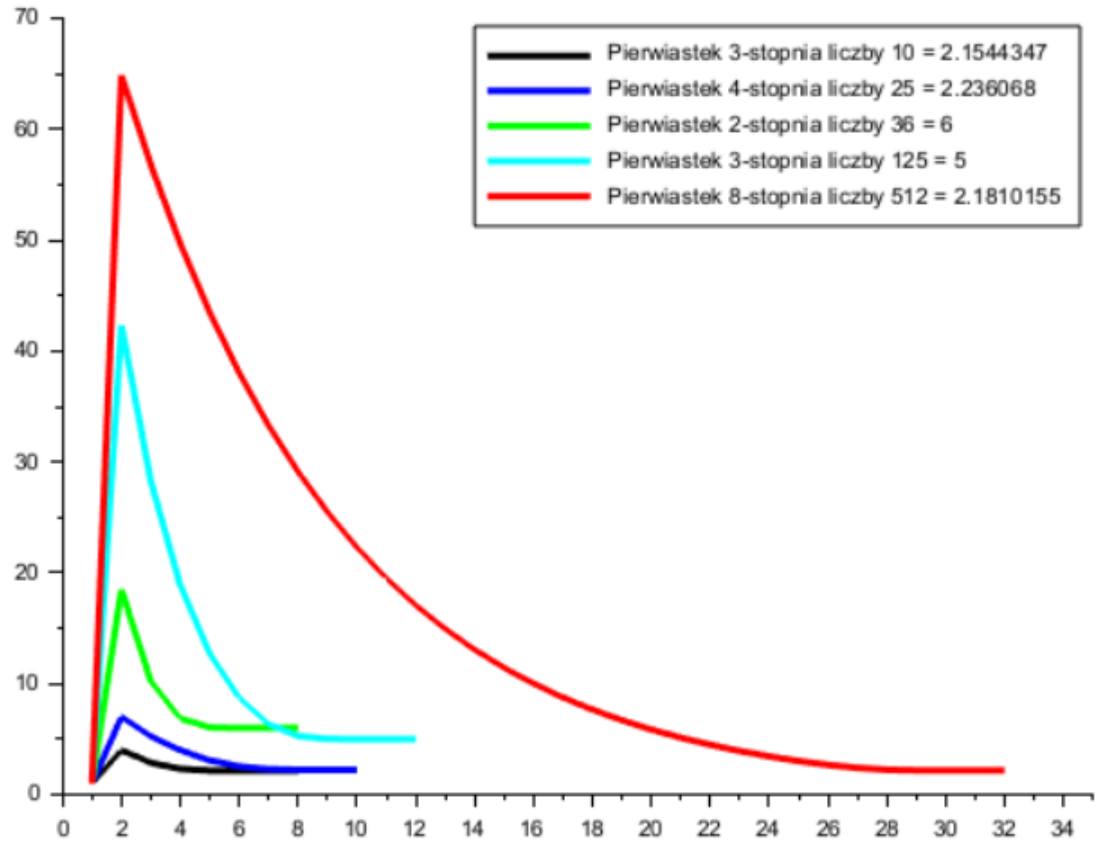
wykladnik A=8

  "Pierwiastek 3-stopnia liczby 10 = 2.1544347"
  "Pierwiastek 4-stopnia liczby 25 = 2.236068"
  "Pierwiastek 2-stopnia liczby 36 = 6"
  "Pierwiastek 3-stopnia liczby 125 = 5"
  "Pierwiastek 8-stopnia liczby 512 = 2.1810155"
```

Okno graficzne numer 0

Plik Narzędzia Edycja ?

Okno graficzne numer 0 ?



Wzór Taylora służy do przedstawienia wartości funkcji w otoczeniu pewnego punktu x_0 za pomocą **wielomianu oraz składnika określającego błąd przybliżenia.**

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

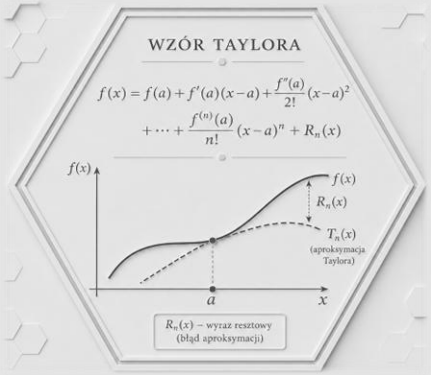
Wielomian Taylora

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Reszta Lagrange'a

, gdzie ξ jest pewnym punktem znajdującym się między x_0 i x.

Pozwala **zastępować trudną funkcję lub zależność prostszym wielomianem oraz kontrolować błąd tego przybliżenia.**



W odniesieniu do **wzoru Taylora** rozpatruje się trzy pojęcia:

- **wielomian Taylora** służy do **obliczania przybliżenia,**

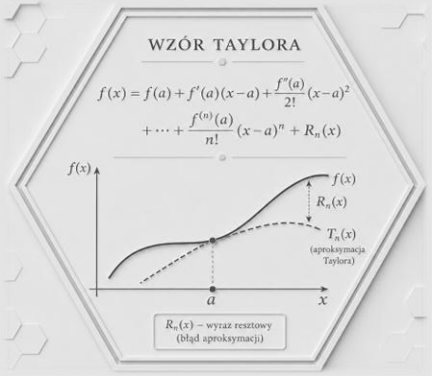
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

- **wzór Taylora** służy do **oceny błędu tego przybliżenia,**

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

- **szereg Taylora** służy do **teoretycznego przedstawienia funkcji jako nieskończonego rozwinięcia.**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$



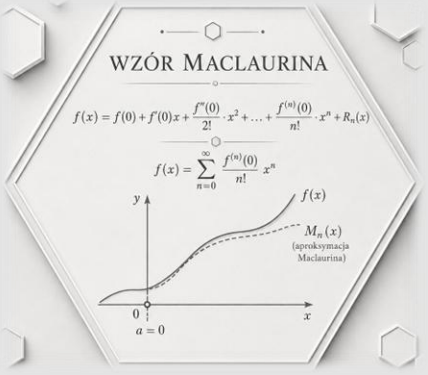
Szczególny przypadek (uproszczonej postaci) **wzoru Taylora** przy $x_0=0$ – **wzór Maclaurina.**

$$f(x) = M_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Wielomian Maclaurina $$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Szereg Maclaurina $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Ma to duże znaczenie numeryczne, ponieważ działania na wielomianach – dodawanie i mnożenie – są dla komputera znacznie prostsze niż bezpośrednie operowanie abstrakcyjnymi funkcjami typu $\sin(x)$, e^x czy $\ln(x)$.



Najważniejsze zastosowania wzoru Taylora:

- **Przybliżanie wartości funkcji** w otoczeniu znanego punktu
- **Szacowanie błędu przybliżenia** dzięki reszcie Taylora. Możemy więc określić, ile wyrazów szeregu trzeba użyć, aby osiągnąć zadaną dokładność.
- **Wyprowadzanie wzorów różniczkowania numerycznego.**
- **Wyprowadzanie wzorów całkowania numerycznego,** np. metod Newtona-Cotesa. Wielomian aproksymujący funkcję jest łatwy do scałkowania.
- **Budowa metod rozwiązywania równań nieliniowych.** Metoda Newtona wynika z liniowego przybliżenia Taylora:
- **Rozwiązywanie równań różniczkowych.** Metody Eulera i Rungego-Kutty można interpretować przez odpowiednie przybliżenia wynikające z rozwinięcia Taylora.
- **Analiza dokładności metod numerycznych.**

Przykład: rozwinięcie funkcji

Dla funkcji: $f(x) = sin(2x)$

Kolejne pochodne mają postać:

$$f'(x) = 2cos(2x)$$

$$f''(x) = -4sin(2x)$$

$$f'''(x) = -8cos(2x)$$

$$f^{(4)}(x) = 16sin(2x)$$

$$f^{(5)}(x) = 32cos(2x)$$

$$f^{(6)}(x) = -64sin(2x)$$

$$f^{(7)}(x) = -128cos(2x)$$

Przykład: rozwinięcie funkcji

Dla funkcji $f(x) = sin(2x)$ i $x_0 = 0$

Kolejne pochodne przyjmują wartości:

$f'(x_0) = 2cos(0) = 2$

$f'''(x_0) = -8cos(0) = -8$

$f^{(5)}(x_0) = 32cos(0) = 32$

$f^{(7)}(x_0) = -128cos(0) = -128$

Rozwinięcie w szereg Maclaurina:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{7} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + 2x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{32}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{128}{7!}x^7$$

$$sin(2x) = 2x - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{32}{5!}x^5 - \frac{128}{7!}x^7$$

Przykład: rozwinięcie funkcji

Dla funkcji $\boldsymbol{f(x) = sin(2x)}$, $\boldsymbol{x_0 = 0}$ i $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6}}$

$$sin(2x) = 2x - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{32}{5!}x^5 - \frac{128}{7!}x^7$$

stopień	przybliżenie	błąd
1	1,047197551	0,19139677
3	0,855800782	0,010494502
5	0,866295284	0,000274012
7	0,866021272	4,17344E-06

$$sin(2x) = 0{,}866025404$$

Reprezentacja liczb

System pozycyjny to sposób zapisu liczb, w którym wartość danej cyfry zależy od jej położenia w zapisie liczby oraz od podstawy systemu.

Postać zmiennoprzecinkowa (zmiennopozycyjna) to sposób reprezentacji liczby w systemie pozycyjnym, w którym położenie przecinka jest określane przez wykładnik potęgi podstawy systemu.

Niezerowa liczba zmiennoprzecinkowa ma postać:

$$x = (-1)^s \cdot m \cdot \beta^e$$

s – bit znaku
m – część znacząca (**mantysa**)
β – podstawa systemu
e – wykładnik (**cecha**)

System binarny – IEEE 754

$$x = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e$$

W systemach komputerowych liczby przetwarzane są w postaci binarnej zmiennopozycyjnej – liczby **maszynowe**. Standard opisuje dwie postacie.

Format	**Znak** s	**Wykładnik** e	**Część ułamkowa** m
32-bitowy	1 bit	8 bitów	23 bity
64-bitowy	1 bit	11 bitów	52 bity

Wykładnik liczby 32-bitowej może przyjmować wartości w zakresie **[-126,127]**. Zapis na 8-bitach pozwala na zapisanie liczby w zakresie **[0,255]** poprzez wprowadzenie korekty **[c+127]**.

Typ	Bit znaku	Cecha	Mantysa	Wartość
0	0	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0000	0.0
0_	1	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0000	−0.0
1	0	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	1.0
-1	1	0111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	−1.0
Najmniejsza niedomiarowa liczba	*	0000 0000	000 0000 0000 0000 0000 0001	$\pm 2^{-23} \times 2^{-126} = \pm 2^{-149} \approx \pm 1.4 \times 10^{-45}$
Średnia niedomiarowa liczba	*	0000 0000	100 0000 0000 0000 0000 0000	$\pm 2^{-1} \times 2^{-126} = \pm 2^{-127} \approx \pm 5.88 \times 10^{-39}$
Największa niedomiarowa liczba	*	0000 0000	111 1111 1111 1111 1111 1111	$\pm (1-2^{-23}) \times 2^{-126} \approx \pm 1.18 \times 10^{-38}$
Najmniejsza liczba znormalizowana	*	0000 0001	000 0000 0000 0000 0000 0000	$\pm 2^{-126} \approx \pm 1.18 \times 10^{-38}$
Największa liczba znormalizowana	*	1111 1110	111 1111 1111 1111 1111 1111	$\pm (2-2^{-23}) \times 2^{127} \approx \pm 3.4 \times 10^{38}$
+∞	0	1111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	+∞
-∞	1	1111 1111	000 0000 0000 0000 0000 0000	−∞
Wartość nieokreślona	*	1111 1111	Nie same zera	NaN

Procedura przeliczania liczby z systemu **dziesiętnego** na **binarny zmiennopozycyjny**.

1. Zapisanie liczby w systemie dziesiętnym w postaci liczby zmiennopozycyjnej o podstawie **2**
2. Określenie wartości wykładnika **e** i mantysy **m**
3. Konwersja wartości wykładnika **e** na system binarny
4. Konwersja wartości mantysy **m** w na system binarny
5. Zapisanie liczby w postaci binarnej zmiennopozycyjnej

Przykład: konwersja liczby **125.5**

125.5 × 2^0

62.75 × 2^1

31.375 × 2^2

15.6875 × 2^3

7.84375 × 2^4

3.921875 x 2^5

1.**9609375** × $2^{\mathbf{6}}$

mantysa ***m***=0.9609375

wykładnik ***e***=6+127=133

bit znaku ***z***=0

Powtarzanie dzielenia przez 2.

Przykład: konwersja liczby **125.5**

zapisanie binarnej postaci mantysy

0.9609375 × 2	= 1,**921875**	→ 1
0.921875 × 2	= 1,**84375**	→ 1
0.84375 × 2	= 1,**6875**	→ 1
0.6875 × 2	= 1,**375**	→ 1
0.375 × 2	= 0.**75**	→ 0
0.75 × 2	= 1,**5**	→ 1
0.5 × 2	= 1,**0**	→ 1
0 × 2	= 0	→ 0

11110110000000000000000

Przykład: konwersja liczby **125.5**

zapisanie binarnej postaci wykładnika

