Wykład 2.
Część 1.



Układy równań liniowych

Metody bezpośrednie - skończone

Metoda **bezpośrednia** wyznacza rozwiązanie po **skończonej,** z góry określonej liczbie działań.

W komputerze działania są **zaokrąglane,** dlatego wynik metody bezpośredniej również jest w konsekwencji **przybliżony**.

Określenie „**bezpośrednia**” nie oznacza „**dokładna**”, lecz odróżnia tę klasę od metod tworzących ciąg przybliżeń aż do spełnienia kryterium zakończenia.

Metody skończone rozwiązywania układów równań liniowych:

1. Rozkład **LU**
2. Rozkład **Cholesky'ego**
3. Eliminacja **Gaussa**
4. Eliminacja **Gaussa** z wyborem elementów głównych
   a) **częściowym**
   b) **pełnym**
5. Metoda eliminacji **Gaussa-Jordana**

Układ równań liniowych

Układ **n** równań liniowych:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Układ równań liniowych

Układ **n** równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

W postaci ogólnej jest on następujący:

$$A \cdot x = b$$

$$A \cdot x + b = 0$$

Kwalifikacja rozwiązań

Dla układu kwadratowego $n \times n$:

- jeżeli $\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}([A \mid b]) = n$,

istnieje dokładnie jedno rozwiązanie;

- jeżeli $\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}([A \mid b]) < n$,

istnieje nieskończenie wiele rozwiązań;

- jeżeli $\mathbf{rank}(A) < \mathbf{rank}([A \mid b])$,

układ jest sprzeczny.

rank(A) – rząd macierzy

A|b – macierz powstała przez dodanie do macierzy **A** kolumny wektora **b**

Postacie układu równań liniowych

układ diagonalny

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1/a_{1,1} \\ b_1/a_{2,2} \\ \vdots \\ b_n/a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jeżeli $\mathbf{a_{i,i}=0}$ i $\mathbf{b_i=0}$ to odpowiadające im $\mathbf{x_i}$ przyjmuje dowolną wartość, natomiast jeżeli $\mathbf{a_{i,i}=0}$ i $\mathbf{b_i \neq 0}$ to układ równań nie ma rozwiązania

Postacie układu równań liniowych
układ trójkątny

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Przy założeniu że $a_{i,i} \neq 0$, wtedy z pierwszego równania wyznacza się x_1, a znając go można z drugiego wyznaczyć x_2. Powtarzając algorytm wyznacza się pozostałe wartości x aż do x_n

Postacie układu równań liniowych
układ trójkątny

Algorytm rozwiązywania układu równań liniowych dla macierzy **A** w układzie trójkątnym dolnym:

$$L \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$for\ i = 1\ to\ n$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j}{a_{i,i}}$$

Jest to tzw. **Algorytm podstawienia w przód**

Postacie układu równań liniowych
układ trójkątny

Analogiczna sytuacja ma miejsce dla macierzy trójkątnej górnej. W tym przypadku stosujemy algorytm podstawienia wstecz.

$$U \cdot x = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$for\ i = n\ to\ 1\ step = -1$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j}{a_{i,i}}$$

Postacie układu równań liniowych
układ trójkątny

Mały element diagonalny może wzmacniać błędy.

```
1  A=[1,0,0,0,0;2,-2,0,0,0;3,1,2,0,0;3,3,-4,3,0;2,-3,1,4,1];
2  b=[3;-2;1;0;5];
3  x=[0;0;0;0;0];
4  for i=1:5
5      z=0;
6      for j=1:i-1
7          z=z+A(i,j)*x(j);
8      end
9      x(i)=(b(i)-z)/A(i,i);
10 end
```

$$for\ i = 1\ to\ n$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j}{a_{i,i}}$$

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -15 \\ 77 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań liniowych przy konfiguracji macierzy **A**:

- trójkątnej dolnej,
- trójkątnej górnej,

jest zagadnieniem numerycznie łatwym do realizacji.

Dlatego też dąży się do tego aby problem równania $A \cdot x = b$ sprowadzić do zadania rozwiązania macierzy trójkątnych $(a_{i,i} \neq 0)$.

$$A \cdot x = b \gg L \cdot U \cdot x = b$$

$$a)\ L \cdot z = b$$

$$b)\ U \cdot x = z$$

Rozkład LU

Dla danej macierzy **A**, poszukuje się macierzy L i U spełniających zależność $A = L \cdot U$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Rozkład LU

Punktem wyjścia do wyznaczenia wartości macierzy **L** i **U** jest zależność na iloczyn macierzy.
W zależności od przyjętej konwencji przyjmuje się że na przekątnej diagonalnej macierzy **L** lub **U** są 1.

$$a_{i,j} = \sum_{s=1}^{n} l_{i,s} \cdot u_{s,j}$$

Rozkład LU

Zakładając, że w k-tym kroku wyznaczono:

- k-1 wierszy macierzy **U**
- k-1 kolumn macierzy **L**

, z zależności na wartość elementu diagonalnego macierzy **A** wyliczyć brakujący element diagonalny macierzy **L** lub **U:**

$$a_{k,k} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s} \cdot u_{s,k} + l_{k,k} \cdot u_{k,k}$$

$$dla\ l_{k,k} = 1 \quad \gg \quad u_{k,k} = a_{k,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s} \cdot u_{s,k}$$

Rozkład LU

Uogólniony algorytm obliczeń można zapisać:

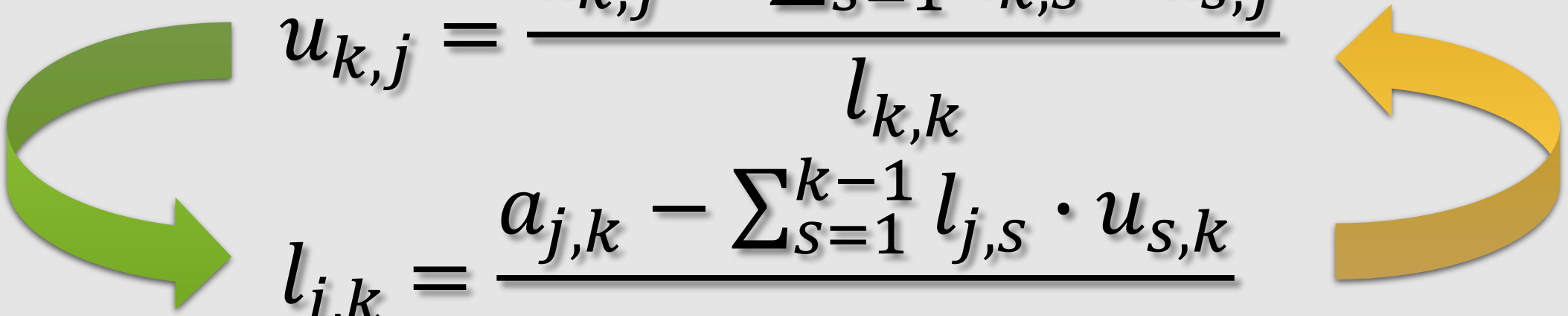
$$for\ k = 1\ to\ n$$

$$\left(l_{k,k} \cdot u_{k,k}\right) = a_{k,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s} \cdot u_{s,k}$$

$$for\ j = k\ to\ n$$

$$u_{k,j} = \frac{a_{k,j} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s} \cdot u_{s,j}}{l_{k,k}}$$

$$l_{j,k} = \frac{a_{j,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{j,s} \cdot u_{s,k}}{u_{k,k}}$$



Przykład

Dany jest układ równań liniowych

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$[L] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$[U] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Przykład

Dane wejściowe

```
1  clear;
2  clc;
3  A=[2,1,1,0;4,3,3,1;8,7,9,5;6,7,9,8];
4  b=[5;11;25;21];
5  x=[0;0;0;0];
6  y=x;
7  n=4
8  U=eye(n,n);
9  L=U;
```

```
A  =

    2.    1.    1.    0.
    4.    3.    3.    1.
    8.    7.    9.    5.
    6.    7.    9.    8.
```

```
b  =

    5.
   11.
   25.
   21.
```

```
U  =

    1.    0.    0.    0.
    0.    1.    0.    0.
    0.    0.    1.    0.
    0.    0.    0.    1.
```

Przykład

Rozkład **Doolittle'a**

$l_{kk}=1$

```
L  =

   1.    0.    0.    0.
   2.    1.    0.    0.
   4.    3.    1.    0.
   3.    4.    1.    1.
```

```
U  =

   2.    1.    1.    0.
   0.    1.    1.    1.
   0.    0.    2.    2.
   0.    0.    0.    2.
```

```
10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     U(k,k)=(A(k,k)-z)/L(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19     U       z=z+L(k,s)*U(s,j);
20         end
21         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24     L       z=z+L(j,s)*U(s,k);
25         end
26         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
27     end
28 end
```

Przykład

Rozkład **Crouta**

$u_{kk}=1$

```
L  =

   2.    0.    0.    0.
   4.    1.    0.    0.
   8.    3.    2.    0.
   6.    4.    2.    2.
```

```
U  =

   1.    0.5   0.5   0.
   0.    1.    1.    1.
   0.    0.    1.    1.
   0.    0.    0.    1.
```

```
10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     L(k,k)=(A(k,k)-z)/U(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19     L       z=z+L(j,s)*U(s,k);
20         end
21         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24     U       z=z+L(k,s)*U(s,j);
25         end
26         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
27     end
28 end
```

Przykład

Rozkład **Crouta**

$u_{kk}=1$, odwrócona kolejność

```
L  =

   2.    0.    0.    0.
   4.    3.    0.    0.
   8.    9.    9.    0.
   6.   12.    9.    8.
```

```
U  =

   1.    0.5     0.5     0.
   0.    0.333   0.333   0.333
   0.    0.      0.222   0.222
   0.    0.      0.      0.25
```

```
10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     L(k,k)=(A(k,k)-z)/U(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19             z=z+L(k,s)*U(s,j);
20         end
21         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24             z=z+L(j,s)*U(s,k);
25         end
26         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
27     end
28 end
```

U

L

Przykład

Rozkład **Doolittle'a**

$l_{kk}=1$, odwrócona kolejność

```
L  =

   1.    0.        0.        0.
   2.    0.333     0.        0.
   4.    1.        0.222     0.
   3.    1.333     0.222     0.25
```

```
U  =

   2.    1.    1.    0.
   0.    3.    3.    3.
   0.    0.    9.    9.
   0.    0.    0.    8.
```

```
10 for k=1:n
11     z=0
12     for s=1:(k-1)
13         z=z+U(k,s)*L(s,k);
14     end
15     U(k,k)=(A(k,k)-z)/L(k,k);
16     for j=k:n
17         z=0;
18         for s=1:(k-1)
19 L           z=z+L(j,s)*U(s,k);
20         end
21         L(j,k)=(A(j,k)-z)/U(k,k);
22         z=0;
23         for s=1:(k-1)
24 U           z=z+L(k,s)*U(s,j);
25         end
26         U(k,j)=(A(k,j)-z)/L(k,k);
27     end
28 end
```

Przykład

$$[L] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

```
29 for i=1:n
30     z=0;
31     k=(i-1);
32     for j=1:k
33         z=z+L(i,j)*y(j);
34     end
35     y(i)=(b(i)-z)/L(i,i);
36 end
```

```
y  =

     5.
     1.
     2.
     0.
```

Przykład

$$[U] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

```
37 for i=n:-1:1
38     z=0;
39     k=i+1;
40     for j=k:n
41         z=z+U(i,j)*x(j);
42     end
43     x(i)=(y(i)-z)/U(i,i);
44 end
```

```
x  =

   2.
   0.
   1.
   0.
```

```
--> A*x
 ans  =

    5.
   11.
   25.
   21.
```

```
b  =

   5.
   11.
   25.
   21.
```

Rozkład LU - Scilab

```
[L,U]=lu(A);
```

$$L \cdot U = A$$

```
L1 = [4x4 double]

   0.25   -0.4285714   0.3333333   1.
   0.5    -0.2857143   1.          0.
   1.      0.          0.          0.
   0.75    1.          0.          0.
```

```
U1 = [4x4 double]

   8.    7.      9.           5.
   0.    1.75    2.25         4.25
   0.    0.     -0.8571429   -0.2857143
   0.    0.      0.           0.6666667
```

```
[L,U,P]=lu(A);
```

$$L \cdot U = P \cdot A$$

```
L2 = [4x4 double]

   1.      0.          0.          0.
   0.75    1.          0.          0.
   0.5    -0.2857143   1.          0.
   0.25   -0.4285714   0.3333333   1.
```

```
U2 = [4x4 double]

   8.    7.      9.           5.
   0.    1.75    2.25         4.25
   0.    0.     -0.8571429   -0.2857143
   0.    0.      0.           0.6666667
```

```
P2 = [4x4 double]

   0.    0.    1.    0.
   0.    0.    0.    1.
   0.    1.    0.    0.
   1.    0.    0.    0.
```

lusolve()

W środowisku Scilab'a dostępna jest funkcja rozwiązująca układy równań liniowych metodą rozkładów LU.

Wymaga ona przekształcenia macierzy A do postaci macierzy rzadkiej, za pomocą funkcji:

```
A_s=sparse(A);
```

Wywołanie metody:

```
x=lusolve(A_s,b);
```

lusolve()

```
Rozwiązanie układu równiań metodą rozkładu LU

   2.
   0.
   1.
   0.
```

```
A_s  =

(  4,  4) sparse matrix

(  1,  1)          2.
(  1,  2)          1.
(  1,  3)          1.
(  2,  1)          4.
(  2,  2)          3.
(  2,  3)          3.
(  2,  4)          1.
(  3,  1)          8.
(  3,  2)          7.
(  3,  3)          9.
(  3,  4)          5.
(  4,  1)          6.
(  4,  2)          7.
(  4,  3)          9.
(  4,  4)          8.
```

```
1 clear;
2 clc;
3 A=[2,1,1,0;4,3,3,1;8,7,9,5;6,7,9,8];
4 b=[5;11;25;21];
5 A_s=sparse(A);
6 x=lusolve(A_s,b);
7 disp(x,'Rozwiązanie układu równiań metodą rozkładu LU');
```

Rozkład Cholesky’ego

Jeżeli macierz rzeczywista **A** jest

- **symetryczna,**
- **dodatnio określona,**

można rozłożyć macierz **A** na iloczyn $\mathbf{LL^T}$

Jeżeli macierz zespolona **A** jest

- **hermitowska,**
- **dodatnio określona,**

można rozłożyć macierz **A** na iloczyn $\mathbf{LL^*}$

Macierz jest **dodatnio określona** jeżeli wszystkie minory wiodące są dodatnie

Algorytm Rozkład Cholesky'ego

Algorytm wyznacza wartości macierzy **L**, w rozkładzie $\mathbf{A=LL^T}$ dla rzeczywistej macierzy **A**

$$for\ k = 1\ to\ n$$

$$l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s}^2}$$

$$for\ i = k+1\ to\ n$$

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{i,s} \cdot l_{k,s}}{l_{k,k}}$$

```
for k=1:n
    z=0;
    for s=1:(k-1)
        z=z+(L(k,s)^2);
    end
    L(k,k)=sqrt(A(k,k)-z);
    for i=(k+1):n
        z=0;
        for s=1:(k-1)
            z=z+L(i,s)*L(k,s);
        end
        L(i,k)=(A(i,k)-z)/L(k,k);
    end
end
```

Przykład

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 25 \\ 21 \end{bmatrix}$$

```
--> linsolve(B,-c)

 ans = [4x1 double]

   2.0000000
  -7.677D-15
   1.0000000
   3.862D-15
```

Z rozkładu Cholesky'ego

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
x = [4x1 double]

   2.
   0.
   1.
   0.
```

Algorytm Rozkład Cholesky'ego

Algorytm wyznacza wartości macierzy **L**, w rozkładzie **A=LL*** dla zespolonej macierzy **A**

$$for\ k = 1\ to\ n$$

$$l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{s=1}^{k-1} \left| l_{k,s} \right|^2}$$

$$for\ i = k + 1\ to\ n$$

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{i,s} \cdot \overline{l_{k,s}}}{l_{k,k}}$$

```
for k=1:n
    z=0;
    for s=1:(k-1)
        z=z+(abs(L(k,s)))^2;
    end
    L(k,k)=sqrt(A(k,k)-z);
    for i=(k+1):n
        z=0;
        for s=1:(k-1)
            z=z+L(i,s)*conj(L(k,s));
        end
        L(i,k)=(A(i,k)-z)/L(k,k);
    end
end
```

Przykład

$$\begin{bmatrix} 4 & 2-2i & 0 & 2 & 0 \\ 2+2i & 6 & 2+2i & 1+i & 2 \\ 0 & 2-2i & 6 & 2-2i & 1-i \\ 2 & 1-i & 2+2i & 7 & 2+2i \\ 0 & 2 & 1+i & 2-2i & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-4i \\ 12+2i \\ -1+i \\ 6 \\ 15+2i \end{bmatrix}$$

Z rozkładu Cholesky'ego

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i & 2 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

```
y = [5x1 double]

  1. + 1.i
  2. - 1.i
 -1. + 2.i
  1. - 1.i
  2. + 1.i
```

```
--> linsolve(A,-b)

ans = [5x1 double]

  1. + 1.i
  2. - 1.i
 -1. + 2.i
  1. - 1.i
  2. + 1.i
```

Metoda eliminacji Gaussa

- Eliminacja Gaussa polega na sprowadzeniu równania macierzowego zapisanego w postaci $A \cdot x = b$ do postaci $U \cdot x = z$, gdzie U jest macierzą trójkątną górną.
- Eliminację prowadzi się za pomocą przekształceń elementarnych.
- Procedurę najwygodniej zautomatyzować dążąc do uzyskania na przekątnej macierzy trójkątnej górnej jedynki. Nie jest to jednak warunek konieczny.

Przykład

Rozwiązać układ równań metodą eliminacji Gaussa.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2a_{1j} \\ 0.5a_{1j} \\ -a_{1j} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12-2\cdot 6 & -8+2\cdot 2 & 6-2\cdot 2 & 10-2\cdot 4 \\ 3-0.5\cdot 6 & -13+0.5\cdot 2 & 9-0.5\cdot 2 & 3-0.5\cdot 4 \\ -6+6 & 4-2 & 1+2 & -18+4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34-2\cdot 12 \\ 27-0.5\cdot 12 \\ -38+12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3a_{2j} \\ -0.5a_{2j} \end{matrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12+3\cdot 4 & 8-3\cdot 2 & 1-3\cdot 2 \\ 0 & 2-0.5\cdot 4 & 3+0.5\cdot 2 & -14+0.5\cdot 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21-3\cdot 10 \\ -26+0.5\cdot 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \Bigg|_{2a_{3j}}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4-2\cdot 2 & -13+2\cdot 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21+2\cdot 9 \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 = \dfrac{12 - (4 \cdot 1 + 2 \cdot -2 - 2 \cdot -3)}{6} = 1 \\ x_2 = \dfrac{10 - (2 \cdot 1 + 2 \cdot -2)}{-4} = -3 \\ x_3 = \dfrac{-9 - (-5 \cdot 1)}{2} = -2 \\ x_4 = \dfrac{-3}{-3} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algorytm metody Gaussa

$$for\ i = 1{:}n$$
$$D = A(i,i)$$
$$for\ j = i{:}n$$
$$A(i,j) = \frac{A(i,j)}{D}$$
$$b(i) = \frac{b(i)}{D}$$
$$for\ k = i+1{:}n$$
$$M = A(k,i)$$
$$for\ s = i{:}n$$
$$A(k,s) = A(k,s) - M * A(i,s)$$
$$b(k) = b(k) - M * b(i)$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Big| /6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Big| \begin{matrix} -a_{1j} \cdot 12 \\ -a_{1j} \cdot 3 \\ -a_{1j} \cdot -6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 12-12 & -8-\left(-\frac{1}{3}\cdot 12\right) & 6-\left(\frac{1}{3}\cdot 12\right) & 10-\left(\frac{2}{3}\cdot 12\right) \\ 3-3 & -13-\left(-\frac{1}{3}\cdot 3\right) & 9-\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right) & 3-\left(\frac{2}{3}\cdot 3\right) \\ -6+6 & 4-\left(-\frac{1}{3}\cdot -6\right) & 1-\left(\frac{1}{3}\cdot -6\right) & -18-\left(\frac{2}{3}\cdot -6\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34-(2\cdot 12) \\ 27-(2\cdot 3) \\ -38-(2\cdot -6) \end{bmatrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \Big\| /(-4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -12+12 & 8-\left(-12\cdot-\frac{1}{2}\right) & 1-\left(-12\cdot-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 2-2 & 3-\left(2\cdot-\frac{1}{2}\right) & -14-\left(2\cdot-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ 21-\left(-12\cdot-\frac{10}{4}\right) \\ -26-\left(2\cdot-\frac{10}{4}\right) \end{bmatrix} \Big\| \begin{matrix} \\ \\ -a_{2j}\cdot-12 \\ -a_{2j}\cdot 2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \Big\| /2$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4-4 & -13-\left(4\cdot-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ -\frac{9}{2} \\ -21-\left(4\cdot-\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix} \Bigg| -a_{3j}\cdot 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ -\frac{9}{2} \\ -3 \end{bmatrix} \Bigg| /-3$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{10}{4} \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{3} \cdot -3 - \frac{1}{3} \cdot -2 - \frac{2}{3} = 1 \\ -\frac{10}{4} + \frac{1}{2} \cdot -2 + \frac{1}{2} = -3 \\ -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład

```
clear;clc;
A=[6,-2,2,4;
   12,-8,6,10;
   3,-13,9,3;
   -6,4,1,-18];
b2=[12;34;27;-38];
x=Gauss(A,b2);
disp(x);
```

```
function x=Gauss(A,b)
    r=size(A,'r');
    for i=1:r
        D=A(i,i);
        for j=i:r
            A(i,j)=A(i,j)/D;
        end
        b(i)=b(i)/D;
        for k=i+1:r
            D=A(k,i);
            for s=i:r
                A(k,s)=A(k,s)-D*A(i,s);
            end
            b(k)=b(k)-D*b(i);
        end
        disp(A,b);
    end
```

```
    x=zeros(r,1);
    for i=r:-1:1
        z=0;
        for j=i+1:r
            z=z+A(i,j)*x(j);
        end
        x(i)=(b(i)-z)/A(i,i);
    end
endfunction
```

Przykład

$$
\begin{bmatrix}
1. & -0.3333333 & 0.3333333 & 0.6666667 \\
0. & 1. & -0.5 & -0.5 \\
0. & 0. & 1. & -2.5 \\
0. & 0. & 0. & 1.
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1. \\ -3. \\ -2. \\ 1. \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2. \\ -2.5 \\ -4.5 \\ 1. \end{bmatrix}
$$

Metoda eliminacji Gaussa

- W sytuacji gdy na przekątnej macierzy **A** występuje **0,** konieczne staje się przestawienie (zamianę wierszy układu) w celu eliminacji problemu dzielenia przez **0.**

- Jeżeli na przekątnej diagonalnej wartości są bliskie zeru zalecane jest przeprowadzenie procedury analogicznej do omówionej powyżej

Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

- Metoda Gaussa zapewnia uzyskanie wyników z niewielkim błędem, jeżeli tylko wartości na głównej przekątnej nie są bliskie zeru.
- Gdyby moduł któregoś z dzielników był mały w porównaniu z innymi współczynnikami, to mógłby powstać znaczny błąd numeryczny.
  Istnienie zera na przekątnej wykluczałoby rozwiązanie metodą eliminacji Gaussa.
- Aby tego uniknąć, stosuje się jedną z metod wyboru elementu głównego:
  - Wybór częściowy elementu głównego
  - Wybór pełny elementu głównego

Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

Wybór częściowy elementu głównego:

- W **k**-tym kroku eliminacji poszukuje się największego elementu co do modułu w **k**-tym wierszu lub kolumnie, a następnie przestawia wskazaną kolumnę lub wiersz **k**-tą kolumną lub wierszem
- W przypadku przestawiania kolumn należy pamiętać o odpowiadającej im zmianie kolejności zmiennych.

Przykład – wybór częściowy

Wybór elementu podstawowego w kolumnie:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 12 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 6 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 12 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \begin{matrix} nie\ zmieniamy \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -2 - \frac{6}{12} \cdot (-8) & 2 - \frac{6}{12} \cdot (6) & 4 - \frac{6}{12} \cdot (10) \\ 0 & -13 - \frac{3}{12} \cdot (-8) & 9 - \frac{3}{12} \cdot (6) & 3 - \frac{3}{12} \cdot (10) \\ 0 & 4 + \frac{6}{12} \cdot (-8) & 1 + \frac{6}{12} \cdot (6) & -18 + \frac{6}{12} \cdot (10) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 12 - \frac{6}{12} \cdot (34) \\ 27 - \frac{3}{12} \cdot (34) \\ -38 + \frac{6}{12} \cdot (34) \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ -5 \\ \frac{37}{2} \\ -21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \\ 11 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{37}{2} \\ -5 \\ -21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ \text{nie trzeba} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{15}{2}\right) & -1 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{37}{2} \\ -5 + \frac{2}{11} \cdot \left(\frac{37}{2}\right) \\ -21 \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{37}{2} \\ -\frac{18}{11} \\ -21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{4}{11} \\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & \frac{4}{11} & -\frac{10}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{37}{2} \\ -21 \\ -\frac{18}{11} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{10}{11} - \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-13) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{37}{2} \\ -21 \\ -\frac{18}{11} - \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-21) \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 6 & 10 \\ 0 & -11 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ \frac{37}{2} \\ -21 \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34 - 10 - 6 \cdot -2 + 8 \cdot -3}{12} = 1 \\ \frac{\frac{37}{2} - \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{15}{2}}{-11} = -3 \\ \frac{-21 + 13}{4} = -2 \\ \frac{3}{11} \cdot \frac{11}{3} = 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór częściowy

Wybór elementu podstawowego w wierszu:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| \; 6 \quad 2 \quad 2 \quad 4$$

Nie przestawia się kolumn

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{matrix} nie\ zmieniamy \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -8 - \frac{12}{6} \cdot (-2) & 6 - \frac{12}{6} \cdot (2) & 10 - \frac{12}{6} \cdot (4) \\ 0 & -13 - \frac{3}{6} \cdot (-2) & 9 - \frac{3}{6} \cdot (2) & 3 - \frac{3}{6} \cdot (4) \\ 0 & 4 + (-2) & 1 + (2) & -18 + (4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 - \frac{12}{6} \cdot (12) \\ 27 - \frac{3}{6} \cdot (12) \\ -38 + (12) \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

4 2 2

Nie przestawia się kolumn

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} nie\ zmieniamy \\ nie\ zmieniamy \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ a_{4j} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{2j} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 - \frac{12}{4} \cdot (2) & 1 - \frac{12}{4} \cdot (2) \\ 0 & 0 & 4 + (2) & -14 + (2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 - \frac{13}{4} \cdot (12) \\ -26 + (1) \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Konieczna jest Zamiana kolumny 4 z 3

$$2 \quad \boxed{5}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 - \frac{13}{5} \cdot (2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -60 - \frac{13}{5} \cdot (-9) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} nie\ zmieniamy \\ nie\ zmieniamy \\ nie\ zmieniamy \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{matrix}$$

Przykład – wybór częściowy

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12 - 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}{6} = 1 \\ \frac{10 - 2 \cdot (-2) - 2}{-4} = -3 \\ \frac{-9 - 2 \cdot (-2)}{-5} = 1 \\ \frac{12}{5} \cdot -\frac{5}{6} = -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa z wyborem elementów głównych

Wybór pełny elementu głównego :

- W **k**-tym kroku eliminacji poszukuje się największego elementu co do modułu zawartego w elementach macierzy złożonej z elementów a_{rs}, takich że $k \leq r \leq n$ oraz $k \leq r \leq n$
- Następnie kolumnę i wiersz zawierające największy element zamienia się z **k**-tym wierszem i **k**-tą kolumną
- Należy pamiętać że przy przestawieniu kolumny konieczne jest także przestawienie odpowiadających im zmiennych

Przykład – wybór pełny

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} 4\ wiersz\ z\ 1 \\ 4\ kolumna\ z\ 1 \\ x_4\ z\ x_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 10 & -8 & 6 & 12 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 34 \\ 27 \\ 12 \end{bmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} nie\ zmieniamy \\ a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{3j} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{1j} \\ a_{4j} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{1j} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -8 - \frac{10}{-18} \cdot 4 & 6 - \frac{10}{-18} \cdot 1 & 12 - \frac{10}{-18} \cdot -6 \\ 0 & -13 - \frac{3}{-18} \cdot 4 & 9 - \frac{3}{-18} \cdot 1 & 3 - \frac{3}{-18} \cdot -6 \\ 0 & -2 - \frac{4}{-18} \cdot 4 & 2 - \frac{4}{-18} \cdot 1 & 6 - \frac{4}{-18} \cdot -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ 34 - \frac{10}{-18} \cdot -38 \\ 27 - \frac{3}{-18} \cdot -38 \\ 12 - \frac{4}{-18} \cdot -38 \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{52}{9} & \frac{59}{9} & \frac{26}{3} \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{116}{9} \\ \frac{62}{3} \\ \frac{32}{9} \end{bmatrix} \Big\| -\frac{37}{3} \text{ jest największe}$$

3 wiersz z 2

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & -\frac{52}{9} & \frac{59}{9} & \frac{26}{3} \\ 0 & -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & \frac{14}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{116}{9} \\ \frac{32}{9} \end{bmatrix} \Big\| \begin{matrix} \text{nie zmieniamy} \\ \text{nie zmieniamy} \\ a_{3j} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{2j} \\ a_{4j} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{2j} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{59}{9} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{55}{6}\right) & \frac{26}{3} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)(2) \\ 0 & 0 & \frac{20}{9} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{55}{6}\right) & \frac{14}{3} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)(2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{116}{9} - \left(-\frac{52}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{62}{3}\right) \\ \frac{32}{9} - \left(-\frac{10}{9}\right)\left(-\frac{3}{37}\right)\left(\frac{62}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -\frac{37}{3} & \frac{55}{6} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{251}{111} & \frac{286}{37} \\ 0 & 0 & \frac{155}{111} & \frac{166}{37} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ \frac{188}{111} \end{bmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} \frac{286}{37}\ jest\ największe \\ 4\ kolumna\ z\ 3 \\ x_1\ z\ x_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & \frac{166}{37} & \frac{155}{111} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ \frac{188}{111} \end{bmatrix} \Bigg| \begin{array}{l} nie\ zmieniamy \\ nie\ zmieniamy \\ nie\ zmieniamy \\ a_{4j} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{3j} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{155}{111} - \left(\frac{166}{37}\right)\left(\frac{37}{286}\right)\left(\frac{251}{111}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ \frac{188}{111} - \left(\frac{166}{37}\right)\left(\frac{37}{286}\right)\left(\frac{356}{111}\right) \end{bmatrix}$$

Przykład – wybór pełny

$$\begin{bmatrix} -18 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -\frac{37}{3} & 2 & \frac{55}{6} \\ 0 & 0 & \frac{286}{37} & \frac{251}{111} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{143} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 \\ \frac{62}{3} \\ \frac{356}{111} \\ -\frac{24}{143} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-38-(4)(-3)-(-6)(1)-(1)(-2)}{-18} = 1 \\ \frac{\frac{62}{3}-\left(\frac{55}{6}\right)(-2)-(2)(1)}{-\frac{37}{3}} = -3 \\ \frac{\frac{356}{111}-\frac{251}{111}(-2)}{\frac{286}{37}} = 1 \\ -\frac{24}{143}\left(\frac{143}{12}\right) = -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

- Jest to zmodyfikowana metoda eliminacji Gaussa równań **Ax=b**
- Dąży się do sprowadzenia macierzy **A** do postaci diagonalnej jedynkowej
- Wtedy w wyniku przekształceń wektor **b** będzie zawierał wartości przyporządkowywane **x** w wyniku rozwiązania
- Przed przystąpieniem do obliczeń w przypadku gdy na przekątnej znajdują się elementy zerowe należy odpowiednio przekształcić macierz **A**
- Metoda ta w literaturze występuje jako metoda Jordana lub metoda eliminacji zupełnej

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana

Algorytm rozwiązywania

1. Dzieli się wszystkie elementy macierzy **A** i wektora **b** z **i=1** wiersza przez element $\mathbf{a_{11}}$
2. Od każdego elementu **i=2,3..n** wiersza macierzy **A** i wektora **b** odejmuje się pierwszy element wiersza pomnożony przez odpowiadający mu element pierwszego wiersza
3. W kolejnych krokach powtarza się czynność traktując elementy z przekątnej jako wyjściowe
4. W efekcie elementy poza przekątną macierzy **A** są zerowane, a na przekątnej przyjmują wartość **1**, natomiast elementy wektora **b** dążą do rozwiązania układu równań

Algorytm metody Gaussa-Jordana

$$
\begin{aligned}
&for\ i = 1 : n \\
&\quad dzielnik = A(i,i) \\
&\quad for\ j = i : n \\
&\qquad A(i,j) = \frac{A(i,j)}{dzielnik} \\
&\quad b(i) = \frac{b(i)}{dzielnik} \\
&\quad for\ j = 1 : n \\
&\qquad if\ j! = i \\
&\qquad\quad mnoznik = A(j,i) \\
&\qquad\quad for\ k = i : n \\
&\qquad\qquad A(j,k) = A(j,k) - mnoznik \cdot A(i,k) \\
&\qquad\quad b(k) = b(k) - mnoznik \cdot b(i)
\end{aligned}
$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \begin{matrix} /a_{11}\ (w\ pierwszej\ kolejności) \\ a_{2i} - a_{21} * a_{1i} \\ a_{3i} - a_{31} * a_{1i} \\ a_{4i} - a_{41} * a_{1i} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6/6 & -2/6 & 2/6 & 4/6 \\ 12 - 12/1 & -8 - 12(-2/6) & 6 - 12(2/6) & 10 - 12(4/6) \\ 3 - 3/1 & -13 - 3(-2/6) & 9 - 3(2/6) & 3 - 3(4/6) \\ -6 + 6/1 & 4 + 6(-2/6) & 1 + 6(2/6) & -18 + 6(2/6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/6 \\ 34 - 12(12/6) \\ 27 - 3(12/6) \\ -38 + 6(2/6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i} - a_{12} * a_{2i} \\ /a_{22}\ (w\ pierwszej\ kolejności) \\ a_{3i} - a_{32} * a_{2i} \\ a_{3i} - a_{32} * a_{2i} \end{matrix}$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right) & \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & -4/-4 & 2/-4 & 2/-4 \\ 0 & -12-(-12)(1) & 8-(-12)\left(-\frac{1}{2}\right) & 1-(-12)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 0 & 2-(2)(1) & 3-(2)\left(-\frac{1}{2}\right) & -14-(2)\left(-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 10/-4 \\ 21-(-12)\left(-\frac{5}{2}\right) \\ -26-(2)\left(-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{2} \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i}-a_{13}*a_{3i} \\ a_{2i}-a_{23}*a_{3i} \\ /a_{33}\ \ (w\ pierwszej\ kolejności) \\ a_{4i}-a_{43}*a_{3i} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) \\ 0 & 0 & 2/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 4-4 & -13-4\left(-\frac{5}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ -9/2 \\ -21-4\left(-\frac{9}{2}\right) \end{bmatrix}$$

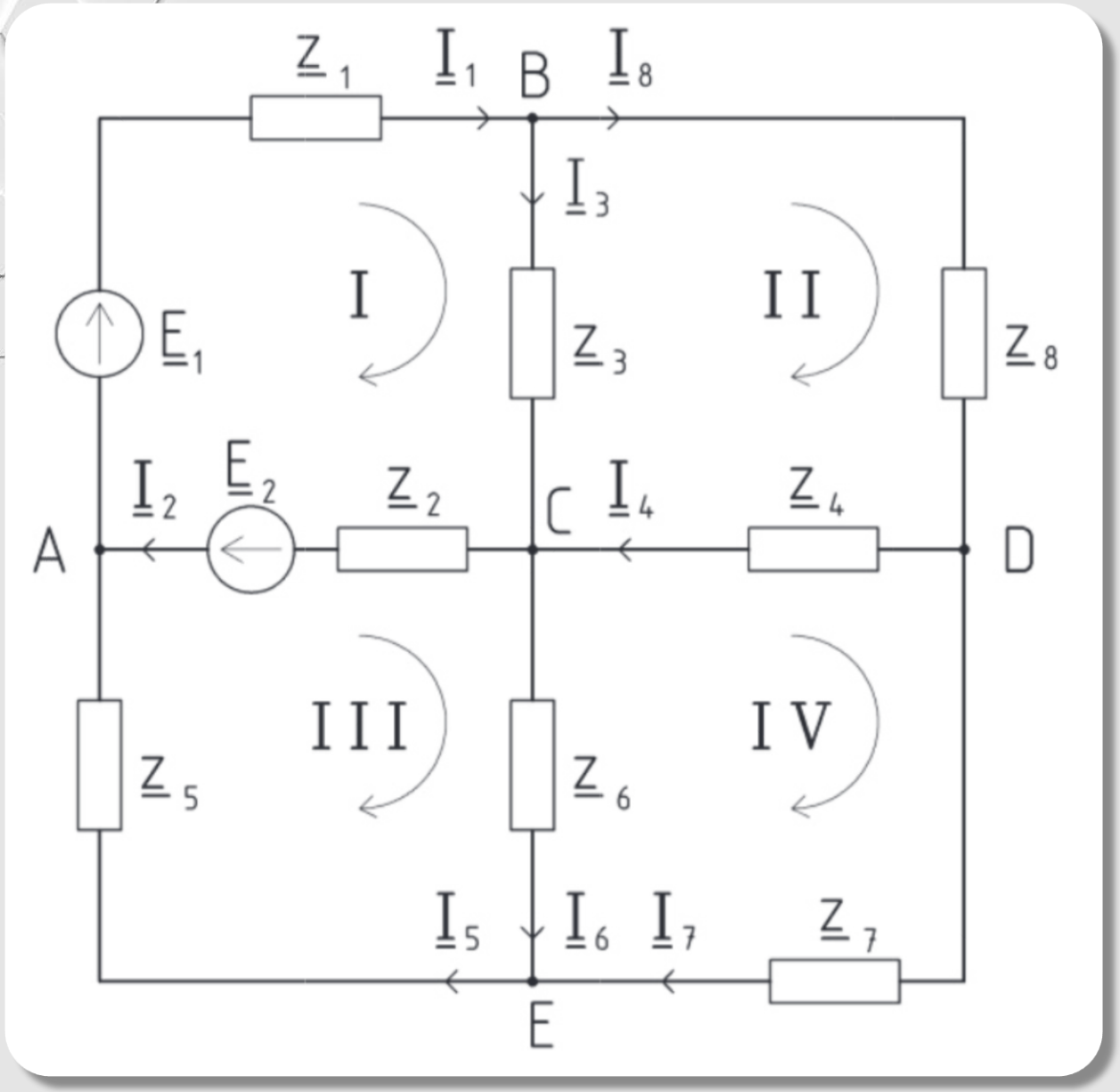
Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} \\ -\frac{19}{4} \\ -\frac{9}{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1i} - a_{14} * a_{4i} \\ a_{2i} - a_{24} * a_{4i} \\ a_{3i} - a_{34} * a_{4i} \\ /a_{44} \ (w\ pierwszej\ kolejności) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} - \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{4} + \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -3/-3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{12} - \frac{11}{12} \\ -\frac{19}{4} + \frac{7}{4} \\ -\frac{9}{2} + \frac{5}{2} \\ -3/-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Przykład –obwód rozgałęziony



$\underline{E}_1 = 100\ \mathrm{V}$

$\underline{E}_2 = j100\ \mathrm{V}$

$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_5 = 10\ \Omega$

$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_8 = j10\ \Omega$

$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_6 = -j10\ \Omega$

$\underline{Z}_4 = \underline{Z}_7 = 20\ \Omega$

Układ równań liniowych

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_3\underline{Z}_3 &= \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\
-\underline{I}_3\underline{Z}_3 + \underline{I}_4\underline{Z}_4 + \underline{I}_8\underline{Z}_8 &= 0 \\
-\underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_5\underline{Z}_5 + \underline{I}_6\underline{Z}_6 &= -\underline{E}_2 \\
-\underline{I}_4\underline{Z}_4 - \underline{I}_6\underline{Z}_6 + \underline{I}_7\underline{Z}_7 &= 0 \\
-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_5 &= 0 \\
\underline{I}_1 - \underline{I}_3 - \underline{I}_8 &= 0 \\
-\underline{I}_4 - \underline{I}_7 + \underline{I}_8 &= 0 \\
-\underline{I}_5 + \underline{I}_6 + \underline{I}_7 &= 0
\end{aligned}
$$

1. Zgodnie z I prawem Kirchhoffa układa się o jedno równanie mniej niż jest węzłów
2. Zgodnie z II prawem Kirchhoffa układa się tyle równań ile jest oczek niezależnych

Macierzowa postać układu równań liniowych

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_8 \\ 0 & -\underline{Z}_2 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{Z}_4 & 0 & -\underline{Z}_6 & \underline{Z}_7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \\ \underline{I}_7 \\ \underline{I}_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\ 0 \\ -\underline{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Macierzowa postać układu równań liniowych

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\underline{Z}_2 & 0 & 0 & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_4 & 0 & 0 & 0 & \underline{Z}_8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{Z}_4 & 0 & -\underline{Z}_6 & \underline{Z}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \\ \underline{I}_6 \\ \underline{I}_7 \\ \underline{I}_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\ -\underline{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Macierzowa postać układu równań liniowych