```
133 div 2 = 66;  133 mod 2 = 1    → 1
66 div 2 = 33;   66 mod 2 = 0     → 0
33 div 2 = 16;   33 mod 2 = 1     → 1
16 div 2 = 8;    16 mod 2 = 0     → 0
8 div 2 = 4;     8 mod 2 = 0      → 0
4 div 2 = 2;     4 mod 2 = 0      → 0
2 div 2 = 1;     2 mod 2 = 0      → 0
1 div 2 = 0;     1 mod 2 = 1      → 1
```

10000101

***Przykład*: konwersja liczby 125.5**

Ostateczne liczba 125.5 ma postać binarną zmiennopozycyjną 32 bit:

125.5=

0 10000101 11110110000000000000000

s e m

$$x = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e$$

***Przykład*: konwersja na postać dziesiętną**

1 10001100 10011110010010100000000

7 6 5 4 3 2 1 0

Przeliczanie wykładnika e=10001100

$c=2^2+2^3+2^7-127=4+8+128-127=13$

Przeliczanie mantysy

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

m=10011110010010 1

$m=1+2^{-1}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-7}+2^{-10}+2^{-13}+2^{-15}$

$=1,618316650390625$

***Przykład*: konwersja na postać dziesiętną**

1 10001100 10011110010010100000000

po konwersji wynosi:

$(-1)^z \times m \times 2^c =$

$=(-1)^1 \times 1{,}61831665039062 5 \times 2^{13} =$

=-13257.25

Ograniczenia

- **Nie każdą liczbę** da się przedstawić w postaci zmiennopozycyjnej bitowej o skończonym rozwinięciu.
- Liczba **32** bitowa ma **23** bity mantysy
- Liczba **64** bitowa ma **52** bity mantysy
- Powoduje to że zapis na możliwie bliską liczbę maszynową jest obarczony błędem.

***Przykład*: konwersja liczby 0.01**

$\mathbf{0,01} \times 2^{0}$

$0,02 \times 2^{-1}$

$0,04 \times 2^{-2}$

$0,08 \times 2^{-3}$

$0,16 \times 2^{-4}$

$0,32 \times 2^{-5}$

$0,64 \times 2^{-6}$

$1,\mathbf{28} \times 2^{-7}$

mantysa $\boldsymbol{m}=\mathbf{0.28}$

wykładnik $\boldsymbol{e}=-7+127=\mathbf{120}$

bit znaku $\boldsymbol{z}=\mathbf{0}$

Przykład: konwersja liczby **0.01**

zapisanie binarnej postaci mantysy

1	0,28	0,56	**0**
2	0,56	1,12	**1**
3	0,12	0,24	**0**
4	0,24	0,48	**0**
5	0,48	0,96	**0**
6	0,96	1,92	**1**
7	0,92	1,84	**1**
8	0,84	1,68	**1**
9	0,68	1,36	**1**
10	0,36	0,72	**0**
11	0,72	1,44	**1**
12	0,44	0,88	**0**
13	0,88	1,76	**1**
14	0,76	1,52	**1**
15	0,52	1,04	**1**
16	0,04	0,08	**0**
17	0,08	0,16	**0**
18	0,16	0,32	**0**
19	0,32	0,64	**0**
20	0,64	1,28	**1**
21	0,28	0,56	**0**
22	0,56	1,12	**1**
23	0,12	0,24	**0**

01000111101011100001010

Przykład: konwersja liczby **0.01**

zapisanie binarnej postaci wykładnika

120 div 2 = 60;	120 mod 2 = 0	→ 0
66 div 2 = 30;	60 mod 2 = 0	→ 0
30 div 2 = 15;	30 mod 2 = 0	→ 0
15 div 2 = 7;	15 mod 2 = 1	→ 1
7 div 2 = 3;	7 mod 2 = 1	→ 1
3 div 2 = 1;	3 mod 2 = 1	→ 1
1 div 2 = 0;	1 mod 2 = 1	→ 1

0 01111000 01000111101011100001010

0,009999999776482 58

Przepełnienie – overflow

Przepełnienie *występuje, gdy wartość bezwzględna wyniku jest większa niż największa skończona liczba, jaką można zapisać w danym formacie zmiennoprzecinkowym.*

Dla 32-bitowego IEEE 754: $x_{\max} = (2 - 2^{-23})2^{127} \approx 3{,}403 \cdot 10^{38}$.

$$\underbrace{-x_{\max}}_{\text{granica}} \quad \cdots 0 \cdots \quad \underbrace{x_{\max}}_{\text{granica}}$$

Wynik: $x > x_{\max}$ albo $x < -x_{\max}$ „wypada” poza reprezentowalny zakres.

W IEEE 754 skutkiem może być: $+\infty$ lub $-\infty$.

$$(2 \cdot 10^{38}) \cdot (2 \cdot 10^{38}) = 4 \cdot 10^{76}.$$

Matematycznie wynik jest poprawny, ale dla **float32** jest zdecydowanie **za duży**.

Niedomiar – underflow

Niedomiar *dotyczy wyniku o tak małej wartości bezwzględnej, że format zmiennoprzecinkowy nie jest już w stanie reprezentować go jako zwykłej liczby normalnej, a przy jeszcze mniejszej wartości może nie być w stanie reprezentować go jako liczby niezerowej.*

Dla **float32** najmniejsza dodatnia liczba **normalna** wynosi:

$$x_{\text{min,norm}} = 2^{-126} \approx 1{,}175 \cdot 10^{-38}.$$

IEEE 754 przewiduje jeszcze liczby **subnormalne**. Najmniejsza dodatnia liczba subnormalna wynosi:

$$x_{\text{min,sub}} = 2^{-149} \approx 1{,}401 \cdot 10^{-45}.$$

Możemy więc podzielić okolice zera na trzy obszary:

$$0 \quad \underset{\text{subnormalne}}{\leftrightarrow} \quad x_{\text{min,norm}} \quad \underset{\text{normalne}}{\leftrightarrow} \quad x_{\text{max}}$$

$$0 < 2^{-149} < 2^{-126} < \cdots (2 - 2^{-23})2^{127}$$

Liczby subnormalne mają **mniejszą** precyzję względną niż liczby normalne, ale ograniczają nagłe przejście od najmniejszej liczby normalnej do zera.

Epsilon maszynowy i jednostka zaokrąglenia

Epsilon maszynowy *jest odległością pomiędzy liczbą 1 a najmniejszą liczbą reprezentowalną większą od 1 w danym formacie.*

W środowisku Scilab epsilon maszynowy jest dostępny jako %eps. Dla formatu 64-bitowego jego wartość wynosi około:

$$\varepsilon = 2^{-52} \approx 2{,}22044604925031\,3 \cdot 10^{-16}$$

Przy zaokrąglaniu do najbliższej liczby jednostka zaokrąglenia jest równa:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon = 2^{-53}$$

Odległość między sąsiednimi liczbami maszynowymi zależy od wykładnika. W pobliżu dużych wartości odstęp jest większy niż w pobliżu zera. W konsekwencji może zachodzić $M + d = M$ w arytmetyce komputera, mimo że $d \neq 0$, jeżeli M jest dostatecznie duże w porównaniu z d.

Pojęcie

Błąd *oznac*
lub zmierz
jako dokła

Jeżeli x jest
to błąd bezw

a dla $x \neq 0$ b

$$x = 10,000 \ \text{V}.$$
$$\hat{x} = 9,990 \ \text{V}.$$

Błąd bezwzględny:

$$e_{\text{abs}} = |\, 10,000 - 9,990 \,| = 0,010 \ \text{V}$$

Oraz błąd względny:

$$e_{rel} = \frac{|10,000 - 9,990|}{10,000} = \frac{0,010}{10} = 0,001 = 0,1\%$$

$$e_{rel} = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|}$$

Dla wartości dokładnej równej zero błąd względny jest niezdefiniowany. W pobliżu zera może być również mało użyteczny. Należy wówczas stosować błąd bezwzględny lub normalizację względem ustalonej skali charakterystycznej x_{sk}:

$$e_{znorm} = \frac{|x - \hat{x}|}{x_{sk}}$$

Pojęcie niepewności

Niepewność jest miarą uzasadnionego braku wiedzy o wartości wielkości.

Można ją rozumieć jako informację o tym: **jak dokładnie jesteśmy w stanie określić wartość i w jakim zakresie może znajdować się wartość rzeczywista.**

Zakładając przy pomiarze napięcia odczyt:

$$U = (10{,}00 \pm 0{,}05)\ \text{V}.$$

Jeżeli prawdziwe napięcie wynosiłoby:

$$U_{\text{dokł}} = 10{,}02\ \text{V},$$

to rzeczywisty błąd pomiaru wynosiłby:

$$e_{abs} = |\ 10{,}00 - 10{,}02\ | = 0{,}02\ \text{V}.$$

Natomiast niepewność nadal mogłaby wynosić: $0{,}05\ \text{V}$.

Czyli błąd $= 0{,}02\ \text{V}$ oraz $niepewność = 0{,}05\ \text{V}$

Klasyfikacja błędów

1. **Błąd danych** - Rozbieżność pomiędzy wartościami wejściowymi a wartościami odpowiadającymi przyjętemu modelowi. Źródłem są między innymi niepewności pomiarów, tolerancje elementów i zaokrąglenia danych katalogowych.
2. **Błąd zaokrąglenia** - Wynika ze skończonej liczby cyfr reprezentacji oraz z zaokrąglania wyników działań pośrednich. Może się kumulować i wzmacniać.
3. **Błąd obcięcia** - Powstaje, gdy proces graniczny zastępuje się skończonym przybliżeniem, na przykład po obcięciu szeregu Taylora lub zastosowaniu niezerowego kroku.

Klasyfikacja błędów

4. **Błąd iteracyjny** - Różnica pomiędzy bieżącym przybliżeniem a granicą ciągu iteracyjnego. Zależy od tolerancji, kryterium zakończenia i liczby iteracji.
5. **Błąd modelu** - Rozbieżność wynikająca z uproszczeń opisu fizycznego. Nie jest błędem numerycznym i często dominuje nad nim.
6. **Błąd reprezentacji** - Powstaje wtedy, gdy liczba matematyczna nie może być dokładnie zapisana w skończonym formacie maszynowym i komputer musi zastąpić ją najbliższą liczbą reprezentowalną.

Utrata cyfr znaczących

Utrata cyfr znaczących *występuje wtedy, gdy odejmujemy od siebie dwie bardzo bliskie liczby, które wcześniej zostały już zapisane lub obliczone z pewnym błędem.*

Ponieważ wynik odejmowania jest małą różnicą dwóch dużych, podobnych wartości, wcześniejsze niewielkie błędy mogą stać się bardzo duże ***względem wyniku.***

$$\mathrm{d} = \mathrm{x} - \mathrm{y}$$

$$x \approx y$$

$$\hat{x} = x + \Delta x, \qquad \hat{y} = x + \Delta y$$

$$\hat{d} = \hat{x} - \hat{y} = (x + \Delta x) - (y + \Delta y) = (x - y) + (\Delta x - \Delta y)$$

Błąd względny obliczeń: $e_{rel} = \frac{|\Delta d|}{|d|} = \frac{|\Delta x - \Delta y|}{|x - y|}$

Utrata cyfr znaczących

Przykładowo: $x = 1000{,}001,\ \ y = 1000{,}000.$

Zatem:

$$d = x - y = 0{,}001.$$

Zakładając że obliczenia obarczone są błędami:

$$\hat{x} = 1000{,}002,$$
$$\hat{y} = 999{,}999.$$

Błędy operandów są niewielkie:

$$\Delta x = 0{,}001, \qquad \Delta y = -0{,}001.$$

Jednak wynik:

$$\hat{d} = 1000{,}002 - 999{,}999 = 0{,}003.$$

Zamiast $0{,}001$ otrzymano $0{,}003.$

Błąd bezwzględny wyniku

$$e_{abs} = |0{,}001 - 0{,}003| = 0{,}002$$

Błąd względny obliczeń

$$e_{rel} = \frac{e_{abs}}{0{,}001} = 2 = 200\%$$

Uwarunkowanie zadania

Uwarunkowanie *opisuje wrażliwość rozwiązania zadania matematycznego na niewielkie zaburzenia danych wejściowych. Jest właściwością zadania, a nie algorytmu ani programu.*

W zadaniu dobrze uwarunkowanym małe względne zaburzenie danych powoduje małą względną zmianę wyniku. W zadaniu źle uwarunkowanym małe zaburzenie danych może wywołać dużą zmianę rozwiązania.

Za miarę uwarunkowania najczęściej przyjmuje się wskaźnik uwarunkowania. Dla funkcji jednej zmiennej y=f(x)