```
//Macierz Z
Z=[Z1,Z2,Z3,0,0,0,0,0;//1
   0,0,-Z3,Z4,0,0,0,Z8;//2
   0,-Z2,0,0,Z5,Z6,0,0;//3
   0,0,0,-Z4,0,-Z6,Z7,0;//4
   -1,1,0,0,1,0,0,0;//5
   1,0,-1,0,0,0,0,-1;//6
   0,0,0,-1,0,0,-1,1;//7
   0,0,0,0,-1,1,1,0];//8
```

```
nZ=[Z1,Z2,Z3,0,0,0,0,0;//1
   0,-Z2,0,0,Z5,Z6,0,0;//3
   1,0,-1,0,0,0,0,-1;//6
   0,0,-Z3,Z4,0,0,0,Z8;//2
   -1,1,0,0,1,0,0,0; //5
   0,0,0,0,-1,1,1,0;//8
   0,0,0,-Z4,0,-Z6,Z7,0;//4
   0,0,0,-1,0,0,-1,1];//7
```

```
//Wektor Napięć i Prądów źródłowych
b=[E1+E2;0;-E2;0;0;0;0;0];
nb=[E1+E2;-E2;0;0;0;0;0;0];
```

Wyniki obliczeń numerycznych

```
"Rozpływ prądów obliczony rozkładem LL*:"
 201.41346 + 100.76731i
 100.64615 - 100.22115i
-1024.0192 - 3.020D-14i
 100.41346 - 100.63462i
-9.8846154 + 7.6730769i
 496.57692 + 0.4615385i
 50.192308 - 50.278846i
 4.4230769 - 7.1153846i
```

```
.7876106 + 3.1858407i
2.256637 + 6.1504425i
.4424779 + 8.3628319i
.5929204 - 3.8938053i
.4690265 - 2.9646018i
-5.2212389 - 1.6814159i
 0.7522124 - 1.2831858i
 2.3451327 - 5.1769912i
```

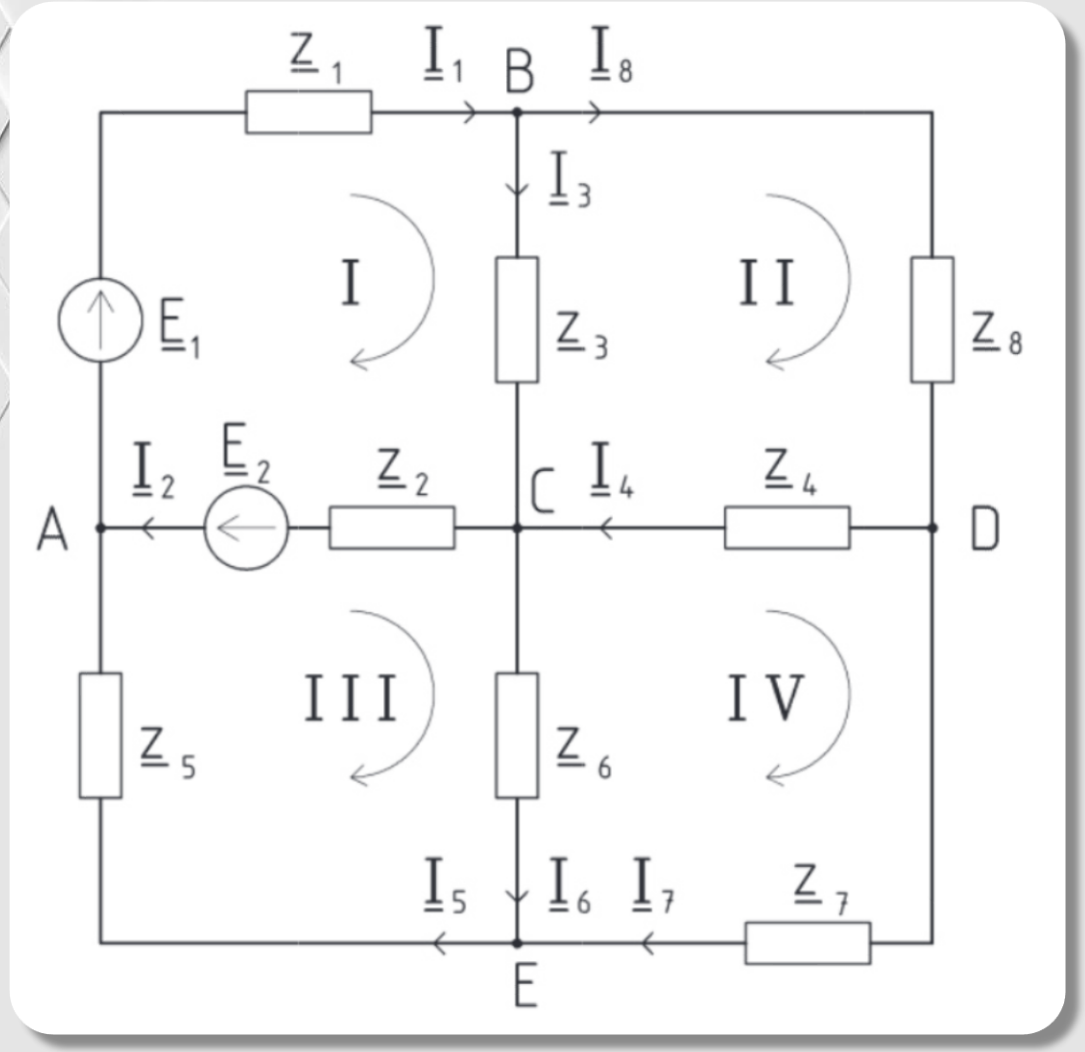
- Rozkład Gaussa-Jordane
- Funkcja *linsolve()*

Brak rozwiązania

- Rozkład LL* - macierz A nie jest hermitowska
- Funkcja *lusolve()* – macierz A jest zespolona

Układ równań liniowych

Metoda prądów oczkowych

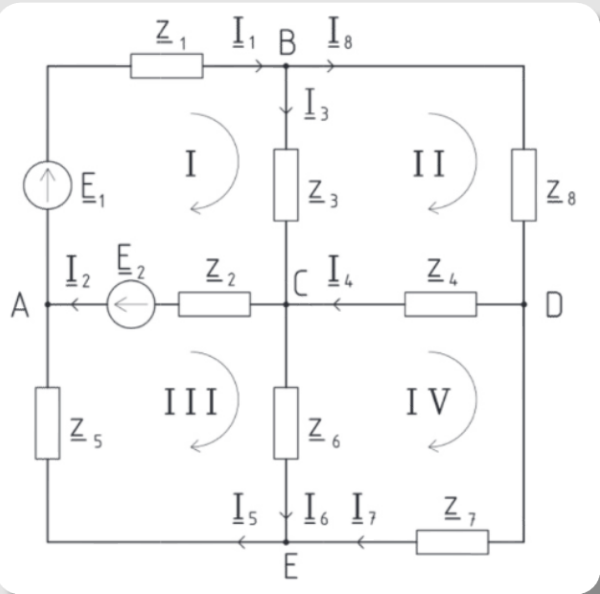


1. Zdefiniowanie prądów oczkowych
   - $\underline{J}_I, \underline{J}_{II}, \underline{J}_{III}, \underline{J}_{IV}$
2. Określenie zależności pomiędzy prądami
   - $\underline{I}_1 = \underline{J}_I$
   - $\underline{I}_2 = \underline{J}_I - \underline{J}_{III}$
   - $\underline{I}_3 = \underline{J}_I - \underline{J}_{II}$
   - $\underline{I}_4 = \underline{J}_{II} - \underline{J}_{IV}$
   - $\underline{I}_5 = \underline{J}_{III}$
   - $\underline{I}_6 = \underline{J}_{III} - \underline{J}_{IV}$
   - $\underline{I}_7 = \underline{J}_{IV}$
   - $\underline{I}_8 = \underline{J}_{II}$

Układ równań liniowych

Metoda prądów oczkowych

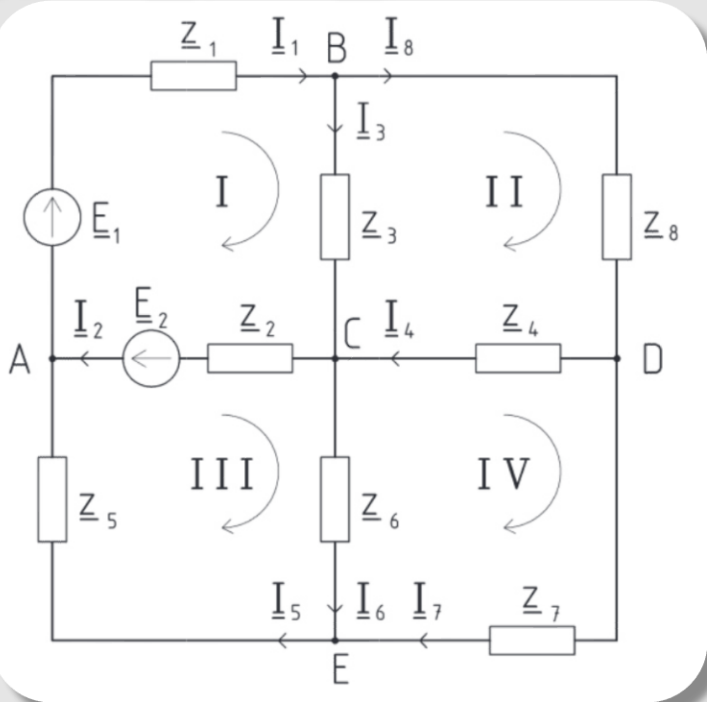
$$\begin{cases} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \cdot \underline{J}_I - \underline{Z}_3 \cdot \underline{J}_{II} - \underline{Z}_2 \cdot \underline{J}_{III} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\ -\underline{Z}_3 \cdot \underline{J}_I + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_8) \cdot \underline{J}_{II} - \underline{Z}_4 \cdot \underline{J}_{IV} = 0 \\ -\underline{Z}_2 \cdot \underline{J}_I + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \cdot \underline{J}_{III} - \underline{Z}_6 \cdot \underline{J}_{IV} = -\underline{E}_2 \\ -\underline{Z}_4 \cdot \underline{J}_{II} - \underline{Z}_6 \cdot \underline{J}_{III} + (\underline{Z}_4 + \underline{Z}_6 + \underline{Z}_7) \cdot \underline{J}_{IV} = 0 \end{cases}$$



Układ równań liniowych

Metoda prądów oczkowych

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_2 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & \underline{Z}_3+\underline{Z}_4+\underline{Z}_8 & 0 & -\underline{Z}_4 \\ -\underline{Z}_2 & 0 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_5+\underline{Z}_6 & -\underline{Z}_6 \\ 0 & -\underline{Z}_4 & -\underline{Z}_6 & \underline{Z}_4+\underline{Z}_6+\underline{Z}_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J}_I \\ \underline{J}_{II} \\ \underline{J}_{III} \\ \underline{J}_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_1+\underline{E}_2 \\ 0 \\ -\underline{E}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Układ równań liniowych

Metoda prądów oczkowych

$$\begin{bmatrix} 10 & 10i & -10i & 0 \\ 10i & 20 & 0 & -20 \\ -10i & 0 & 10 & 10i \\ 0 & -20 & 10i & 40-10i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J}_I \\ \underline{J}_{II} \\ \underline{J}_{III} \\ \underline{J}_{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100+100i \\ 0 \\ -100i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Otrzymano rozwiązanie:

- Rozkład LU
- Rozkłady Gaussa
- Rozkład Gaussa-Jordane
- Funkcja *linsolve()*

```
 7.7876106 + 3.1858407i
 2.3451327 - 5.1769912i
-4.4690265 - 2.9646018i
 0.7522124 - 1.2831858i
```

Część 2.



Układy równań liniowych

Metody iteracyjne

Zakres wykładu

1. Funkcja wbudowana Scilab
2. Kryteria zbieżności
3. Ogólna metoda iteracyjna
4. Metoda Richardsona
5. Metoda Jacobiego
6. Metoda Gaussa-Seidela
7. Metoda Nadrelaksacji – zmodyfikowana Gaussa-Seidela
8. Implementacja metod

Funkcja linsolve()

W środowisku obliczeniowym Scilab dostępna jest funkcja rozwiązująca dowolne układy równań liniowych zapisanych w postaci równania macierzowego **Ax+b=0**

Składnia polecenia:

x=linsolve(A,b);

gdzie: parametrami wejściowymi jest macierz **A** i wektor **b**. Macierz i wektor muszą mieć zgodną liczbę kolumn i wierszy. Macierz **A** jest macierzą kwadratową.

Przy powszechnie stosowanym zapisie układu równań liniowych **Ax=b** funkcję wywołuje się:

x=linsolve(A,-b);

Przykładowe układy równań

$$A \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$B \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \lambda \approx \begin{bmatrix} 4.1562 \\ 5.2934 \\ 6.4562 \\ 16.0942 \end{bmatrix}$$

$$C \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Przykładowe układy równań

```
1  clear;clc;
2  A=[4,1,1,1;1,4,1,1;1,1,4,1;1,1,1,4];
3  B=[5,1,1,1;2,7,2,2;3,3,9,3;4,4,4,11];
4  C=[1,2,-1,3;0,2,4,-2;0,0,4,1;0,0,0,7];
5  b=[10;-10;20;5];
6  x1=linsolve(A,-b);
7  n1=norm(A*x1-b);
8  x2=linsolve(B,-b);
9  n2=norm(B*x2-b);
10 x3=linsolve(C,-b);
11 n3=norm(C*x3-b);
12 disp('Rozwiązanie równanie 1:',x1);
13 disp('Błąd obliczeń norm='+string(n1));
14 disp('Rozwiązanie równanie 2:',x2);
15 disp('Błąd obliczeń norm='+string(n2));
16 disp('Rozwiązanie równanie 3:',x3);
17 disp('Błąd obliczeń norm='+string(n3));
```

```
"Rozwiązanie równanie 1:"
 2.1428571
-4.5238095
 5.4761905
 0.4761905
"Błąd obliczeń norm=1.863D-14"
"Rozwiązanie równanie 2:"
 2.0822397
-2.6684164
 2.4978128
-0.2405949
"Błąd obliczeń norm=1.379D-14"
"Rozwiązanie równanie 3:"
 40.535714
-13.928571
 4.8214286
 0.7142857
"Błąd obliczeń norm=1.434D-13"
```

- W praktyce obliczeniowej pojawiają się jednak dosyć często układy równań liniowych, których wymiar (macierzy A) jest rzędu 10^3 lub nawet większy.
- Prawie zawsze macierze wielkich układów liniowych nie są macierzami pełnymi, ale rzadkimi, tzn. mają niewiele elementów niezerowych.
- Jednym ze sposobów rozwiązywania wielkich układów równań jest stosowanie metod iteracyjnych.

Metody iteracyjne tworzą ciąg przybliżeń

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$$

do rozwiązania układu $A \cdot x = b$. Są szczególnie przydatne dla dużych macierzy rzadkich, gdy przechowywanie rozkładu bezpośredniego jest kosztowne, a wymagane jest rozwiązanie o określonej tolerancji, niekoniecznie z pełną dokładnością arytmetyki.

Każda metoda iteracyjna wymaga:

- przybliżenia początkowego $x^{(0)}$;
- wzoru iteracyjnego;
- warunków zbieżności;
- miary jakości bieżącego przybliżenia;
- tolerancji i maksymalnej liczby iteracji.

Koszt należy oceniać jako iloczyn kosztu jednego kroku i liczby kroków. Szybki krok nie zapewnia krótkiego czasu całkowitego, jeżeli metoda zbiega bardzo wolno.

Kryterium zakończenia obliczeń

Dla przyb
$A \cdot x = b$ re

Obli

gdzie:

- względn

- względn

1. $\eta_k \leq \varepsilon_r$
2. $\delta_k \leq \varepsilon_x$
3. Kryterium maksymalnej liczby iteracji

Wiell

ε_r –

ε_x – tolerancja zmiany rozwiązania

wymaganie	ε_r	ε_x
mała dokładność	10^{-4}	10^{-4}
standardowa	10^{-6}	10^{-6}
duża	10^{-8}	10^{-8}
bardzo duża	10^{-10}–10^{-12}	10^{-10}–10^{-12}

$$\max\left(1, \left\|x^{(k)}\right\|\right)$$

Ogólna metoda iteracyjna

Rozważając rozłożenie macierzy **A** za pośrednictwem macierzy **Q** (łatwo odwracalnej):

$$A = Q - (Q - A)$$

Równanie

$$A \cdot x = b$$

Otrzymuje się

$$Q \cdot x = (Q - A) \cdot x + b$$

Postać iteracyjna

$$Q \cdot x^{(k+1)} = (Q - A) \cdot x^{(k)} + b$$

Po przekształceniu kolejne przybliżenie wyznacza się

$$x^{(k+1)} = (Q - A) \cdot Q^{-1} \cdot x^{(k)} + Q^{-1} \cdot b$$

Ostatecznie

$$x^{(k+1)} = (I - Q^{-1} \cdot A) \cdot x^{(k)} + Q^{-1} \cdot b$$

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$$

Metoda jest zbieżna gdy $max_i|\lambda_i \cdot B| < 1$

Metoda Richardsona

W metodzie Richardsona macierz **Q** przyjmuje wartość maci

$$x$$

Dla poprawy wprowadza si

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \cdot \left(b - A \cdot x^{(k)}\right)$$

Współczynnik relaksacji

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{max}} \qquad \omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

$$0 < \omega < \min_j \frac{2 \cdot Re(\lambda_j)}{|\lambda_j|^2}$$

Wartości własne macierzy można wyznaczyć za pomocą funkcji spec().