$$\kappa_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

κ małe (bliskie 1) – zadanie dobrze uwarunkowane
κ duże – zadanie źle uwarunkowane, silne wzmocnienie błędów

Stabilność algorytmu

Algorytm jest stabilny w sensie analizy wstecznej, jeżeli jego obliczony wynik można interpretować jako dokładne rozwiązanie zadania o nieznacznie zaburzonych danych.

uwarunkowanie: jak bardzo rozwiązanie matematyczne reaguje na zmianę danych?

stabilność: jak duże dodatkowe zaburzenie wprowadza sposób prowadzenia obliczeń?

Zadanie	**Algorytm**	**Interpretacja:**
Dobrze uwarunkowane	Stabilny	oczekiwany wynik dokładny, ograniczony głównie jakością danych i precyzją obliczeń
Dobrze uwarunkowane	Niestabilny	możliwa duża utrata dokładności spowodowana algorytmem
Źle uwarunkowane	Stabilny	algorytm nie pogarsza nadmiernie sytuacji, ale wynik pozostaje wrażliwy na dane
Źle uwarunkowane	niestabilny	nakładają się wrażliwość zadania i błędy procesu obliczeniowego

Residuum, błąd rozwiązania

Weryfikację poprawnego rozwiązania układu równań liniowych ($Ax = b$) można przeprowadzić w oparciu o wektor **residuum** ($r = b - A\hat{x}$).

Błąd rozwiązania jest wektorem ($e = x - \hat{x}$), gdzie x jest rozwiązaniem dokładnym.

$$e = A^{-1} \cdot r$$

Praktyczną miarą dokładności rozwiązania jest względne znormalizowane residuum.

$$\eta = \frac{\|b - A\hat{x}\|}{\|A\| \cdot |\hat{x}| + \|b\|}$$

Koszt obliczeń

Koszt obliczeń *jest miarą nakładu zasobów obliczeniowych potrzebnych do wykonania algorytmu i osiągnięcia wyniku o wymaganej jakości.*

W metodach numerycznych koszt obliczeń może obejmować przede wszystkim:

- liczbę operacji arytmetycznych,
- liczbę iteracji lub kroków metody,
- liczbę wywołań funkcji,
- czas wykonania,
- zużycie pamięci.

Minimalny protokół weryfikacji wyniku

Każdy wynik numeryczny należy opatrzyć informacją umożliwiającą ocenę jego wiarygodności.

Zalecany protokół obejmuje następujące kroki:

Dane wejściowe. Podać wartości, jednostki, zakresy oraz dostępne informacje o niepewności.
Model. Wskazać przyjęte założenia i pominięte zjawiska fizyczne.
Metoda. Podać nazwę algorytmu i jego najważniejsze założenia.
Parametry. Podać krok, tolerancję, punkt początkowy, maksymalną liczbę iteracji i używaną precyzję.

Minimalny protokół weryfikacji wyniku

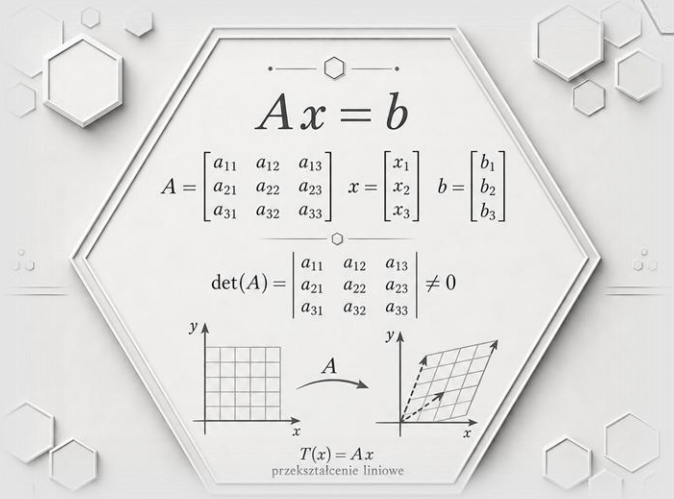
Miara jakości. Obliczyć błąd, residuum, błąd wsteczny lub inną uzasadnioną miarę.
Badanie czułości. Zmienić krok, tolerancję, precyzję albo lekko zaburzyć dane.
Uwarunkowanie. Ocenić wrażliwość zadania, jeżeli może wpływać na interpretację wyniku.
Koszt. Podać liczbę iteracji, kroków, wywołań funkcji lub czas obliczeń.
Wniosek fizyczny. Ocenić, czy dokładność numeryczna jest adekwatna do modelu i danych.

Część 2.



Rachunek macierzowy

1. Macierze, wektory i skalary
2. Typy macierzy
3. Podstawowe działania macierzowe
4. Transpozycja i sprzężenie
5. Wyznacznik macierzy
6. Rząd macierzy
7. Macierz odwrotna
8. Wartości własne macierz
9. Normy wektorów i macierzy
10. Implementacja rachunku macierzowego





Skalar to pojedyncza wartość liczbowa, nie ma kierunku ani wielu składowych.



Wektor to uporządkowany zbiór liczb, czyli składowych. Wektor może reprezentować np. punkt w przestrzeni, kierunek, zestaw niewiadomych albo **residuum dla wielu równań**.



Macierz to prostokątna tablica liczb ułożonych w wiersze i kolumny. Macierz ***m* × 1** jest **wektorem kolumnowym**, macierz **1 × *n*** jest **wektorem wierszowym**, a macierz **1 × 1** można utożsamiać ze **skalarem**. Macierz jest **kwadratowa**, gdy ***m* = *n***.

Najważniejsze rodzaje

1. **macierz zerowa 0,** której wszystki
2. **macierz jednostkowa *I*,** mająca jed
   przekątnej;
3. **macierz diagonalna *D* = *diag*(d_1, .**
4. **macierz trójkątna dolna *L*,** dla któ
5. **macierz trójkątna górna *U*,** dla której $u_{ij} = 0$ przy $i > j$;

ierająca niewie

órej elementami

$$B = \begin{bmatrix} A & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & J \\ 0 & E & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podstawowe działania macierzowe

- Dodawanie jest określone wyłącznie dla macierzy o tych samych wymiarach

$$C = A + B, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- Mnożenie przez skalar α $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.
- Iloczyn $C = A \cdot B$ jest określony dla $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $A \in \mathbb{C}^{n \times p}$. Wynik ma wymiar $m \times p$, a jego elementy

Wynoszą

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Element c_{ij} jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B.

Podstawowe działania macierzowe

- Mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania:

$$(AB)C = A(BC)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

ale na ogół nie jest przemienne:

$$AB \neq BA$$

- Jeden z iloczynów może być określony, a drugi nie.
- Kontrola wymiarów powinna poprzedzać każde mnożenie.

Transpozycja macierzy

Macierz transponowana A^T powstaje przez zamianę wierszy z kolumnami:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rzeczywista macierz kwadratowa jest symetryczna, jeżeli

$$A = A^T$$

Transpozycja macierzy

Dla macierzy zespolonej zazwyczaj stosuje się transpozycję ze sprzężeniem

$$A^* = \bar{A}^T$$

Należy policzyć wartości sprzężone wszystkich elementów macierzy, a następnie dokonać transpozycji.

$$A = \begin{bmatrix} 2+j & -4+2j & 1-j \\ 3-2j & -2j & 1-j \\ -2+2j & 3+j & 2j \end{bmatrix}, \qquad \bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2-j & 3+2j & -2-2j \\ -4-2j & 2j & 3+j \\ 1+j & 1+j & -2j \end{bmatrix}$$

Transpozycja macierzy

Macierz zespolona jest symetryczną, hermitowską, jeżeli jest równa macierzy sprzężonej, transponowanej.

$$A = A^H = \bar{A}^T$$

Należy policzyć wartości sprzężone wszystkich elementów macierzy, a następnie dokonać transpozycji.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4+2j & 1-j \\ -4-2j & -5 & 3-j \\ 1+j & 3+j & 8 \end{bmatrix}, \quad A^H = \begin{bmatrix} 3 & -4+2j & 1-j \\ -4-2j & -5 & 3-j \\ 1+j & 3+j & 8 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik |A|=$det(A)$ jest skalarem przyporządkowanym macierzy kwadratowej.

$$|A| = det(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 14$$

$$|A| = det(A) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + dhc + bfg) - (ceg + bdi + fha)$$

$$|A| = det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8)$$

$$-(3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9) = 225 - 225 = 0$$

Dla macierzy rzędu wyższego **n≥2** :

$$|A| = det(A) = (-1)^{1+1} a_{1,1} det\left(A_{1,1}\right) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1,n} det\left(A_{1,n}\right)$$

Wyznacznik macierzy

Algorytm Gaussa obliczania wyznaczników, dla macierzy kwadratowych stopnia **$n \geq 2$** i **$a_{1,1} \neq 0$.**

$$|A| = det(A) = det\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = a_{1,1} det\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$\boldsymbol{a'_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,1}a_{1,j}}$$

$$= a_{1,1}\, det\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}} \\ 0 & a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} & \cdots & a_{2,n} - a_{2,1}a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} - a_{n,1}a_{1,2} & \cdots & a_{n,n} - a_{n,1}a_{1,n} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{1,1}\, det\begin{bmatrix} a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} & \cdots & a_{2,n} - a_{2,1}a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} - a_{n,1}a_{1,2} & \cdots & a_{n,n} - a_{n,1}a_{1,n} \end{bmatrix} = \cdots$$

Wyznacznik macierzy

$$|A| = det(A) = det\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 2det\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \\ 3 & -4 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$a'_{2,1} = a_{2,1} - a_{2,1}a_{1,1} = 3 - 3 \cdot 1 = 0$$
$$a'_{2,2} = a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = -4 - 3 \cdot 2 = -10$$
$$a'_{2,3} = a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3} = 2 - 3 \cdot \frac{-3}{2} = \frac{13}{2}$$
$$a'_{2,4} = a_{2,4} - a_{2,1}a_{1,4} = 2 - 3 \cdot 1 = -1$$

$$= 2det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1.5 & 1 \\ 0 & -10 & 6.5 & -1 \\ 0 & -19 & 15.5 & -8 \\ 0 & -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} =$$

Wyznacznik macierzy

$$|A| = det(A) = 2det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1.5 & 1 \\ 0 & -10 & 6.5 & -1 \\ 0 & -19 & 15.5 & -8 \\ 0 & -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 2det\begin{bmatrix} -10 & 6.5 & -1 \\ -19 & 15.5 & -8 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\big(2 \cdot (-10)\big)det\begin{bmatrix} 1 & -0.65 & 0.1 \\ -19 & 15.5 & -8 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} = (-20)det\begin{bmatrix} 1 & -0.65 & 0.1 \\ 0 & 3.15 & -6.1 \\ 0 & -1.9 & -2.4 \end{bmatrix} =$$

$$(-20)det\begin{bmatrix} 3.15 & -6.1 \\ -1.9 & -2.4 \end{bmatrix} = (-20 \cdot 3.15)det\begin{bmatrix} 1 & -\frac{122}{63} \\ -1.9 & -2.4 \end{bmatrix} =$$

$$(-63)det\begin{bmatrix} 1 & -\frac{122}{63} \\ 0 & -\frac{383}{63} \end{bmatrix} = (-63) \cdot \left(-\frac{383}{63}\right) = 383$$