```
Lambda = spec(A);
```

Algorytm metody Richardsona

$$for\ i = 1{:}n$$

$$suma_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{(i,j)} \cdot x_i^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot suma_i$$

Współczynnik relaksacji

$$A \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad 0 < \omega < \frac{2}{7} \approx 0.28, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{3+7} = 0.2$$

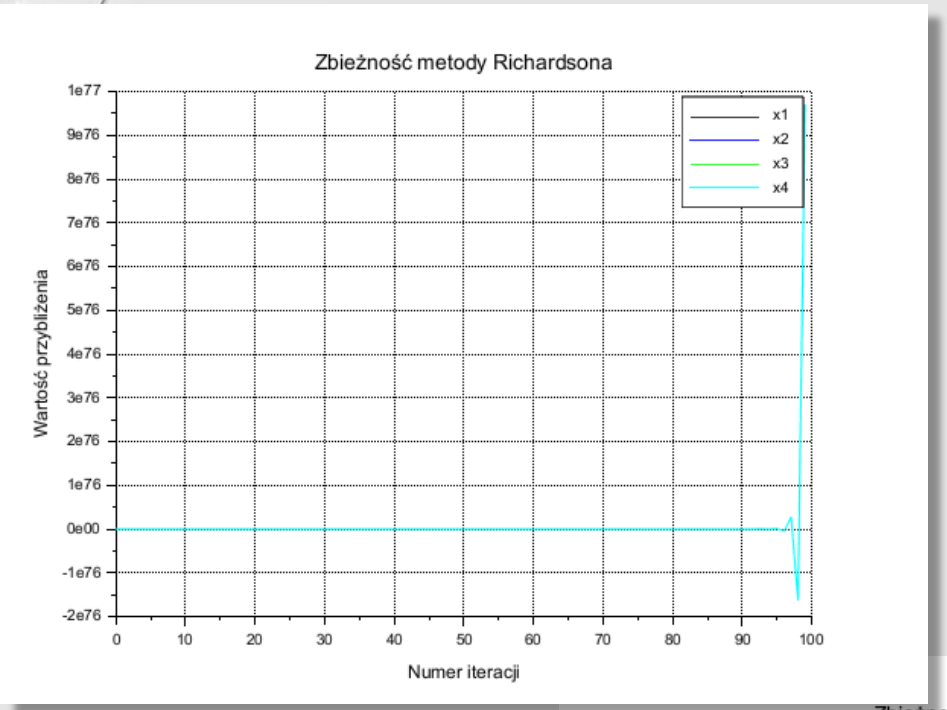
$$B \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \lambda \approx \begin{bmatrix} 4.1562 \\ 5.2934 \\ 6.4562 \\ 16.0942 \end{bmatrix}, \quad 0 < \omega < 0.12, \quad \omega_{opt} \approx 0.09876$$

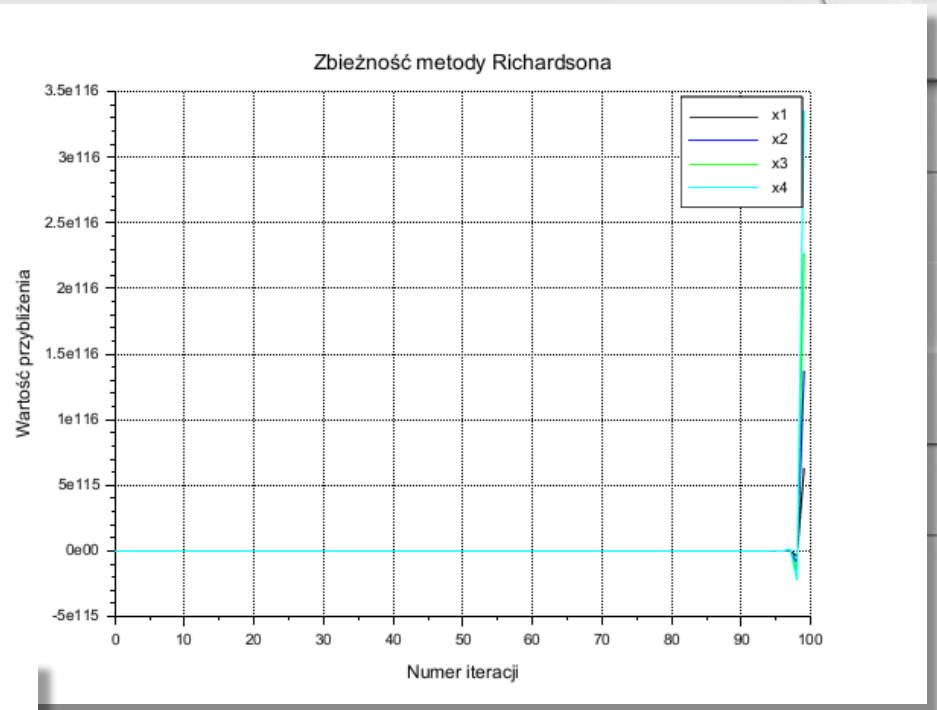
$$C \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad 0 < \omega < \frac{2}{7} \approx 0.28, \quad \omega_{opt} = \frac{2}{1+7} \approx 0.25$$

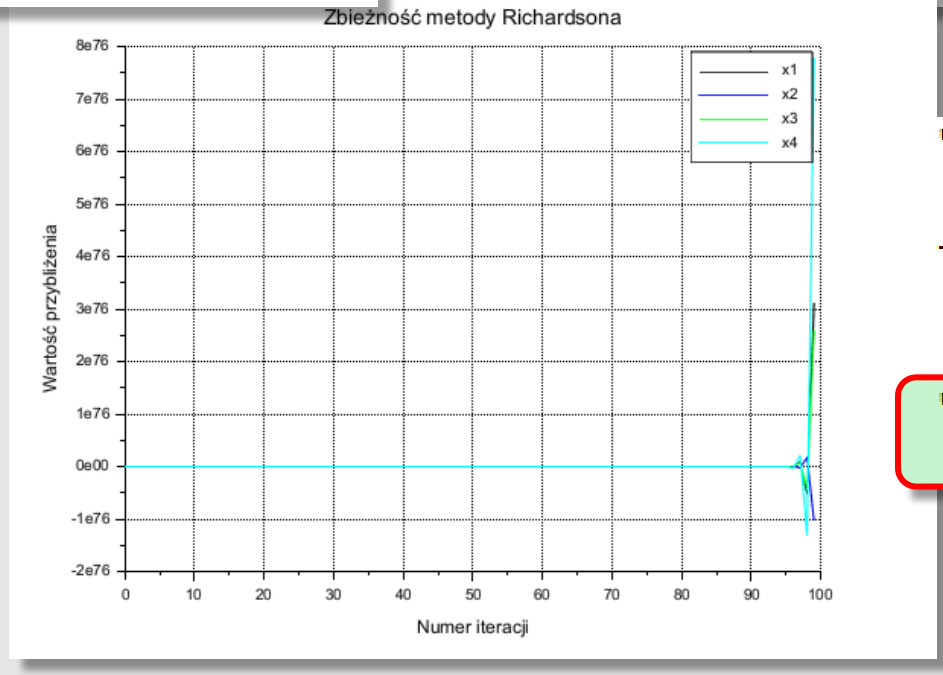
```
clear;
clc;
A = [4,1,1,1;1,4,1,1;1,1,4,1;1,1,1,4];
B = [5,1,1,1;2,7,2,2;3,3,9,3;4,4,4,11];
C = [1,2,-1,3;0,2,4,-2;0,0,4,1;0,0,0,7];
b = [10;-10;20;5];
m = 2000;                    // maksymalna liczba iteracji
w = 0.28;                    // współczynnik relaksacji
delt = 10^-10;               // zadana dokładność
// Przybliżenie początkowe
x = [0;0;0;0];
n = size(A,1);
```

```
13 // ========================================
14 // METODA RICHARDSONA
15 // ========================================
16 for k = 2:m
17     r = b - A*x(:,k-1);
18     x(:,k) = x(:,k-1) + w*r;
19     for i = 1:n
20         c = 0;
21         for j = 1:n
22             c = c + A(i,j)*x(j,k-1);
23         end
24         r(i) = b(i) - c;
25         x(i,k) = x(i,k-1) + w*r(i);
26     end
27     // Kryterium zakończenia
28     nk = norm(b - A*x(:,k))/(norm(A)*norm(x(:,k))+norm(b));
29     dk = norm(x(:,k)-x(:,k-1))/(max(1,norm(x(:,k))));
30     if (nk < delt && dk<delt) then
31         disp("Rozwiązanie osiągnięto po " + string(k-1) + ...
32             " iteracjach.");
33         break;
34     end
35 end
```

```
34 // ============================================
35 // WYNIK
36 // ============================================
37 disp("Przybliżone rozwiązanie układu dla w="+string(w));
38 disp(x(:,k));
39 disp("Norma residuum:");
40 disp(norm(b - A*x(:,k)));
41 // ============================================
42 // WYKRES ZBIEŻNOŚCI
43 // ============================================
44 t = (0:size(x,2)-1)';
45 clf();
46 plot2d(t, x');
47 xlabel("Numer iteracji");
48 ylabel("Wartość przybliżenia");
49 title("Zbieżność metody Richardsona");
50 legend("x1", "x2", "x3", "x4");
51 xgrid();
```



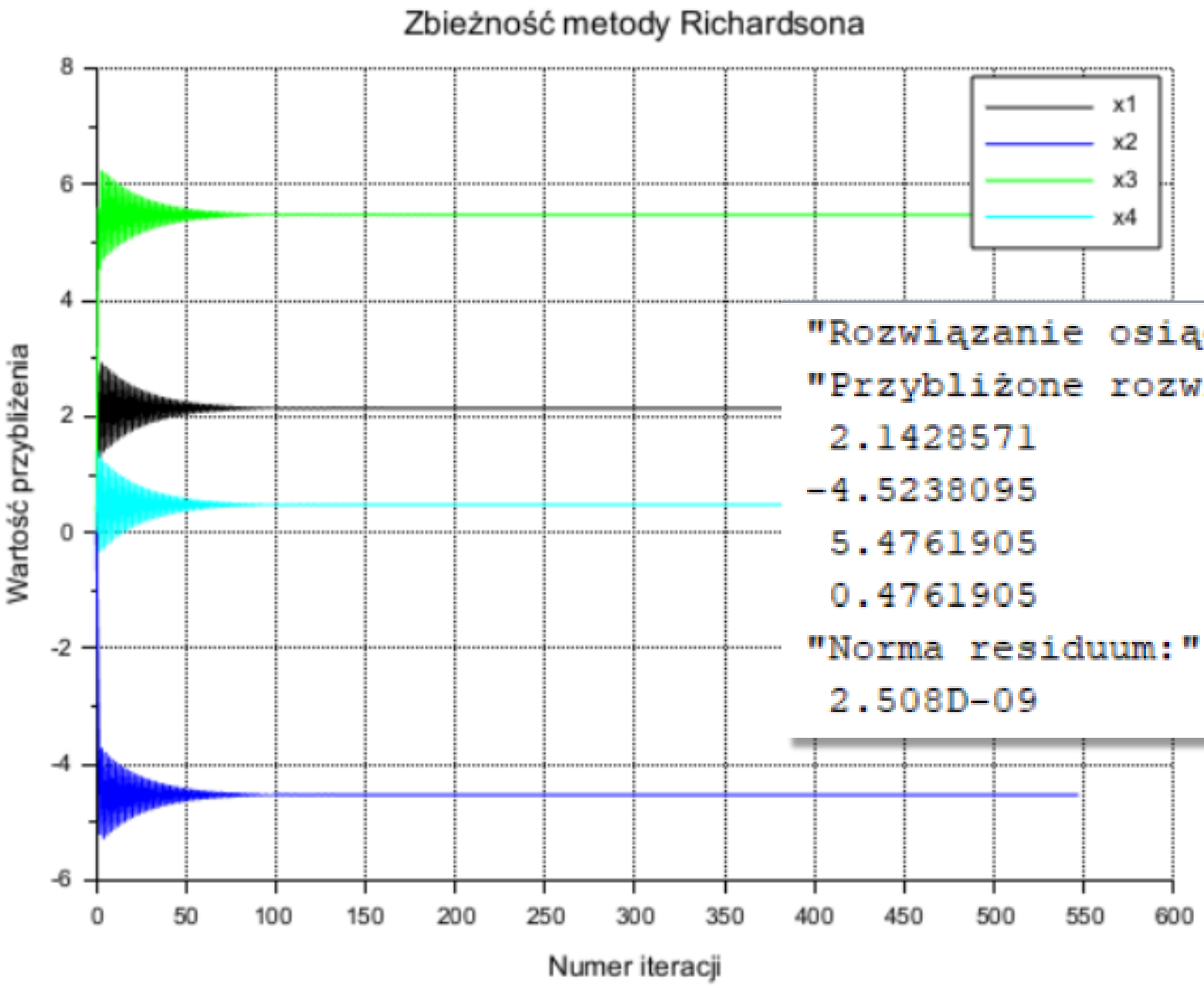




Podstawowa metoda Richardsona

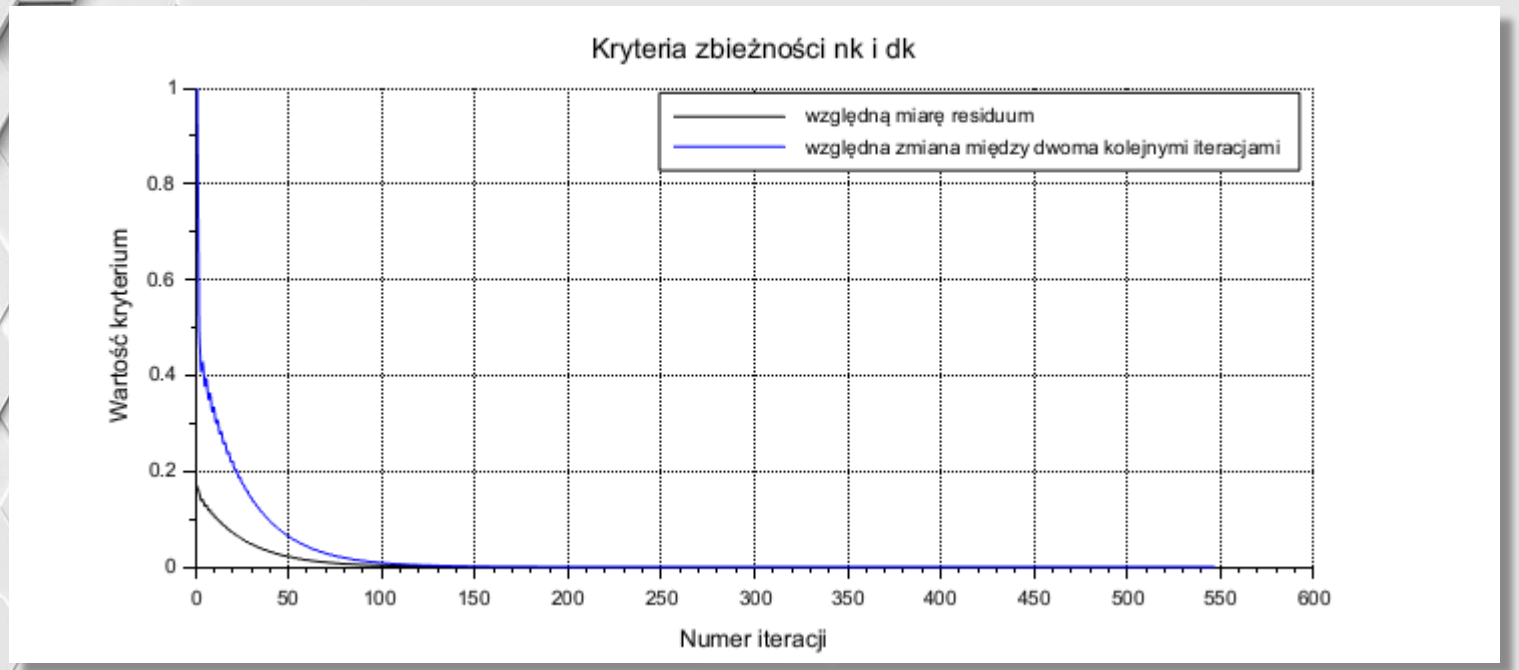
$$\omega = 1$$

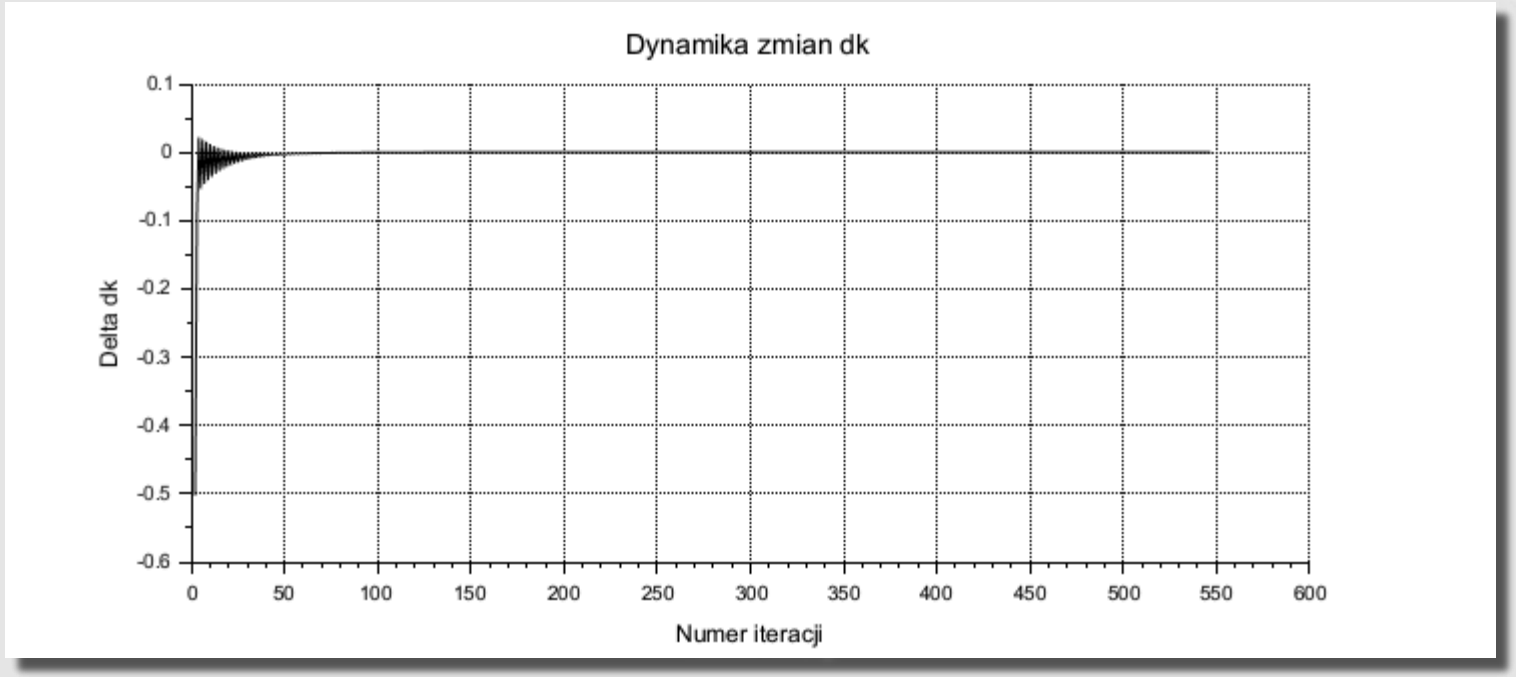
```
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=1"
 3.111D+76
-1.037D+76
 2.593D+76
 7.778D+76
"Norma residuum:"
 6.181D+77
```

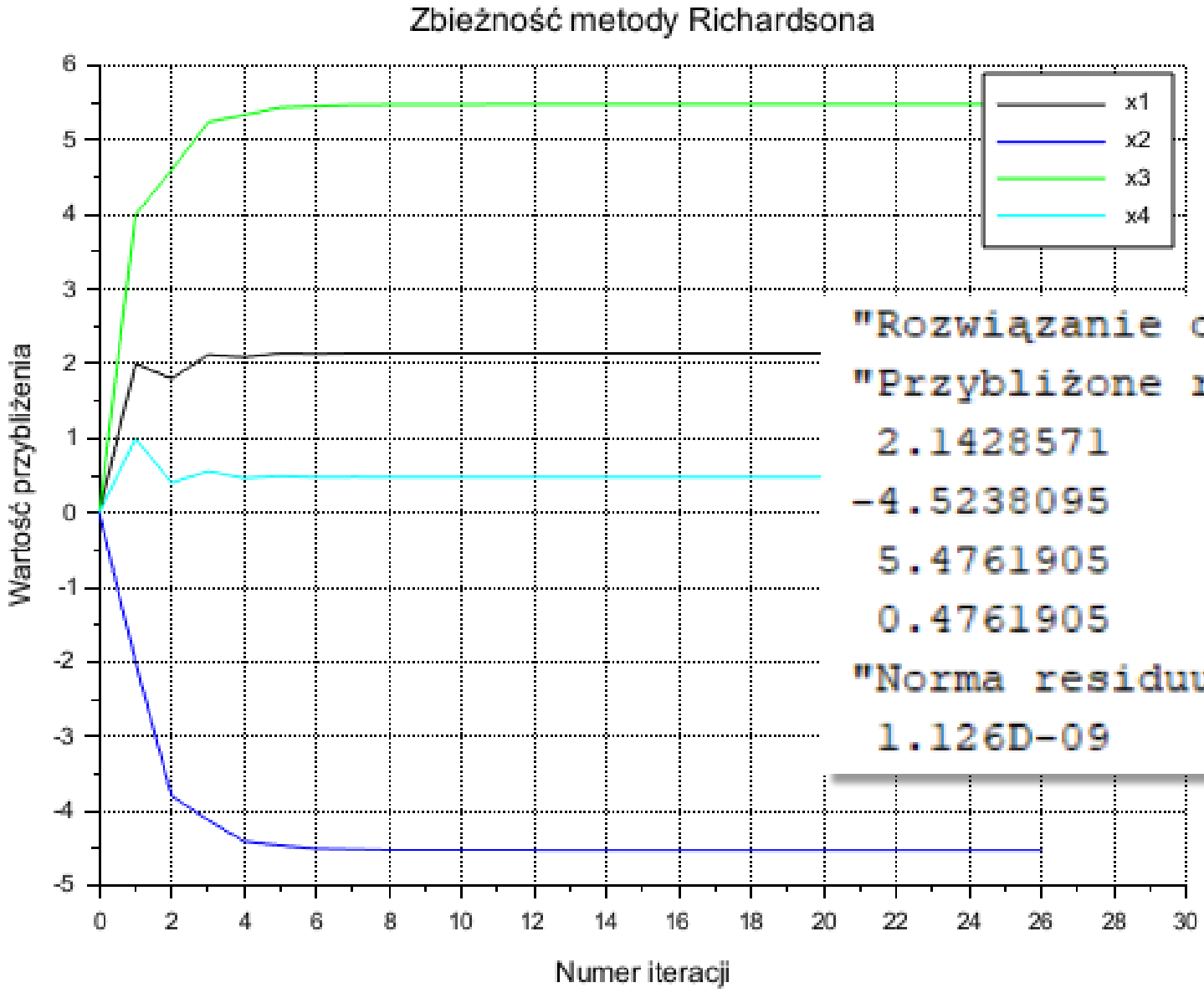



```
"Rozwiązanie osiągnięto po 547 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=0.28"
 2.1428571
-4.5238095
 5.4761905
 0.4761905
"Norma residuum:"
 2.508D-09
```

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

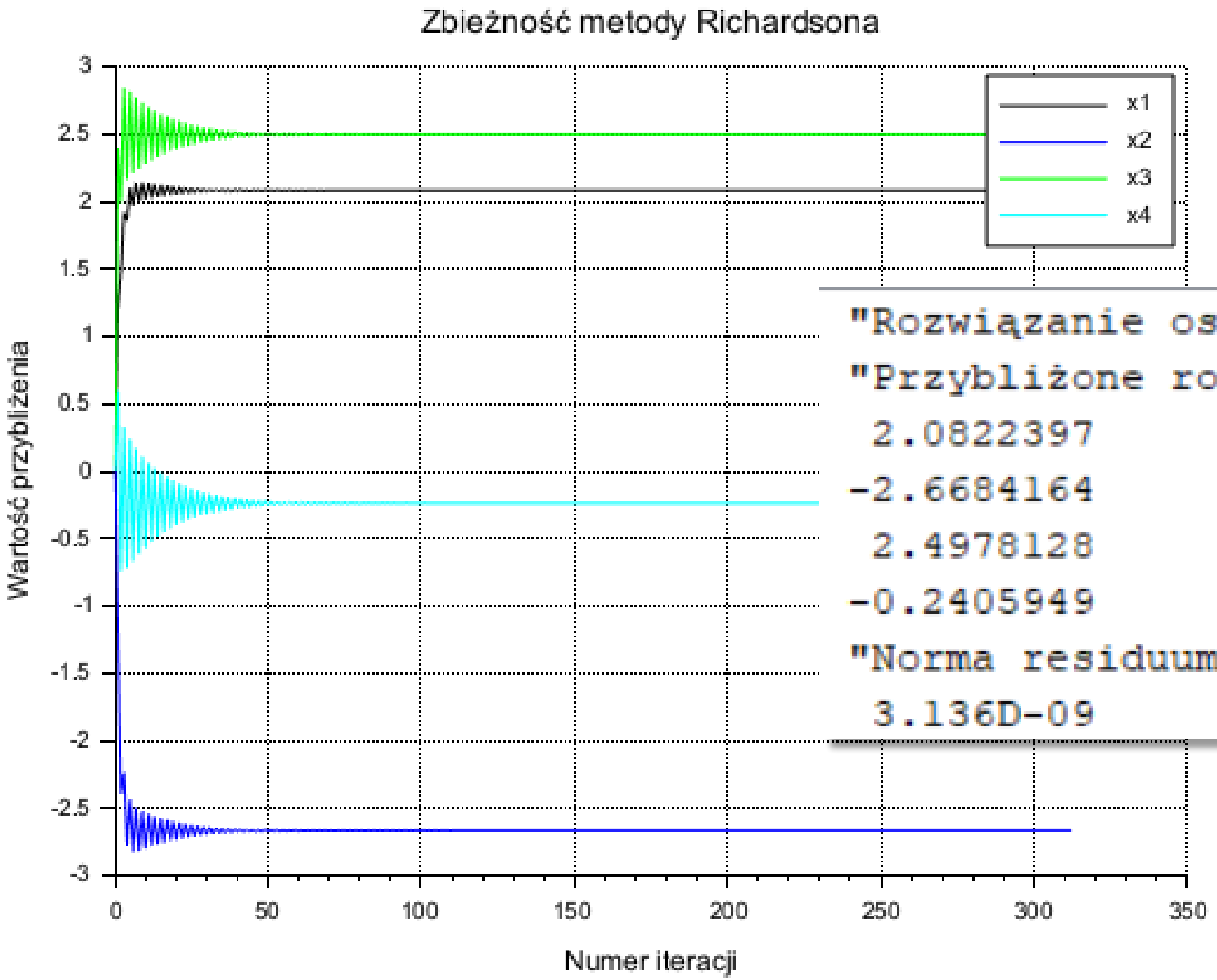

Kryteria zbieżności nk i dk
względną miarę residuum
względna zmiana między dwoma kolejnymi iteracjami
Wartość kryterium
Numer iteracji
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600


Dynamika zmian dk
Delta dk
Numer iteracji
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600



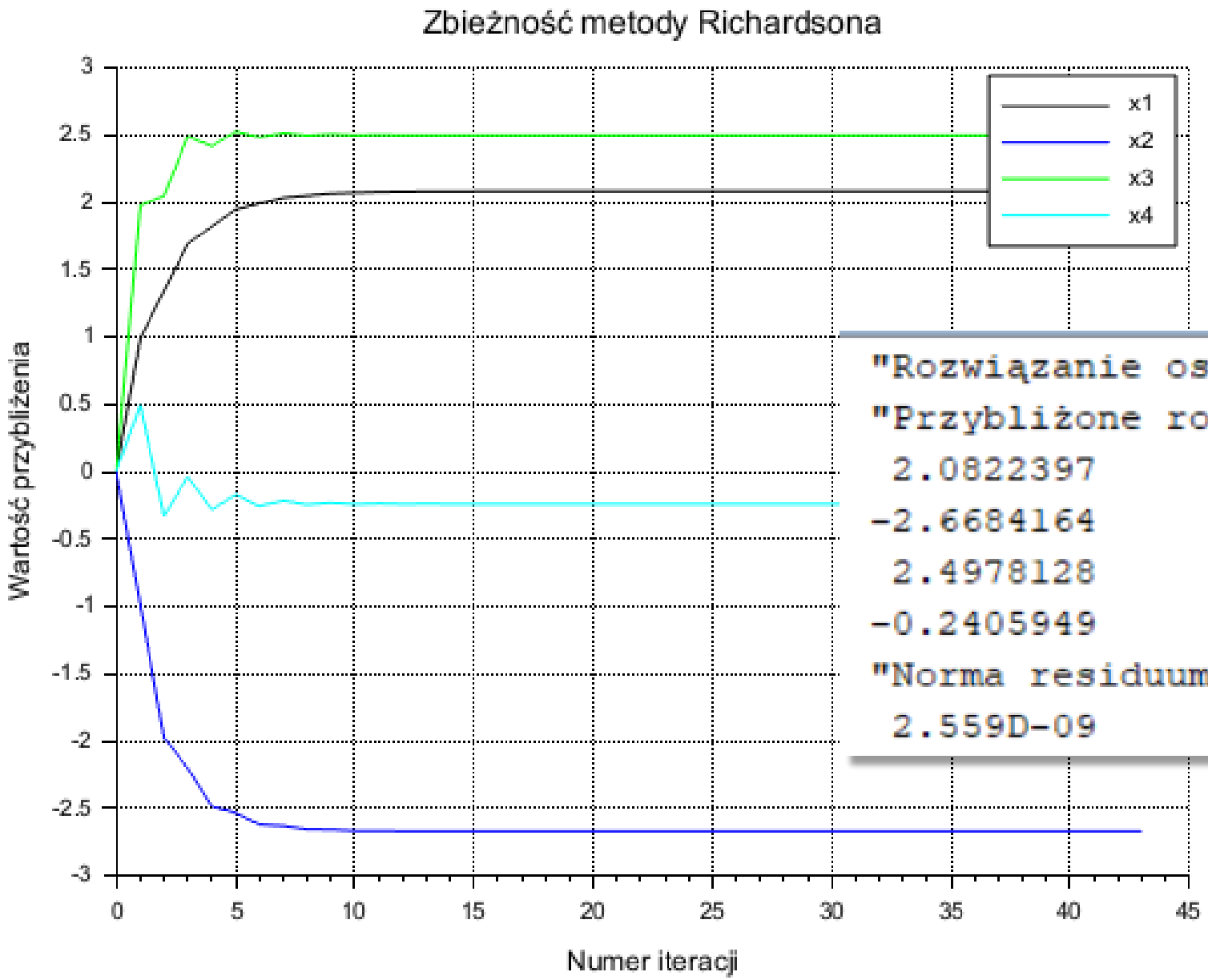

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 26 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=0.2"
 2.1428571
-4.5238095
 5.4761905
 0.4761905
"Norma residuum:"
 1.126D-09
```

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$



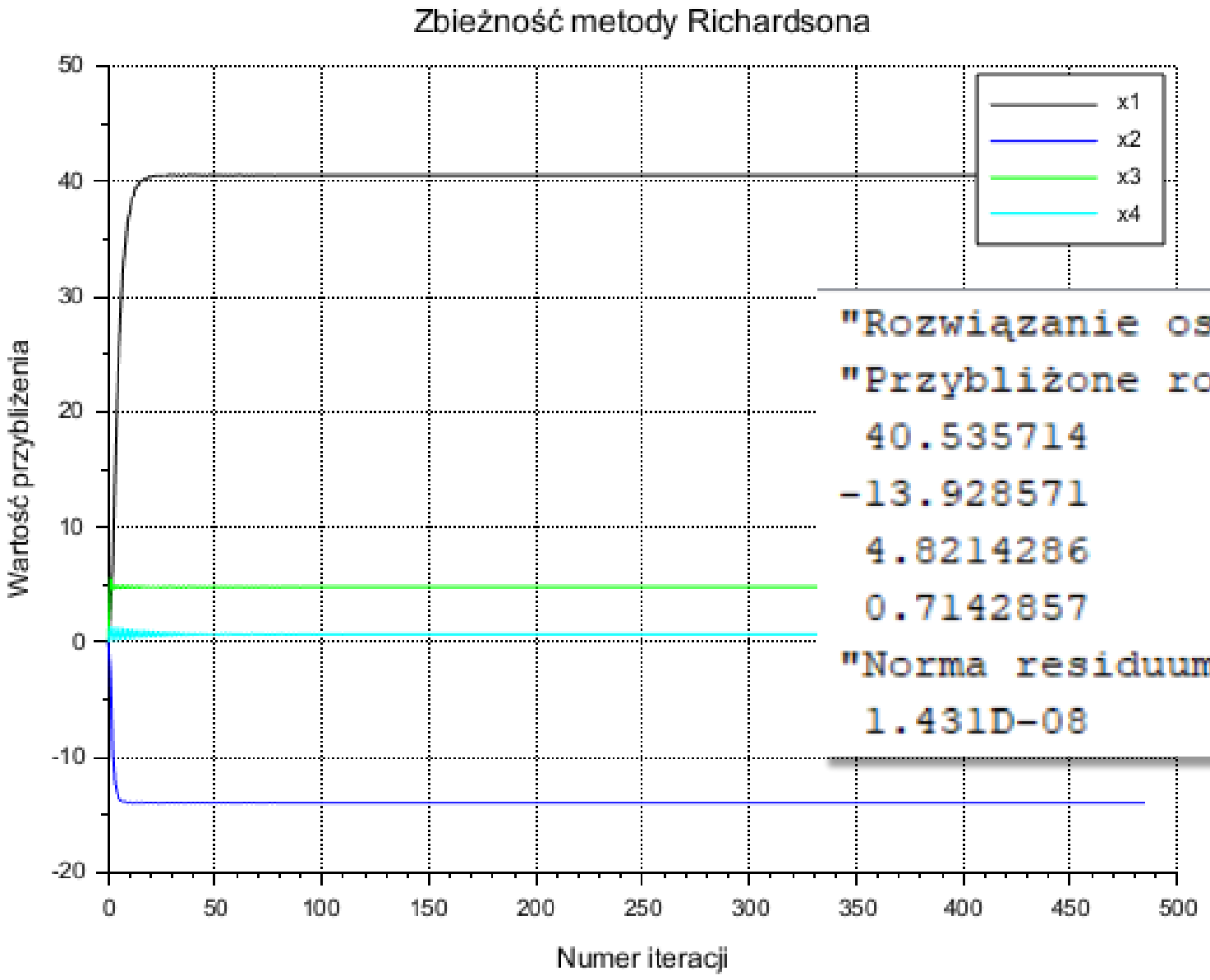

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 312 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=0.12"
 2.0822397
-2.6684164
 2.4978128
-0.2405949
"Norma residuum:"
 3.136D-09
```

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$



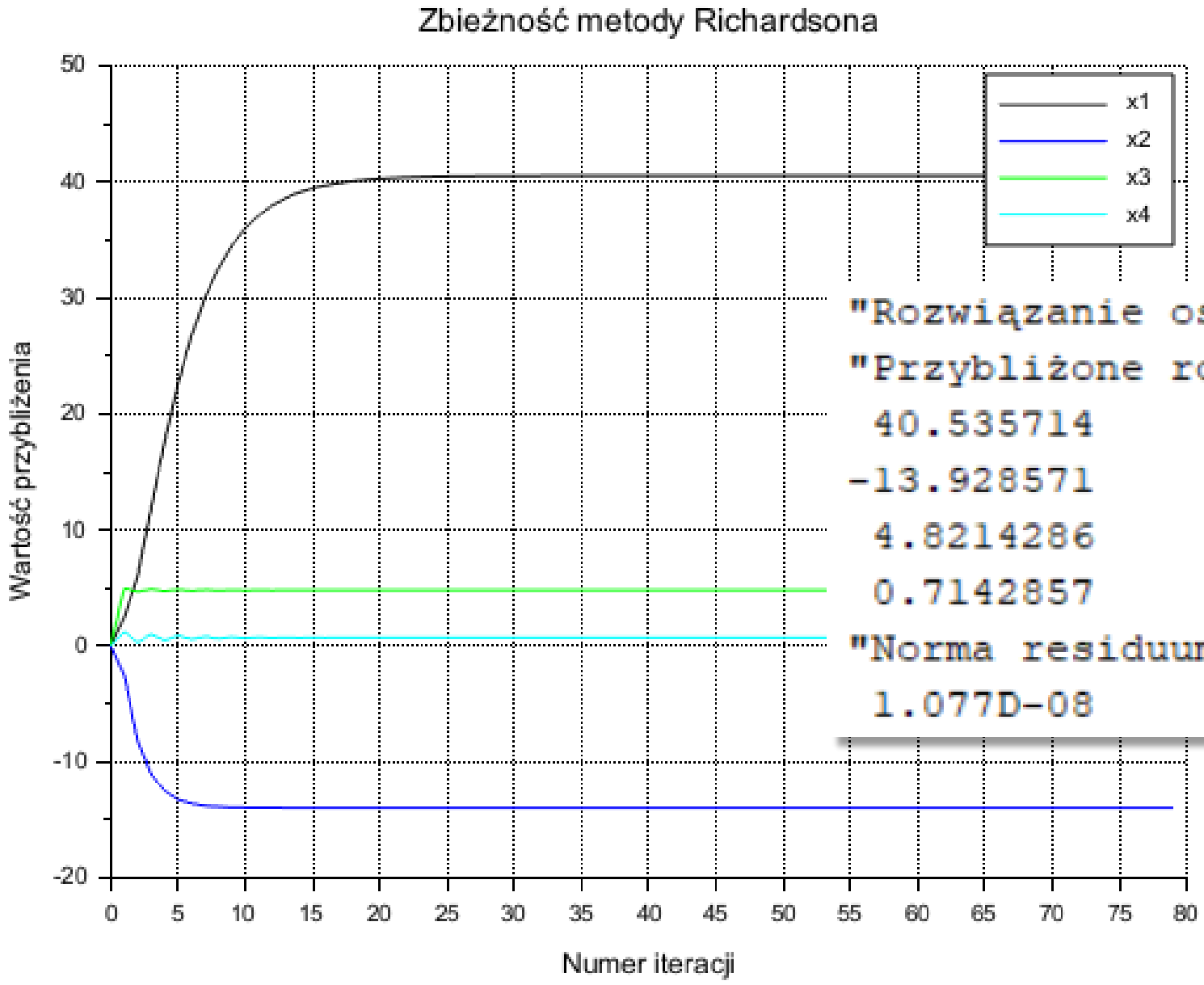

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 43 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=0.09876"
 2.0822397
-2.6684164
 2.4978128
-0.2405949
"Norma residuum:"
 2.559D-09
```

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 485 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=0.28"
 40.535714
-13.928571
 4.8214286
 0.7142857
"Norma residuum:"
 1.431D-08
```

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 79 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=0.25"
 40.535714
-13.928571
 4.8214286
 0.7142857
"Norma residuum:"
 1.077D-08
```

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Metoda Jacobiego

W pierwszym kroku zastępuje się macierz **A** układem równoważnym w postaci **L + D + U,**

gdzie:

L - macierz trójkątna dolna,

D - macierz diagonalna,

U - macierz trójkątna górna.