```
1 clear;clc;
```

```
42 x=macierz(5);
43 disp(x);
44 disp('Wyznacznik macierzy X='+ string(det(x)));
45 k=wyznacznik(x);
46 disp('Wyznacznik macierzy X='+string(k));
```

```
1 function A=macierz(S)
2     r=input('Podaj liczbę wierszy=');
3     for i=1:r
4         for j=1:r
5             A(i,j)=-S+rand()*2*S;
6         end
7     end
8 endfunction
```

```
function w=wyznacznik(X)
    w=1;
    k=0;
    r=size(X,"r");
    while r>1 do
        r=size(X,"r");
        c=size(X,"c");
        w=w*X(1,1);
        for i=1:r
            if i==1 then
                for j=1:c
                    Y(i,j) = X(i,j)/
                end
            else
                for j=1:c
                    Y(i,j) = X(i,j) - (X(i,1)*Y(1,j))/Y(1,1);
                end
            end
        end
        clear X;
        for i=2:r
            for j=2:c
                X(i-1,j-1)=Y(i,j);
            end
        end
        k=k+1;
        if r>1 then
            disp('Etap: '+string(k));
            disp(X);
        end
    end
endfunction
```

```
Podaj liczbę wierszy=4


 -2.800249    2.5489913  -0.9106212  -0.3192037
 -0.7911873   2.480402   -2.5443631  -4.7422111
 -1.1243108  -2.8080262   4.8742654   1.1858001
 -3.1669756   0.3131956  -3.4948473   4.5615354

 "Wyznacznik macierzy X=254.49536"

 "Etap: 1"

  1.7602055  -2.2870746  -4.6520227
 -3.8314561   5.2398833   1.3139616
 -2.5696172  -2.4649692   4.9225427

 "Etap: 2"

  0.2615862  -8.8121408
 -5.8037307  -1.8686631

 "Etap: 3"

 -197.38089

 "Wyznacznik macierzy X=254.49536"
```

```
 2.   4.  -3.   2.
 3.  -4.   2.   2.
 9.  -1.   2.   1.
 4.   2.  -4.   1.

"Wyznacznik macierzy X=383"

"Etap: 1"

-10.   6.5   -1.
-19.   15.5  -8.
-6.    2.    -3.

"Etap: 2"

 3.15  -6.1
-1.9   -2.4

"Etap: 3"

-6.0793651

"Wyznacznik macierzy X=383"
```

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy **trójkątnej górnej** i **dolnej,** niezależnie od stopnia macierzy równy jest iloczynowi elementów znajdujących się na przekątnej macierzy.

$$|A| = det(A) = det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-8) \cdot 3 \cdot (-1) = 48$$

Wyznacznik macierzy blokowej

Wyznacznik macierzy blokowej zależy od jej struktury.

Macierz blokowo-diagonalna

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

$$\boxed{\det(M) = \det(A)\det(D)}.$$

Przykład:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, D = [5].$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2,$$

$$\det(M) = (-2) \cdot 5 = -10$$

Wyznacznik macierzy blokowej

Macierz blokowo-trójkątna

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$\boxed{\det(M) = \det(A) \cdot \det(D)}.$$

Czyli bloki poza przekątną nie wpływają wtedy na wyznacznik.

To jest blokowy odpowiednik zwykłej macierzy trójkątnej, dla której wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej.

Wyznacznik macierzy blokowej

Ogólna macierz blokowa — dopełnienie Schura

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

jeżeli A jest odwracalna, to:

$$\boxed{\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)}$$

Macierz

$$\boxed{D - CA^{-1}B}$$

nazywa się **dopełnieniem Schura** bloku A.

Analogicznie, jeśli Djest odwracalna:

$$\boxed{\det(M) = \det(D)\det(A - BD^{-1}C)}$$

Wyznacznik macierzy blokowej

Przykład

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Po podziale na bloki:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 1], D = [3].$$

Wyznacznik macierzy blokowej

$$\boldsymbol{det(M) = det(A)\ det\left(D - CA^{-1}B\right)}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad CA^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. $A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
2. $CA^{-1}B = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$
3. $D - CA^{-1}B = 3 - 1 = 2.$
4. $det(A) = 4.$

$$\det(M) = 4 \cdot 2 = 8$$

Wyznacznik macierzy

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej zawierającej kolumnę lub wiersz zerowy wynosi 0.
2. Zmiana miejscami dwóch wierszy lub dwóch kolumn spowoduje że zmieni się znak wyznacznika macierzy
3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie takie same kolumny lub wiersze wynosi 0
4. Jeżeli można z jednego wiersza lub kolumny wydzielić stały współczynnik to można wyłączyć go przed wyznacznik macierzy.

$$det\begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{4}{3} \\ 3 & 5 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} det\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy w której w jedną kolumnę lub wiersz opisze się jako sumę liczb można policzyć jako sumę wyznaczników dwóch macierzy w której wskazany wiersz lub kolumna są zastąpione wskazanymi składnikami:

$$det\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} + det\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy nie zmieni się jeżeli do wartości dowolnego wiersza lub kolumny dodamy dowolną wielokrotność innego wiersza lub kolumny.

$$det\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}2 & 4+2\cdot 6 & 6\\ 3 & 5+2\cdot 4 & 4\\ 1 & 4+2\cdot 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$det\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3-5\cdot 2 & 5-5\cdot 4 & 4-5\cdot 3\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy

1. Wyznacznik macierzy i wyznacznik macierzy do niej transponowanej są sobie równe $\mathbf{det(A)=det(A^T)}$
2. Jeżeli macierze **A** i **B** są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia to $\mathbf{det(A \cdot B)=det(A) \cdot det(B)}$
3. Dla dowolnego **n** całkowitego $\mathbf{det(A^n)=[det(A)]^n}$
4. Zamiana dwóch wierszy zmienia znak wyznacznika

Rząd macierzy

Rząd macierzy to **liczba liniowo niezależnych wierszy lub kolumn** macierzy.

W praktyce rząd można określać kilkoma sposobami:

- przez sprawdzenie **liniowej niezależności wierszy lub kolumn,**
- przez **eliminację Gaussa** – rząd to liczba niezerowych wierszy po sprowadzeniu macierzy do postaci schodkowej,
- przez **minory,**
- numerycznie, np. funkcją ***rank(A)*** w **Scilabie.**

Najwygodniejsza metoda ręczna to zwykle eliminacja Gaussa.

Rząd macierzy

eliminacja gaussa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ |-w_1 \\ \cdots \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1-1 & 3-2 & 1-0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ -2 \cdot w_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Są **3 niezerowe wiersze,** dlatego rząd jest równy **3.**

Macierz schodkowa

Najważniejsze warunki są takie:

- *wszystkie zerowe wiersze są na dole,*
- *pierwszy niezerowy element każdego kolejnego wiersza znajduje się bardziej na prawo niż w wierszu wyżej,*
- *pod każdym takim pierwszym niezerowym elementem są zera.*

Te pierwsze niezerowe elementy nazywa się często **elementami wiodącymi** albo **pivotami**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

rank(A)=3

Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do nieosobliwej macierzy kwadratowej A jest macierz A^{-1} spełniająca

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Zachodzą własności:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Macierz odwrotna

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} D^T$$

gdzie **D** jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy **A**:

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j},$$

gdzie $\mathbf{M_{i,j}}$ jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez usunięcie z macierzy **A** $\mathbf{i}_{\text{tego}}$ wiersza i $\mathbf{j}_{\text{kolumny}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} D^T$$

$$det(A)$$
$$= (1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2)$$
$$-(0 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2)$$
$$= 9 - (2 + 6) = 1$$

Należy wyznaczyć macierz **dopełnień algebraicznych D**

$$D_{1,1} = (-1)^{1+1} det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$D_{1,2} = (-1)^{1+2} det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 = -3$$

$$D_{1,3} = (-1)^{1+3} det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} D^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
x=[1,2,0;1,3,1;0,2,3];
disp(x);
disp('Wyznacznik macierzy X='+ string(det(x)));
k=wyznacznik(x);
disp('Wyznacznik macierzy X='+string(k));
y=odwrotna(x);
disp('Macierz odwrotna do x:');
disp(y);
disp('Macierz odwrotna do x->inv(x):');
disp(inv(x));
```

```
function D=dopelnienie(X,a,b)
        D=X;
        D(a,:)=[];
        D(:,b)=[];
endfunction
function A=odwrotna(B)
    w=wyznacznik(B);
    r=size(B,"r");
    c=size(B,"c");
    for i=1:r
        for j=1:c
            A(i,j)=(1/w)*(-1)^(i+j)*wyznacznik(dopelnienie(B,j,i));
        end
    end
endfunction
```