Układ równań w postaci **Ax=b** można więc zapisać jako **(L+D+U)x=b**

Metoda Jacobiego

Układ równań **(L+D+U)x=b** można przekształcić do postaci:

$$D \cdot x^{(k+1)} = -(L + U) \cdot x^{(k)} + b$$

Jeżeli macierz **D** jest nieosobliwa możemy układ równań zapisać jako:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} \cdot (L + U) \cdot x^{(k)} + D^{-1} \cdot b$$

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$$

Istotne jest więc takie przekształcenie macierzy **A** (działaniami elementarnymi) aby na przekątnej nie było wyrazów **0**.

Algorytm metoda Jacobiego

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} \cdot (L + U) \cdot x^{(k)} + D^{-1} \cdot b$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{-\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{n,j} \cdot x_j^{(k)} + \sum_{j=n+1}^{m} a_{n,j} \cdot x_j^{(k)}\right) + b_n}{a_{n,n}}, dla\ n = 1,2, \dots, m$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{-\sum_{(j=1, j \neq n)}^{m} a_{n,j} \cdot x_j^{(k)} + b_n}{a_{n,n}}, dla\ n = 1,2, \dots, m;\ a_{n,n} \neq 0$$

Metoda Jacobiego - zbieżność

- Macierz **A** jest **niereducowalna,** jeżeli poprzez przestawienie wierszy i kolumn nie można jej sprowadzić do postaci blokowej górnej trójkątnej.
- Macierz **A** o wymiarze n x n nazywamy **diagonalnie dominującą,** jeśli dla i=1,2,...,n zachodzi nierówność:

$$|a_{n,n}| \geq \sum_{i=1,j=1,(i\neq j)}^{m,m} |a_{i,j}|$$

Algorytm metoda Jacobiego

$$for\ i = 1:m$$

$$suma(i) = \sum_{j=1,(j\neq i)}^{m} a(i,j) \cdot x_k(j)$$

$$x_{k+1}(i) = \frac{b(i) - suma(i)}{a(i,i)}$$

Algorytm metoda Jacobiego

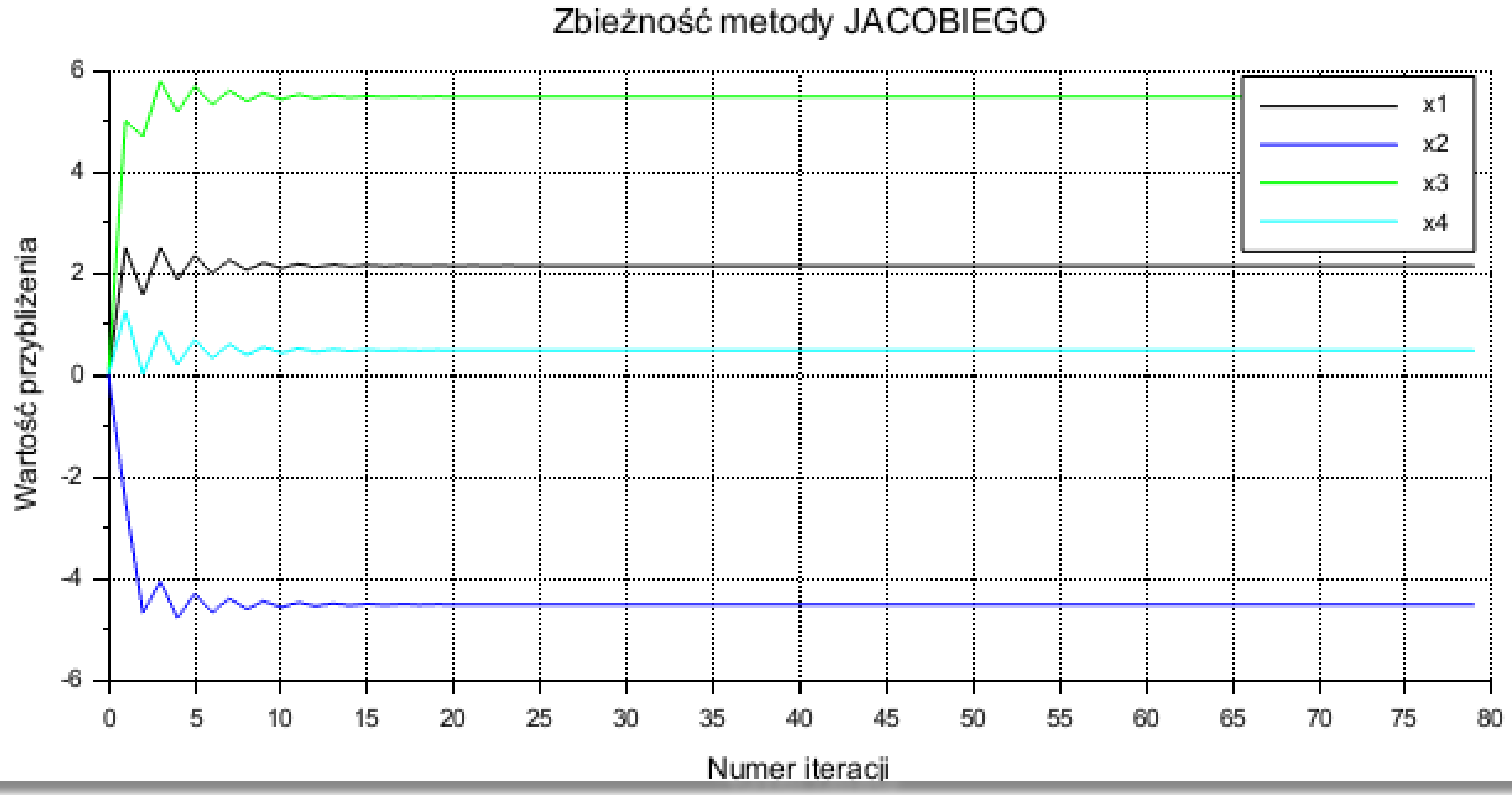
```
18 for k = 2:m
19     for i = 1:n
20         c = 0;
21         for j = 1:n
22             if j==i then continue;
23             end
24             c = c + A(i,j)*x(j,k-1);
25         end
26         x(i,k) = (b(i)-c)/A(i,i);
27     end
28     // Kryterium zakończenia
29     nk(k-1) = norm(b - A*x(:,k))/(norm(A)*norm(x(:,k))+norm(b));
30     dk(k-1) = norm(x(:,k)-x(:,k-1))/(max(1,norm(x(:,k))));
31     if (nk(k-1) < delt && dk(k-1)<delt) then
32         disp("Rozwiązanie osiągnięto po " + string(k-1) + ...
33             " iteracjach.");
34         break;
35     end
36 end
```

Algorytm metoda Jacobiego

```
for k = 2:m
    x(:,k) = -inv(D)*(L+U)*x(:,k-1)+inv(D)*b;
    // Kryterium zakończenia
    nk = norm(b - A*x(:,k))/(norm(A)*norm(x(:,k))+norm(b));
    dk = norm(x(:,k)-x(:,k-1))/(max(1,norm(x(:,k))));
    if (nk < delt && dk<delt) then
        disp("Rozwiązanie osiągnięto po " + string(k-1) + ...
            " iteracjach.");
        break;
    end
end
```

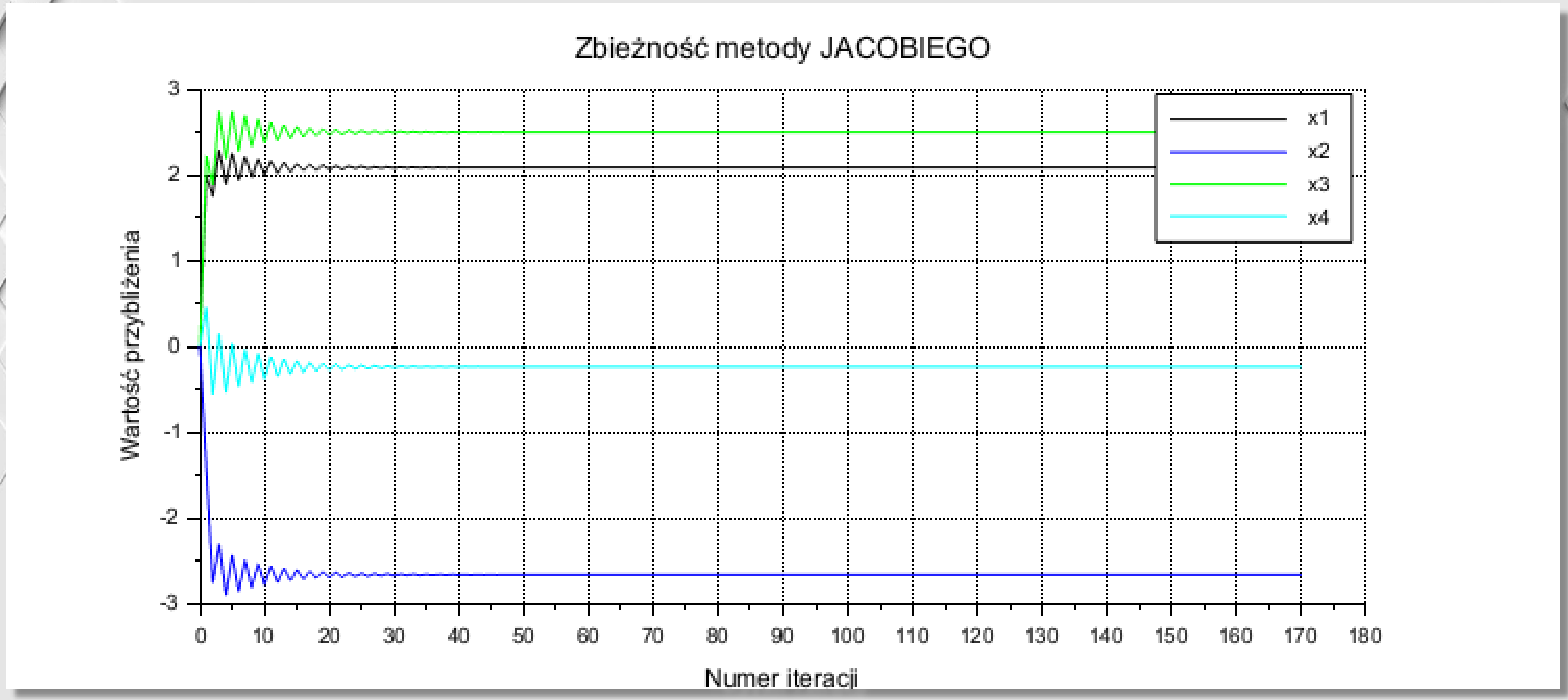
```
// Macierz diagonalna
D = diag(diag(A));
// Część dolnotrójkątna bez przekątnej
L = tril(A, -1);
// Część górnotrójkątna bez przekątnej
U = triu(A, 1);
```

```
L = [0,0,0,0;1,0,0,0;1,1,0,0;1,1,1,0];
D = [4,0,0,0;0,4,0,0;0,0,4,0;0,0,0,4];
U = [0,1,1,1;0,0,1,1;0,0,0,1;0,0,0,0];
```



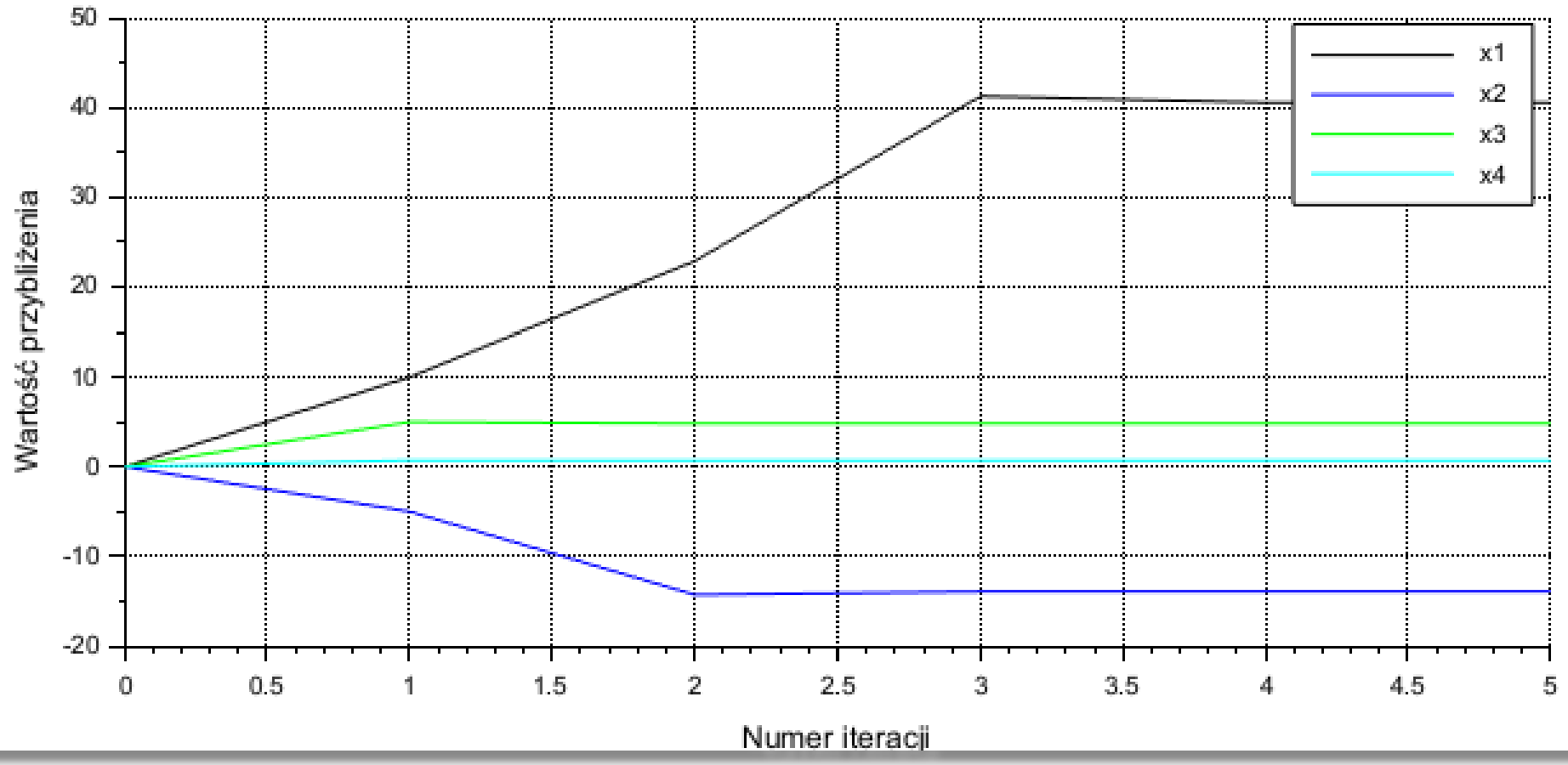

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 79 iteracjach."
 2.1428571
-4.5238095
 5.4761905
 0.4761905
"Norma residuum:"
 1.686D-09
```

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 170 iteracjach."
 2.0822397
-2.6684164
 2.4978128
-0.2405949
"Norma residuum:"
 3.036D-09
```

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 5 iteracjach."
 40.535714
-13.928571
 4.8214286
 0.7142857
"Norma residuum:"
 5.617D-15
```

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Metoda Gaussa-Seidela

Podobnie jak w metodzie Jacobiego, pierwszym krokiem jest rozbicie macierzy **A** układem równoważnym w postaci **L + D + U,**

gdzie:

L - macierz trójkątna dolna,

D – macierz diagonalna,

U - macierz trójkątna górna.

Układ równań w postaci **Ax=b** można więc zapisać jako **(L+D+U)x=b**

Metoda Gaussa-Seidela

Jest modyfikacją metody Jacobiego.

Wychodząc z równania:

$$(L + D + U) \cdot x = b,$$

można zależność tą przekształcić do postaci:

$$(L + D) \cdot x^{(k+1)} = -U \cdot x^{(k)} + b,$$

a stąd:

$$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1} \cdot U \cdot x^{(k)} + (L + D)^{-1} \cdot b,$$

Uproszczając otrzymuje się zależność końcową

$$x^{(k+1)} = \left(-L \cdot x^{(k+1)} - U \cdot x^{(k)} + b\right) \cdot D^{-1},$$

Metoda Gaussa-Seidela

Iteracyjną postać wyznaczania poszczególnych przybliżeń rozwiązania układu równań liniowych

$$x^{(k+1)} = \left(-L \cdot x^{(k+1)} - U \cdot x^{(k)} + b\right) \cdot D^{-1},$$

można po przekształceniach zapisać w postaci iteracyjnej:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i=1} a_{i,j} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} + b_i}{a_{i,i}}$$

gdzie i=1,2,…,n

Algorytm metody Gaussa-Seidela

$$for\ i = 1{:}n$$

$$suma_I = \sum_{j=1,(j<i)}^{n} a(i,j) \cdot x_{k+1}(j)$$

$$suma_{II} = \sum_{j=1,(j>i)}^{n} a(i,j) \cdot x_k(j)$$

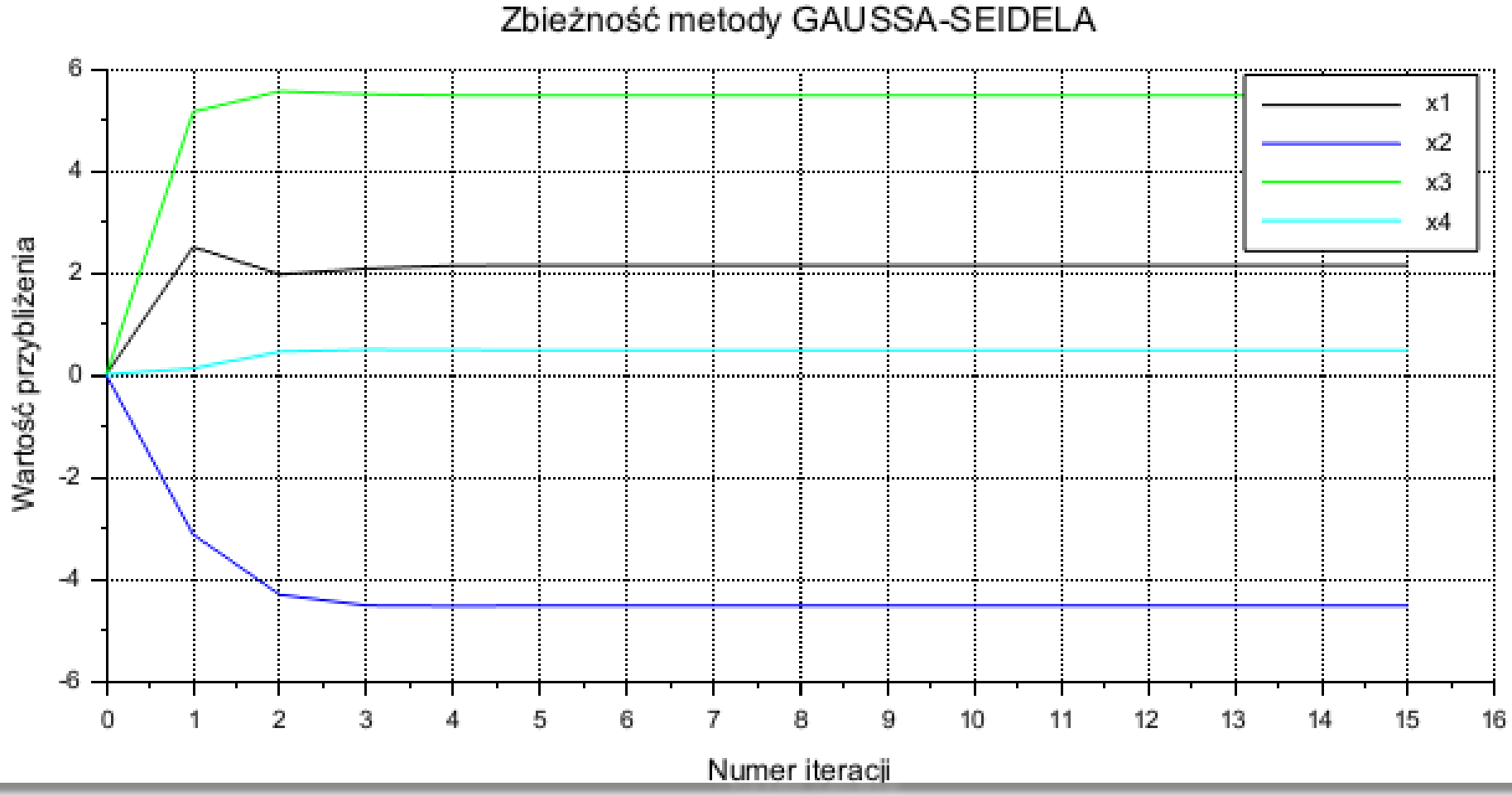
$$x_{k+1}(i) = \frac{b(i) - suma_I - suma_{II}}{a(i,i)}$$

Algorytm metody Gaussa-Seidela