Scilab 2026.1.0 Console

```
   1.    2.    0.
   1.    3.    1.
   0.    2.    3.
 "Wyznacznik macierzy X=1"
 "Wyznacznik macierzy X=1"
 "Macierz odwrotna do x:"
   7.   -6.    2.
  -3.    3.   -1.
   2.   -2.    1.
 "Macierz odwrotna do x->inv(x):"
   7.   -6.    2.
  -3.    3.   -1.
   2.   -2.    1.


-->
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna

Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą Gaussa poprzez przekształcanie

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$$

za pomocą elementarnych przekształceń:

1. Mnożenia macierzy przez stałe różne od zera
2. Dodawania do elementów wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza przemnożonych przez dowolną stałą
3. Przestawianie wierszy

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}* & * & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdots\\ |-w_1\\ \cdots\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1-1 & 3-2 & 1-0\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0-1 & 1-0 & 0-0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdots\\ |\quad\cdots\\ -2\cdot w_2\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0-0 & 2-2 & 3-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0+2 & 0-2 & 1-0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2 \cdot w_2 \\ | \quad \dots \\ \quad \dots \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 2-2 & 0-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+2 & 0-2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +2 \cdot w_3 \\ | \quad -w_3 \\ \quad \dots \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 & -2+2 \\ 0-0 & 1-0 & 1-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3+2\cdot 2 & -2-2\cdot 2 & 0+2 \\ -1-2 & 1+2 & 0-1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Wartości własne macierzy

Liczba **λ** jest wartością własną macierzy **A**, jeżeli istnieje wektor $\boldsymbol{x \neq 0}$ taki że

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Wektor x jest wektorem własnym macierzy

$$(A - \lambda I) \cdot x = 0$$

Równanie jest spełnione gdy:

$$det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

Wartości własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad det(A - \lambda \cdot I) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^3 - 7 \cdot \lambda^2 + 11 \cdot \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 \approx 0.09679$$

$$\lambda_2 \approx 2.19394$$

$$\lambda_3 \approx 4.70928$$

Suma wartości własnych powinna być równa śladowi macierzy (suma wartości na przekątnej diagonalnej.

$$1 + 3 + 3 = 7$$

$$0.09679 + 2.19394 + 4.70928 = 7.00001 \approx 7$$

Wartości własne macierzy

W środowisku **Scilab** można w
macierzy na dwa sposoby:

1. Dedykowaną funkcją do wy
   własnych macierzy:

   lambda=spec(A);

2. Wyznaczając wielomian cha
   obliczając jego pierwias

   charak=poly(A,"x
   lambda=roots(cha

```
--> charak=poly(A,"x")

 charak = [polynomial] of x

  -1 +11x -7x^2 +x^3

--> lambda_2=roots(charak)

 lambda_2 = [3x1 double]

    4.7092754 + 0.i
    2.1939366 + 0.i
    0.0967881 + 0.i
```

Norma wektora, macierzy

Norma jest miarą wielkości wektora lub macierzy, przypisującą mu jedną nieujemną liczbę zgodnie z określonymi własnościami matematycznymi.
Normę wektora, macierzy oznacza się odpowiednio

$$\|x\| \quad \|A\|$$

Norma musi spełniać trzy warunki:

$$\|x\| \geq 0, \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

W Scilab – funkcja ***norm(A);***

Norma wektora

1. Suma modułów:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. Norma euklidesowa:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

3. Norma maksimum:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Norma macierzy

1. Suma kolumny:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$$

2. Suma wierszy:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

3. Norma euklidesowa:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

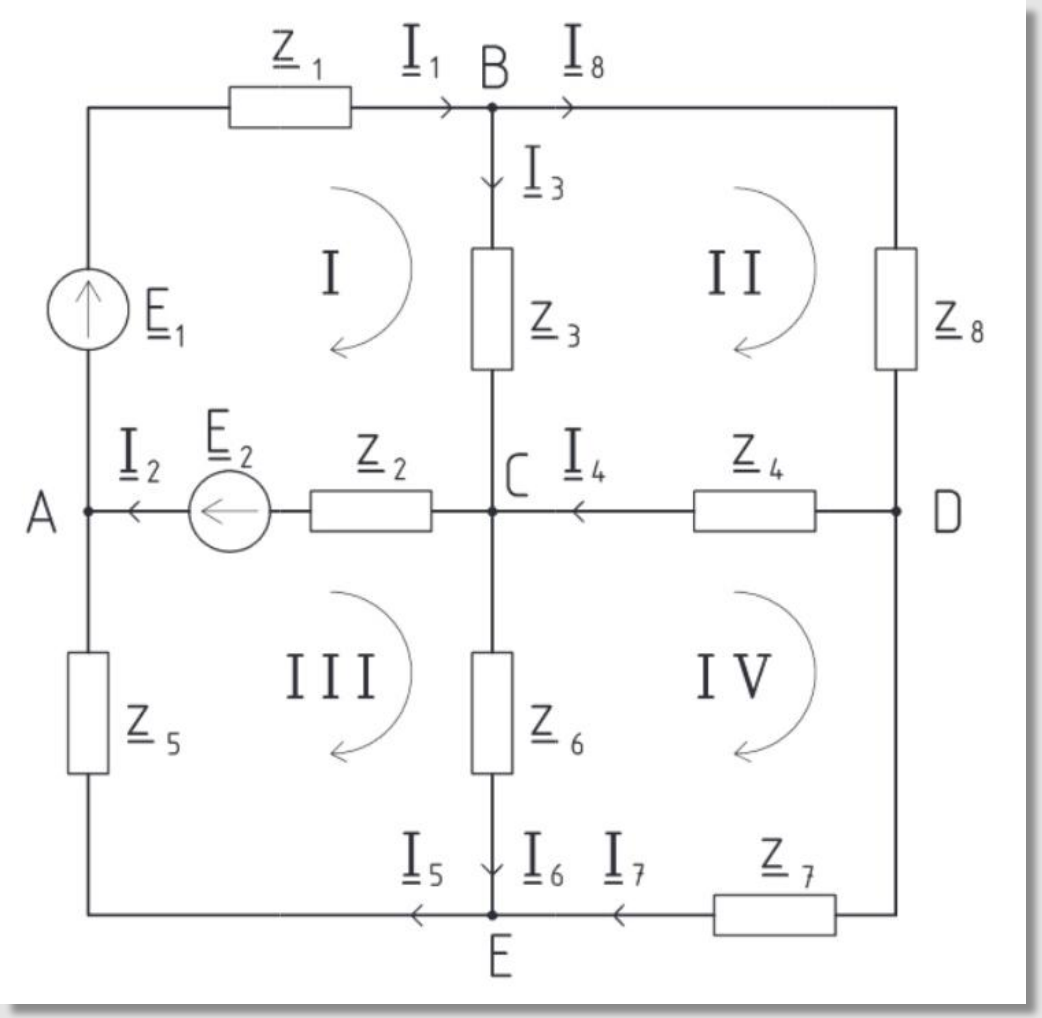
3. Norma spektralna

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)} \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^* \cdot A)}$$

Metody macierzowe

a) Metoda prądów oczkowych

b) Metoda potencjałów węzłowych



$\underline{E}_1 = 100\ \mathrm{V}$

$\underline{E}_2 = j100\ \mathrm{V}$

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_5 = 10\ \Omega$

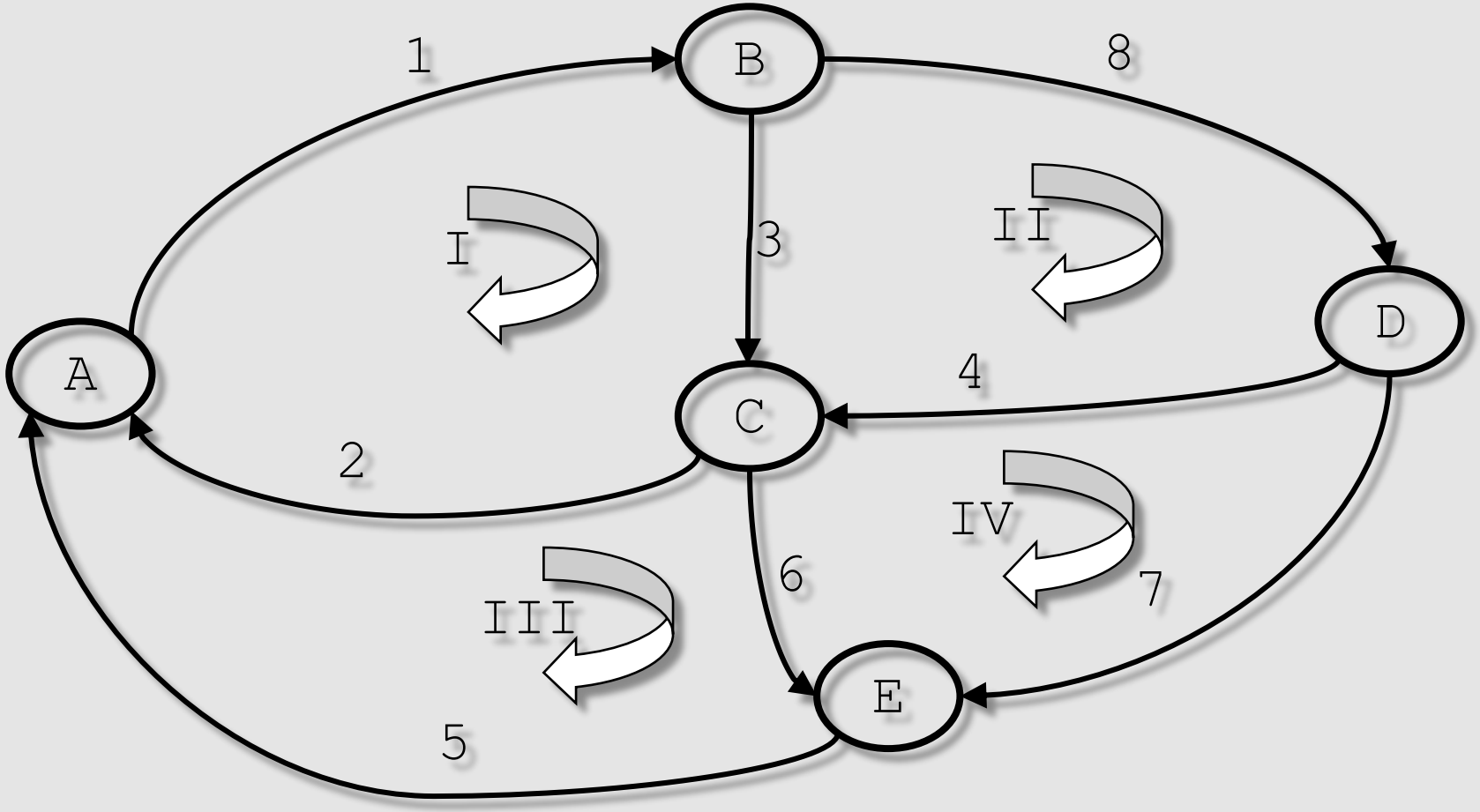
$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_8 = j10\ \Omega$

$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_6 = -j10\ \Omega$

$\underline{Z}_4 = \underline{Z}_7 = 20\ \Omega$

Metoda prądów oczkowych

Dla metody prądów oczkowych na podstawie schematu można utworzyć graf zorientowany, stanowiący punkt wyjścia do określenia danych wejściowych.



Metoda prądów oczkowych

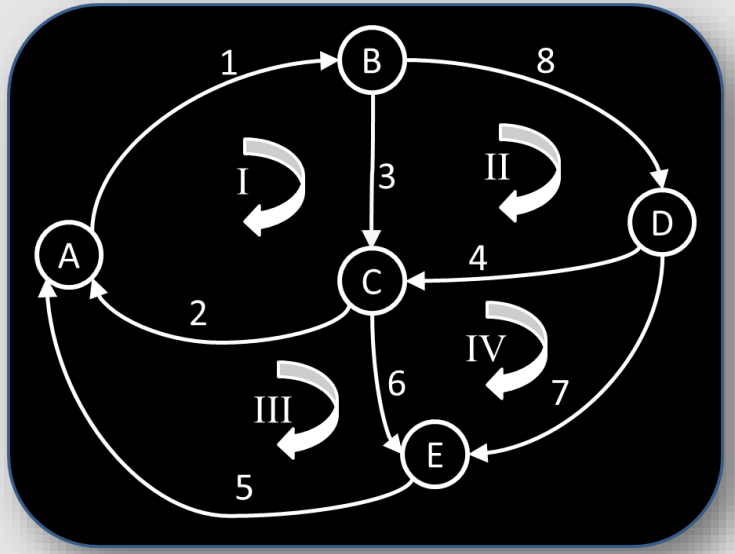
Na podstawie grafu tworzona jest macierz incydencji.

0 – jeżeli gałąź nie należy do oczka

1 – jeżeli gałąź należy do oczka, a prąd gałęziowy jest zgodny z prądem oczkowym

-1 – jeżeli gałąź należy do oczka, a prąd gałęziowy nie jest zgodny z prądem oczkowym