```
18  for k = 2:m
19      for i = 1:n
20          suma_1 = 0;
21          suma_2=0;
22          for j = 1:n
23              if j>=i then continue;
24              end
25              suma_1 = suma_1 + A(i,j)*x(j,k);
26          end
27          for j = 1:n
28              if j<=i then continue;
29              end
30              suma_2 = suma_2 + A(i,j)*x(j,k-1);
31          end
32          x(i,k) = (b(i)-suma_1-suma_2)/A(i,i);
33      end
```

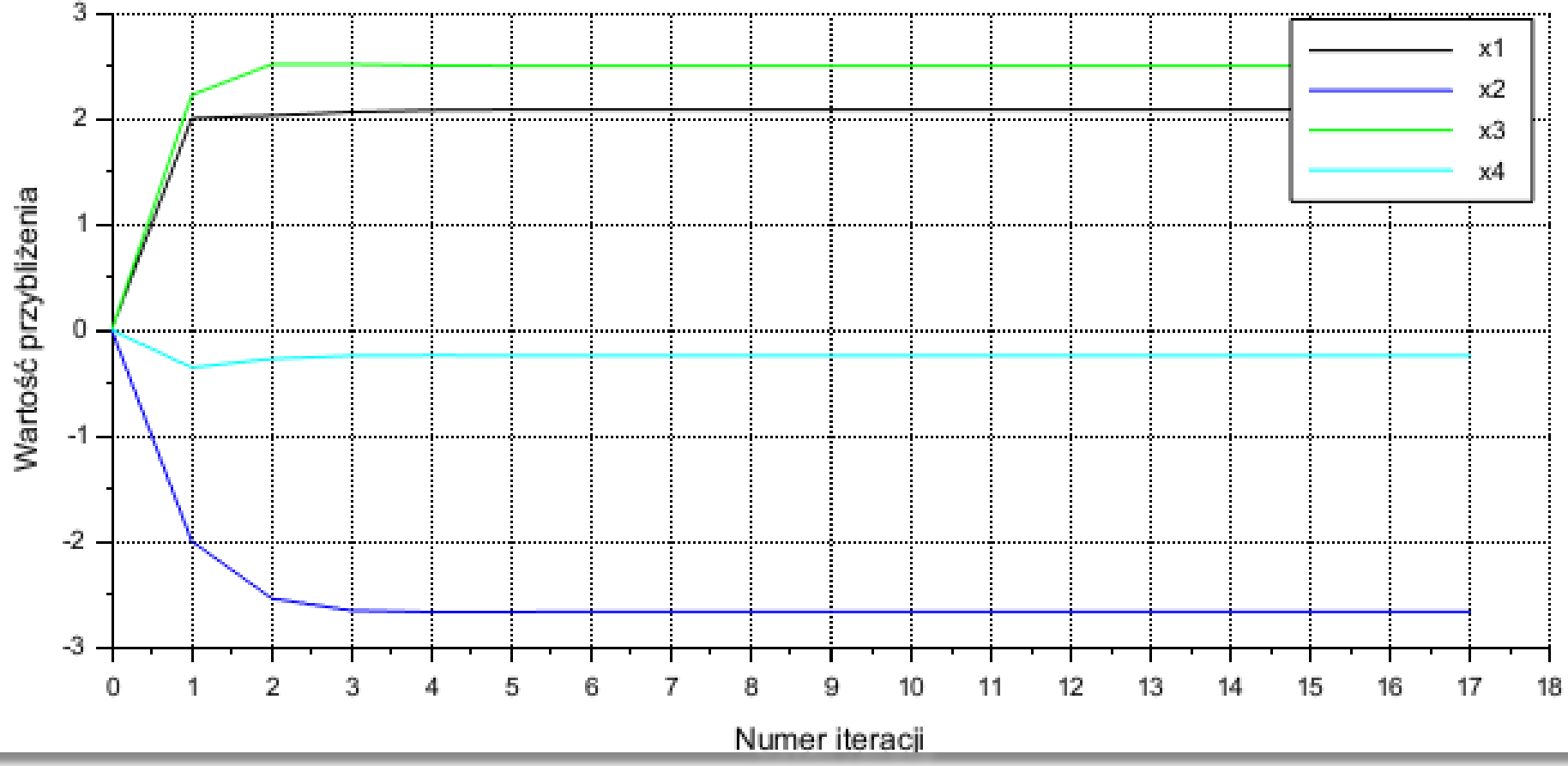
Algorytm metody Gaussa-Seidela

```
22 for k = 2:m
23     x(:,k) = -inv(L+D)*U*x(:,k-1)+inv(L+D)*b;
24     // Kryterium zakończenia
25     nk = norm(b - A*x(:,k))/(norm(A)*norm(x(:,k))+norm(b));
26     dk = norm(x(:,k)-x(:,k-1))/(max(1,norm(x(:,k))));
27     if (nk < delt && dk<delt) then
28         disp("Rozwiązanie osiągnięto po " + string(k-1) + ...
29             " iteracjach.");
30         break;
31     end
32 end
```



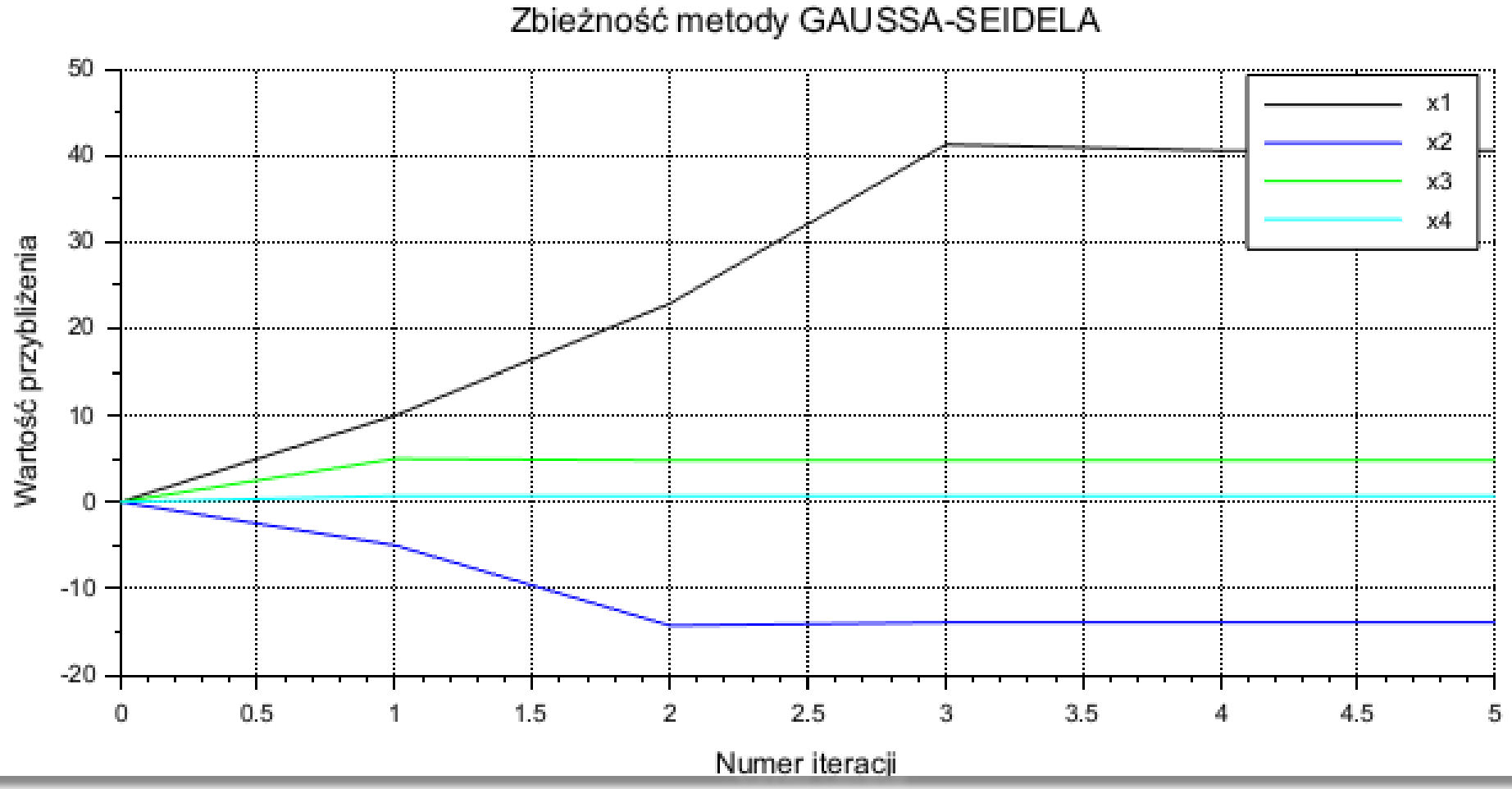

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 15 iteracjach."
 2.1428571
-4.5238095
 5.4761905
 0.4761905
"Norma residuum:"
 3.409D-10
```

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 17 iteracjach."
 2.0822397
-2.6684164
 2.4978128
-0.2405949
"Norma residuum:"
 1.826D-10
```

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 5 iteracjach."
 40.535714
-13.928571
 4.8214286
 0.7142857
"Norma residuum:"
 5.617D-15
```

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Metoda nadrelaksacji

Metoda sukcesywnej relaksacji wprowadza współczynnik ω do metody Gaussa-Seidela.

- $0 < \omega < 1$ - **podrelaksacja**, czyli ostrożniejsze poprawki;
- $\omega = 1$ - **metoda Gaussa-Seidela**;
- $1 < \omega < 2$ - **nadrelaksacja**, mogąca przyspieszyć zbieżność.

$$\omega \cdot (L + D + U) \cdot x = \omega \cdot b$$

…

$$(D + \omega \cdot L) \cdot x^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot D \cdot x^{(k)} - \omega \cdot U \cdot x^{(k)} + \omega \cdot b$$

…

$$D \cdot x^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot D \cdot x^{(k+1)} - \omega\left(L \cdot x^{(k)} + U \cdot x^{(k)} - b\right)$$

Algorytm iteracyjny metody nadrelaksacji

$$for\ i = 1{:}n$$

$$suma_I = \sum_{j=1,(j<i)}^{n} a(i,j) \cdot x_{k+1}(j)$$

$$suma_{II} = \sum_{j=1,(j>i)}^{n} a(i,j) \cdot x_k(j)$$

$$x_{k+1}(i) = \frac{(1-\omega) \cdot a(i,i) \cdot x_k(i)}{a(i,i)} + \omega \frac{b(i) - suma_I - suma_{II}}{a(i,i)}$$

Algorytm iteracyjny metody nadrelaksacji

```
18 for k = 2:m
19     for i = 1:n
20         suma_1 = 0;
21         suma_2 = 0;
22         for j = 1:n
23             if j>=i then continue;
24             end
25             suma_1 = suma_1 + A(i,j)*x(j,k);
26         end
27         for j = 1:n
28             if j<=i then continue;
29             end
30             suma_2 = suma_2 + A(i,j)*x(j,k-1);
31         end
32         x(i,k) =((1-w)*A(i,i)*x(i,k-1)+w*(b(i)-suma_1-suma_2))/A(i,i);
33     end
```

Algorytm iteracyjny metody nadrelaksacji

```
27 for k = 2:m
28     x(:,k) = inv(D+w*L)*((1-w)*D-w*U)*x(:,k-1)+w*inv(D+w*L)*b
29     // Kryterium zakończenia
30     nk = norm(b - A*x(:,k))/(norm(A)*norm(x(:,k))+norm(b));
31     dk = norm(x(:,k)-x(:,k-1))/(max(1,norm(x(:,k))));
32     if (nk < delt && dk<delt) then
33         disp("Rozwiązanie osiągnięto po " + string(k-1) + ...
34             " iteracjach.");
35         break;
36     end
37 end
```

Optymalna wartość współczynnika relaksacji

Dobór optymalnej wartości ω można zrealizować za pomocą zależności:

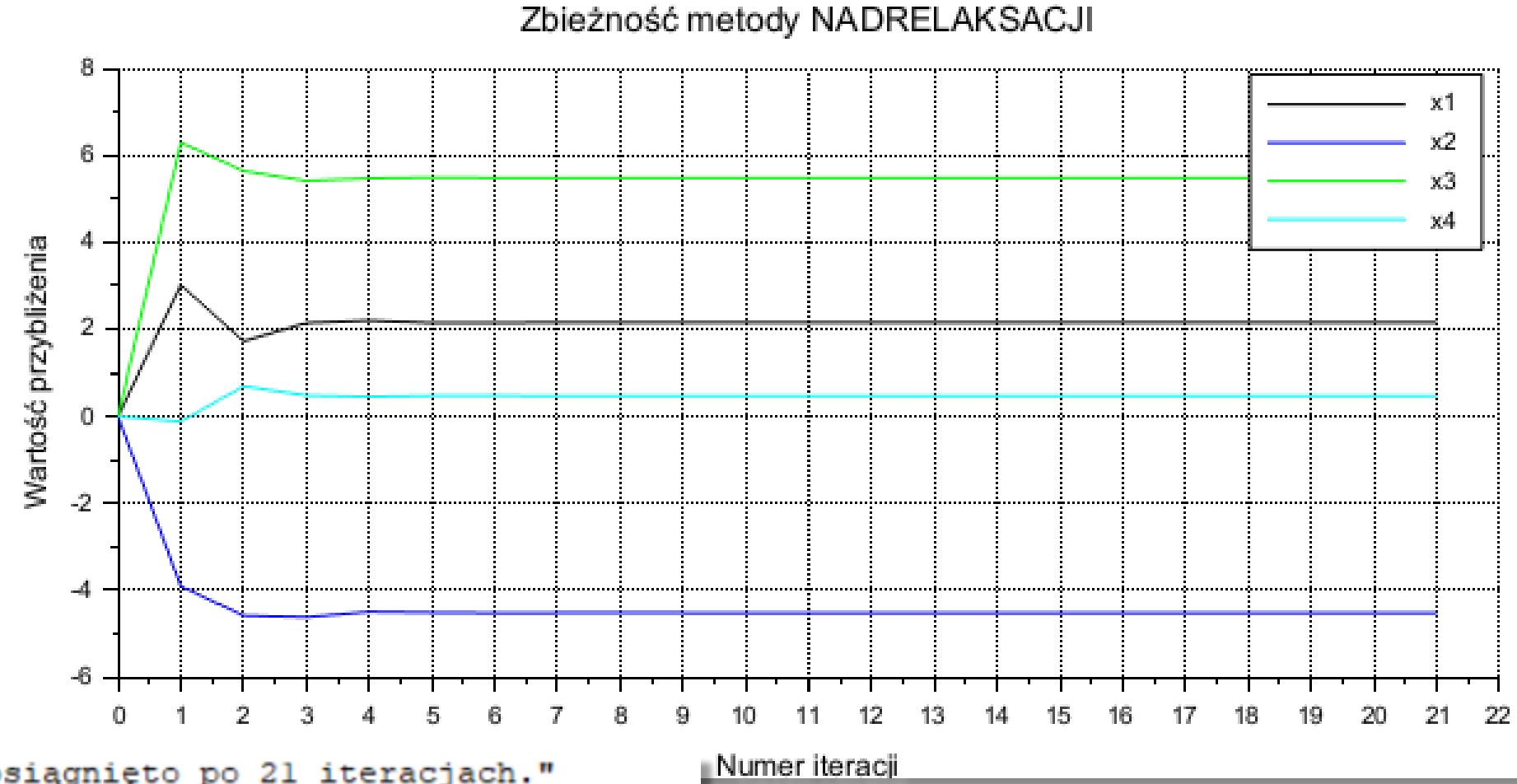
$$\omega_{opt} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \rho^2}},$$

gdzie ρ jest promieniem spektralnym macierzy, największą co do modułu wartości własną macierzy.