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Metoda prądów oczkowych

$$Z_d = \begin{bmatrix} \underline{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{Z_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z_8} \end{bmatrix}$$

Metoda prądów oczkowych

Wektory prądów i napięć źródłowych

0 – jeżeli w gałęzi nie ma źródeł

ten sam znak – jeżeli kierunek (**E** jest zgodny) (**I** jest przeciwny) z kierunkiem prądu gałęziowego

znak przeciwny– jeżeli kierunek (**E** jest przeciwny) (**I** jest zgodny) z kierunkiem prądu gałęziowego

$$E_g = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metoda prądów oczkowych

1. Macierz impedancji własnych i wzajemnych

$$\boldsymbol{Z = B \cdot Z_d \cdot B^T}$$

2. Prądy oczkowe

$$\boldsymbol{I_o = Z^{-1} \cdot B \cdot \left(E_g - Z_d \cdot I_z\right)}$$

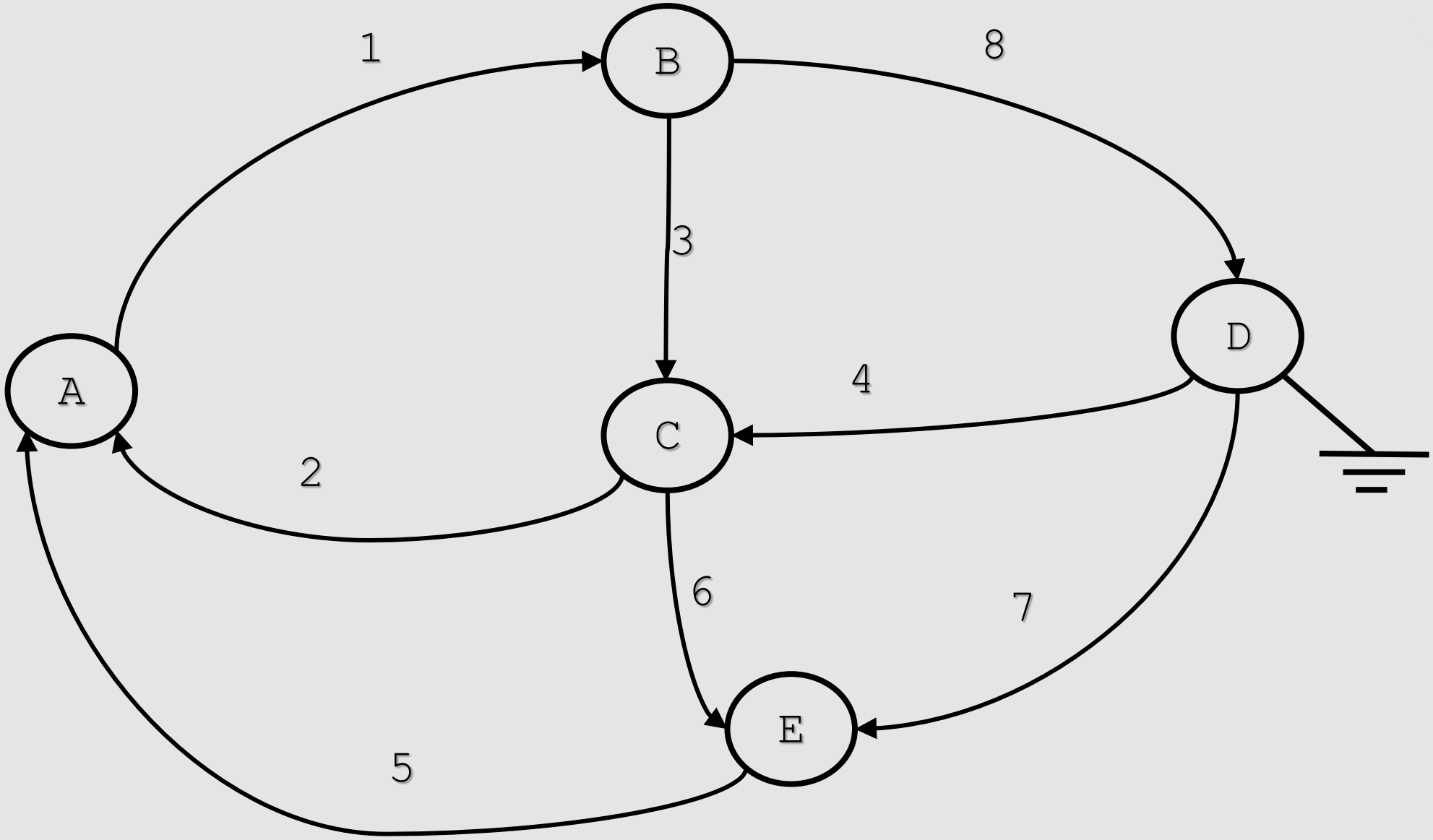
3. Prądy wypadkowe gałęzi uogólnionych

$$\boldsymbol{I = B^T \cdot I_o}$$

4. Prądy gałęziowe

$$\boldsymbol{I_g = I + I_z}$$

Metoda potencjałów węzłowych



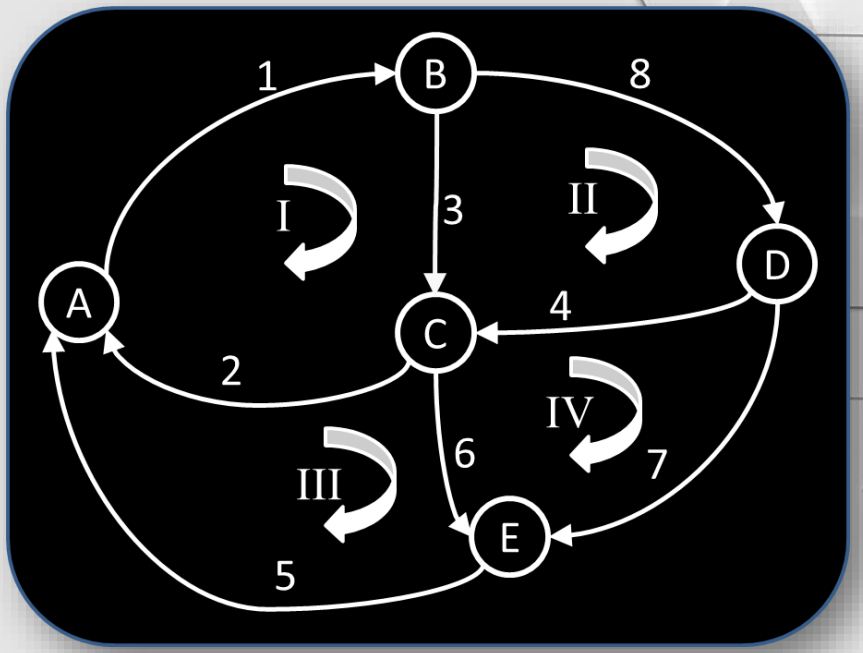
Metoda potencjałów węzłowych

Na podstawie grafu tworzona jest macierz incydencji.

0 – jeżeli gałąź nie ma połączenia z węzłem

1 – jeżeli gałąź jest połączona z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest skierowany od węza

-1 – jeżeli gałąź jest połączona z węzłem i zwrot prądu gałęziowego jest skierowany do węza



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Metoda potencjałów węzłowych

Metoda zakłada potraktowanie jednego z węzłów jako węzła odniesienia, poprzez jego uziemienie.

W zdefiniowanej macierzy incydencji należy wybrany wiersz związany z węzłem odniesienia skasować - Węzeł D

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Metoda potencjałów węzłowych

1. Macierz admitancji własnych i wzajemnych

$$\boldsymbol{Y = A \cdot Y_d \cdot A^T}$$

2. Macierz potencjałów węzłowych

$$\boldsymbol{V_w = Y^{-1} \cdot A \cdot \left(I_z - Y_d \cdot E_g\right)}$$

3. Napięcia gałęziowe

$$\boldsymbol{U = A^T \cdot V_w}$$

4. Prądy gałęziowe

$$\boldsymbol{I_g = I + I_z = Y_d\left(U + E_g\right)}$$

```
clear
clc
// dane: impedancje gałęzi
Z1 = 10;
Z5 = Z1;
Z2 = 10*%i;
Z8 = Z2;
Z3 = -10*%i;
Z6 = Z3;
Z4 = 20;
Z7 = Z4;
// dane: parametry źródeł
E1 = 100;
E2 = 100*%i;
// macierz diagonalna impedancji
Zd=diag([Z1,Z2,Z3,Z4,Z5,Z6,Z7,Z8]);
//macierz diagonalna admitancji
Yd=diag([1/Z1,1/Z2,1/Z3,1/Z4,1/Z5,1/Z6,1/Z7,1/Z8]);
// macierz kolumnowa źródeł napięcia
Eg=[E1;E2;0;0;0;0;0;0];
// macierz kolumnowa źródeł prądu
Iz=[0;0;0;0;0;0;0;0];
```

```
23 // macierz incydencyjna oczkowa
24 B=[1,1,1,0,0,0,0,0;
25     0,0,-1,1,0,0,0,1;
26     0,-1,0,0,1,1,0,0;
27     0,0,0,-1,0,-1,1,0];
28 //macierz incydencji męzłowa
29 A=[1,-1,0,0,-1,0,0,0;
30     -1,0,1,0,0,0,0,1;
31     0,1,-1,-1,0,1,0,0;
32 //    0,0,0,1,0,0,1,-1;
33     0,0,0,0,1,-1,-1,0];
34 disp('Test poprawności macierzy incydencji AB`==0 lub BA`==0');
35 disp(A*B');
36 disp(B*A');
```

```
37 // macierz Impedancji własnych i wzajemnych
38 Z=B*Zd*B';
39 // Prądy oczkowe
40 Io=inv(Z)*B*(Eg-Zd*Iz);
41  // Prądy wypadkowe
42 I=B'*Io;
43 // prądy w gałęziach
44 Ig=I+Iz;
45 // wartości skuteczne prądów w gałęziach
46 Igs=abs(Ig);
47  // wyświetlanie wyników
48 disp('Wyniki z metody prądów oczkowych:');
49 disp('wartości zespolone prądów:',Ig);
50 disp('wartości skuteczne prądów:',Igs);
```

```
51 //macierz admitancji  własnych i wzajemnych
52 Y=A*Yd*A';
53 //macierz potencjałów węzłowych
54 Uw=inv(Y)*A*(Iz-Yd*Eg);
55 //napięcia gałęziowe
56 U=A'*Uw;
57 //prądy gałęziowe
58 Igw=Yd*(U+Eg);
59 //wartości skuteczne pradów gałęziowych
60 Igws=abs(Igw);
61 disp('Wyniki z metody potencjałów węzłowych:');
62 disp('wartości zespolone prądów:',Igw);
63 disp('wartości skuteczne prądów:',Igws);
```

```
65 disp('Weryfikacja wyników: Ig-Igw==0');
66 disp(Ig-Igw);
```

```
"Test poprawności macierzy incydencji AB`==0 lub BA`==0"

 0.    0.    0.    0.
 0.    0.    0.    0.
 0.    0.    0.    0.
 0.    0.    0.    0.

 0.    0.    0.    0.
 0.    0.    0.    0.
 0.    0.    0.    0.
 0.    0.    0.    0.
```

```
"Wyniki z metody prądów oczkowych:"

"wartości zespolone prądów:"

 7.7876106 + 3.1858407i
 12.256637 + 6.1504425i
 5.4424779 + 8.3628319i
 1.5929204 - 3.8938053i
-4.4690265 - 2.9646018i
-5.2212389 - 1.6814159i
 0.7522124 - 1.2831858i
 2.3451327 - 5.1769912i

"wartości skuteczne prądów:"

 8.4140632
 13.713245
 9.9778516
 4.2070316
 5.3629341
 5.4852981
 1.4874103
 5.6833868
```

```
"Wyniki z metody potencjałów węzłowych:"

"wartości zespolone prądów:"

 7.7876106 + 3.1858407i
 12.256637 + 6.1504425i
 5.4424779 + 8.3628319i
 1.5929204 - 3.8938053i
-4.4690265 - 2.9646018i
-5.2212389 - 1.6814159i
 0.7522124 - 1.2831858i
 2.3451327 - 5.1769912i

"wartości skuteczne prądów:"

 8.4140632
 13.713245
 9.9778516
 4.2070316
 5.3629341
 5.4852981
 1.4874103
 5.6833868
```

```
"Weryfikacja wyników: Ig-Igw==0"

-1.776D-15 + 1.332D-15i
-1.776D-15 + 0.i
 1.776D-15 + 1.776D-15i
 4.441D-16 - 4.441D-16i
 0.        + 1.332D-15i
 1.776D-15 + 6.661D-16i
 1.110D-16 - 1.332D-15i
 4.441D-16 - 1.776D-15i
```

D – węzeł odniesienia

```
--> norm(Ig-Igw)
 ans  =

   3.892D-15

--> norm(Igs-Igws)
 ans  =

   3.504D-15
```

A – węzeł odniesienia

```
"Weryfikacja wyników: Ig-Igw==0"

-8.882D-16 - 1.776D-15i
 0.        + 0.i
 8.882D-16 + 0.i
-4.441D-16 - 4.441D-16i
 0.        + 1.776D-15i
 0.        - 8.882D-16i
-1.443D-15 - 2.220D-16i
 8.882D-16 - 1.776D-15i
```