W przypadku metody nadrelaksacji analizuje się macierz iteracji Jacobiego:

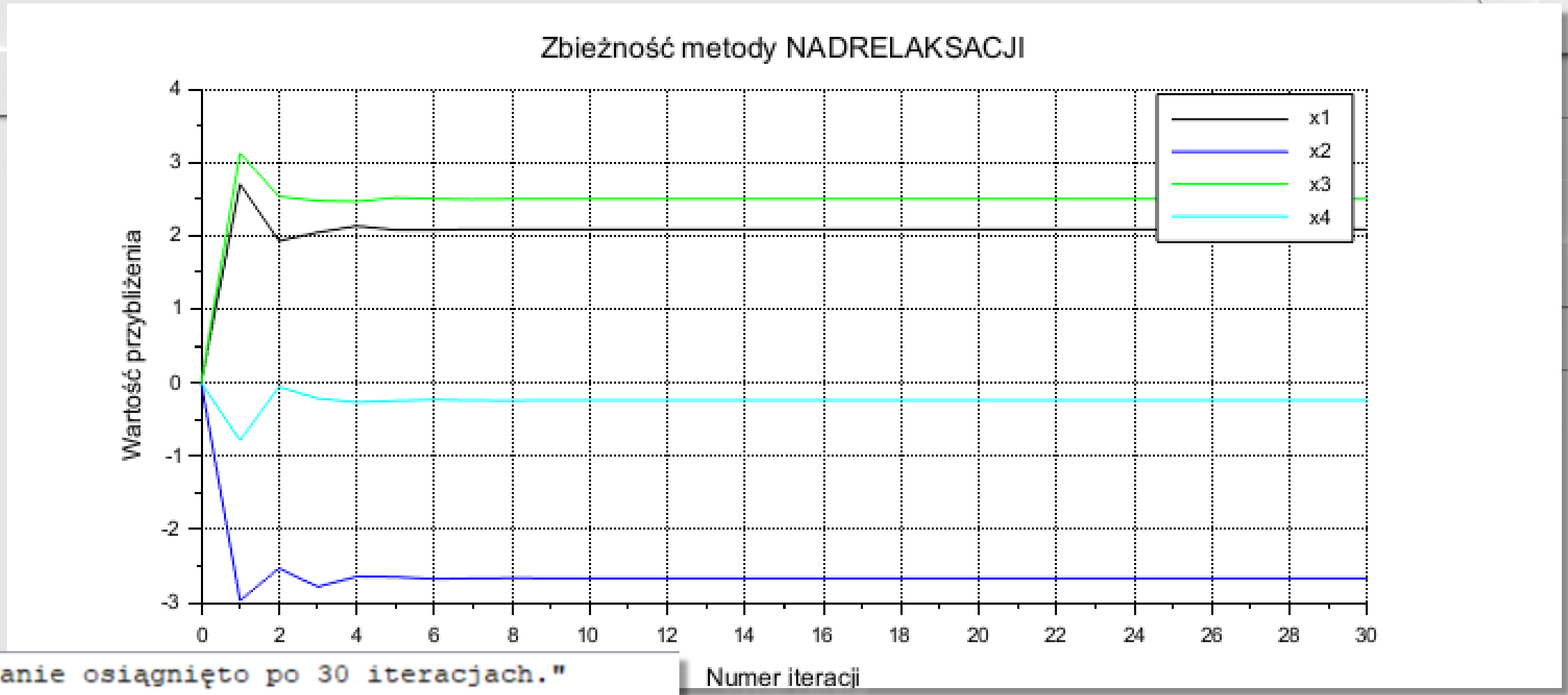
$$T_J = D^{-1} \cdot (L + U)$$

```
8  D = diag(diag(A));
9  L = tril(A,-1);
10 U = triu(A,1);
11 // Macierz iteracji Jacobiego
12 TJ = -inv(D)*(L+U);
13 // Wartości własne
14 lambda = spec(TJ);
15 // Promień spektralny
16 rhoJ = max(abs(lambda));
17 // Optymalny współczynnik SOR
18 w = 2 / (1 + sqrt(1-rhoJ^2));
```



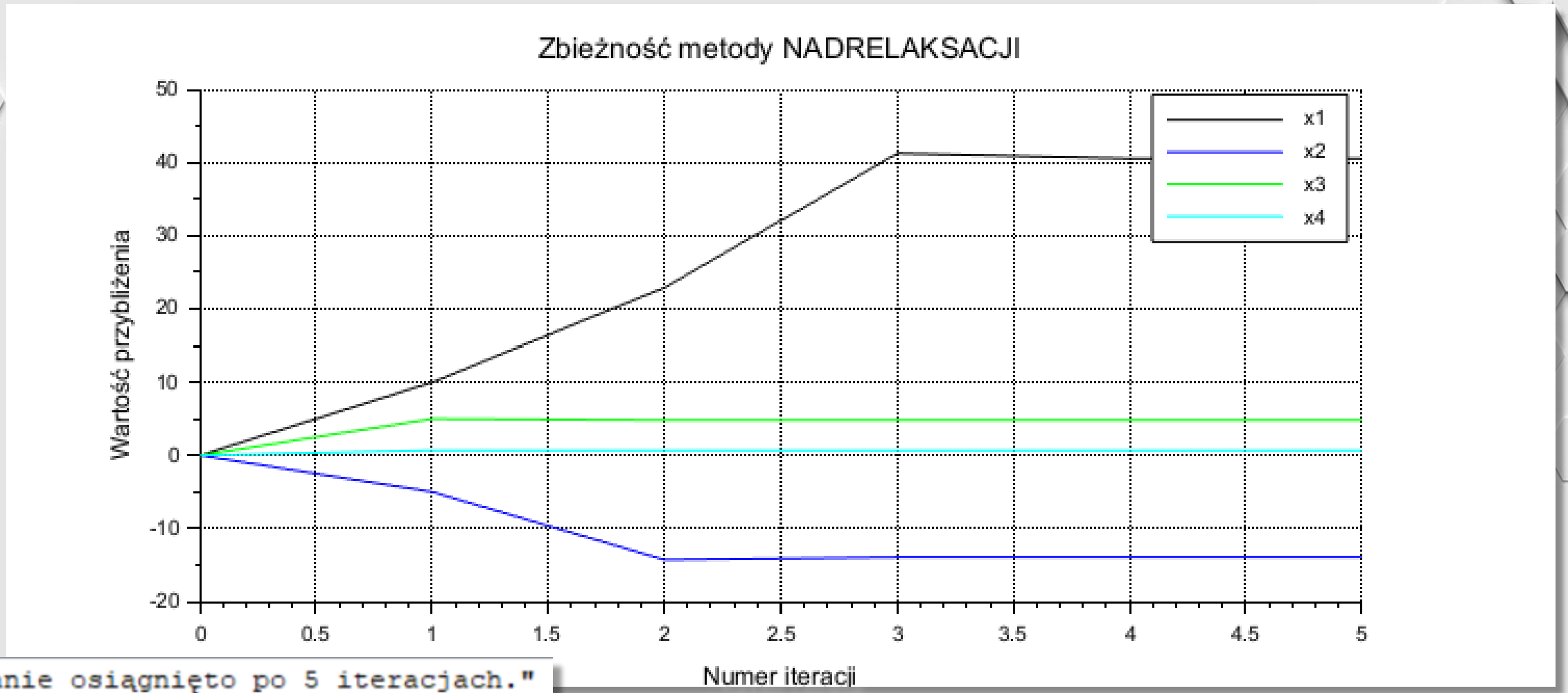

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 21 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=1.2037766"
 2.1428571
-4.5238095
 5.4761905
 0.4761905
"Norma residuum:"
 5.139D-10
```

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$




```
"Rozwiązanie osiągnięto po 30 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=1.3507906"
 2.0822397
-2.6684164
 2.4978128
-0.2405949
"Norma residuum:"
 1.177D-09
```

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 11 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$



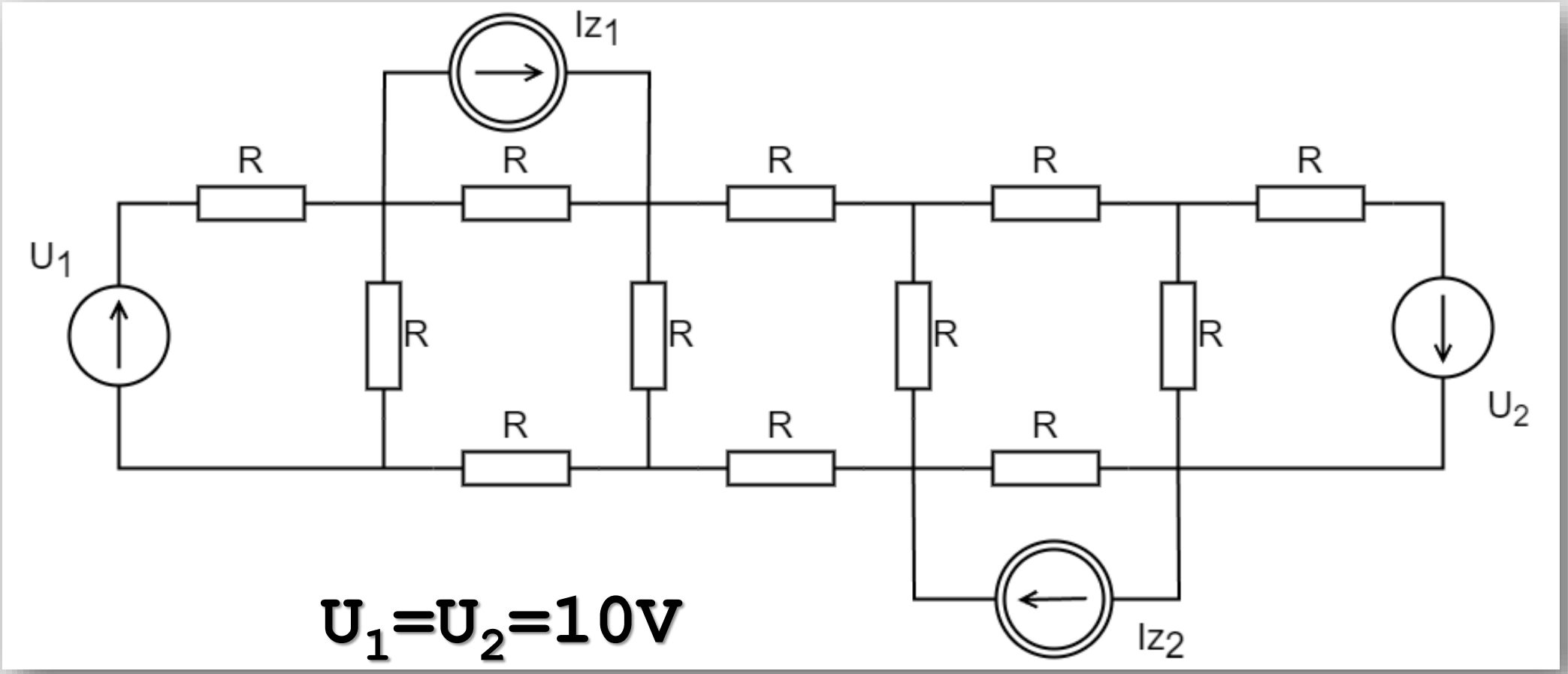

```
"Rozwiązanie osiągnięto po 5 iteracjach."
"Przybliżone rozwiązanie układu dla w=1"
 40.535714
-13.928571
 4.8214286
 0.7142857
"Norma residuum:"
 5.617D-15
```

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Porównanie metod

	Richardson				
Równanie	graniczne	optymalne	Jacobiego	Gaussa-Seidela	Nadrelaksacji
A	547	26	79	15	21
B	312	43	170	17	30
C	485	79	5	5	5

Układ drabinkowy

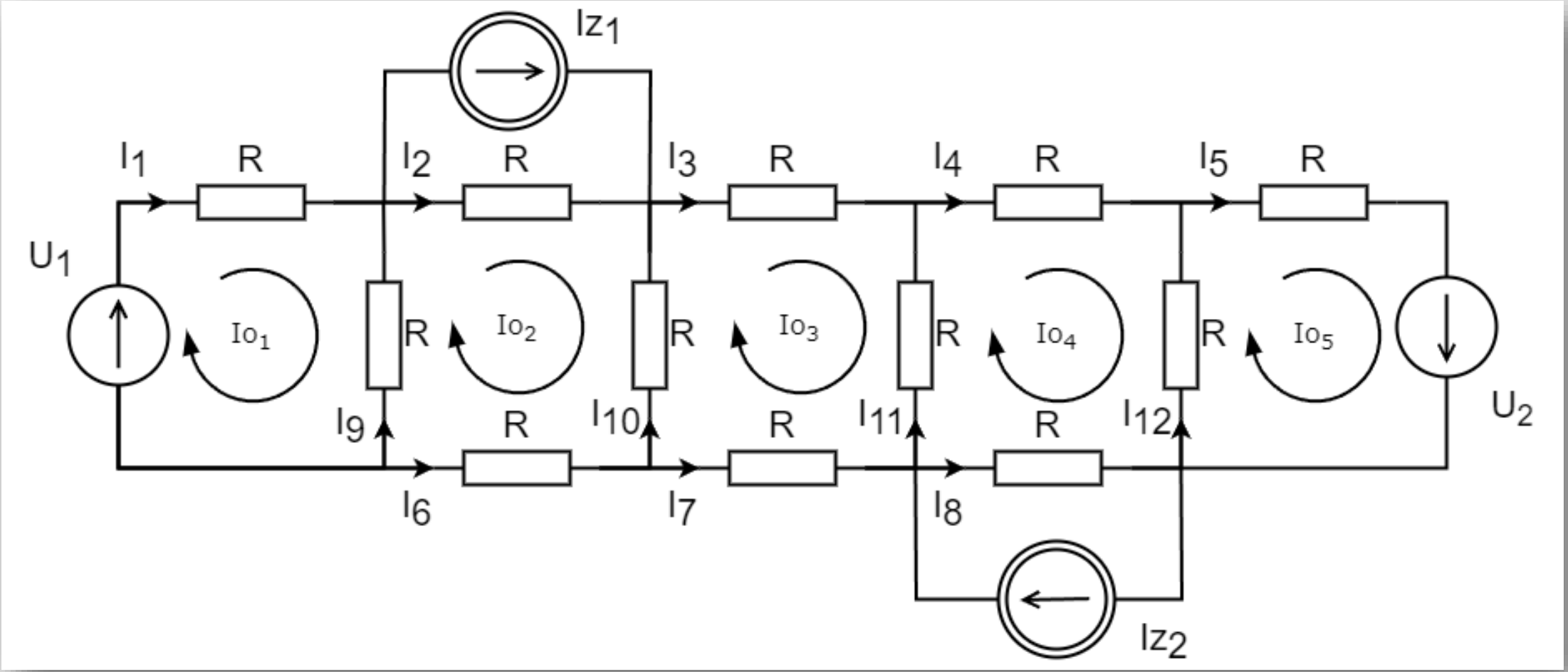


$U_1=U_2=10V$

$Iz_1=Iz_2=1A$

$R=2\Omega$

Układ drabinkowy



Układ równań

$$I_1R - I_9R = U_1$$
$$I_2R + I_9R - I_{10}R - I_6R = 0$$
$$I_3R + I_{10}R - I_{11}R - I_7R = 0$$
$$I_4R + I_{11}R - I_{12}R - I_8R = 0$$
$$I_5R + I_{12}R = U_2$$
$$I_1 + I_9 - I_2 = Iz_1$$
$$I_2 + I_{10} - I_3 = -Iz_1$$
$$I_3 + I_{11} - I_4 = 0$$
$$I_4 + I_{12} - I_5 = 0$$
$$I_5 + I_8 - I_{12} = Iz_2$$
$$I_7 - I_8 - I_{11} = -Iz_2$$
$$I_6 - I_7 - I_{10} = 0$$

Równanie macierzowe

$$\begin{vmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ Iz_1 \\ -Iz_1 \\ 0 \\ 0 \\ Iz_2 \\ -Iz_2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Macierz musi mieć elem

diagonalnej niezerowe,

przestawienia wierszy

1.12 na 6
2.11 na 7
3.10 na 8

Równanie macierzowe

$$\begin{vmatrix} R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & -R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -Iz_2 \\ Iz_2 \\ Iz_1 \\ -Iz_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

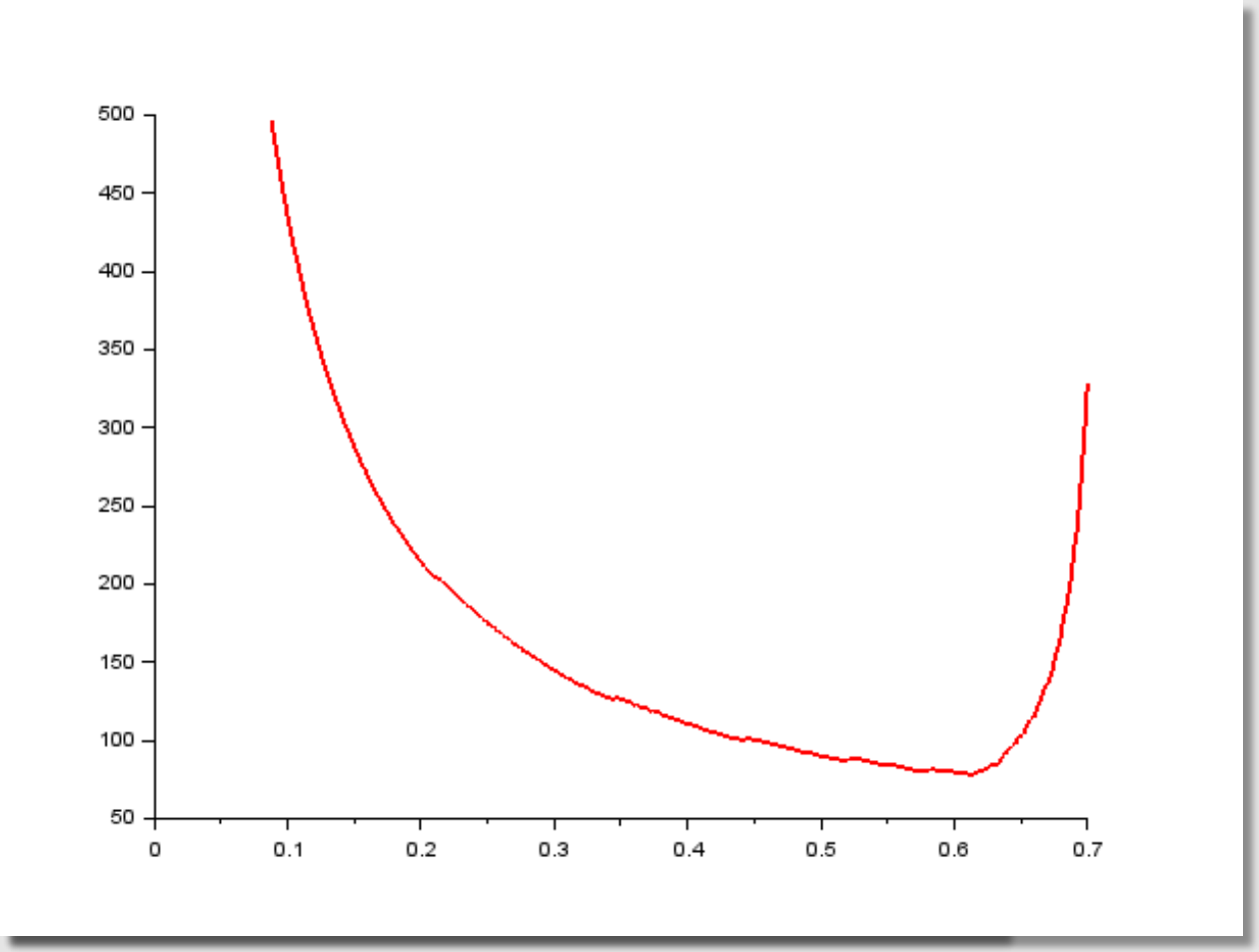
Metoda skończone i wbudowane

```
"Wyniki z metody potencjałów węzłowych:"  e():"

 3.0833333
 0.1666667
 0.5833333
 1.1666667
 3.0833333
-1.1666667
-0.5833333
-0.1666667
-1.9166667
-0.5833333
 0.5833333
 1.9166667
```

Metoda nadrelaksacji

Układ równań osiągał rozwiązanie zbieżne tylko dla metody Nadrelaksacji dla $\omega \leq 0.75$ przy dokładności $e=10^{-10}$

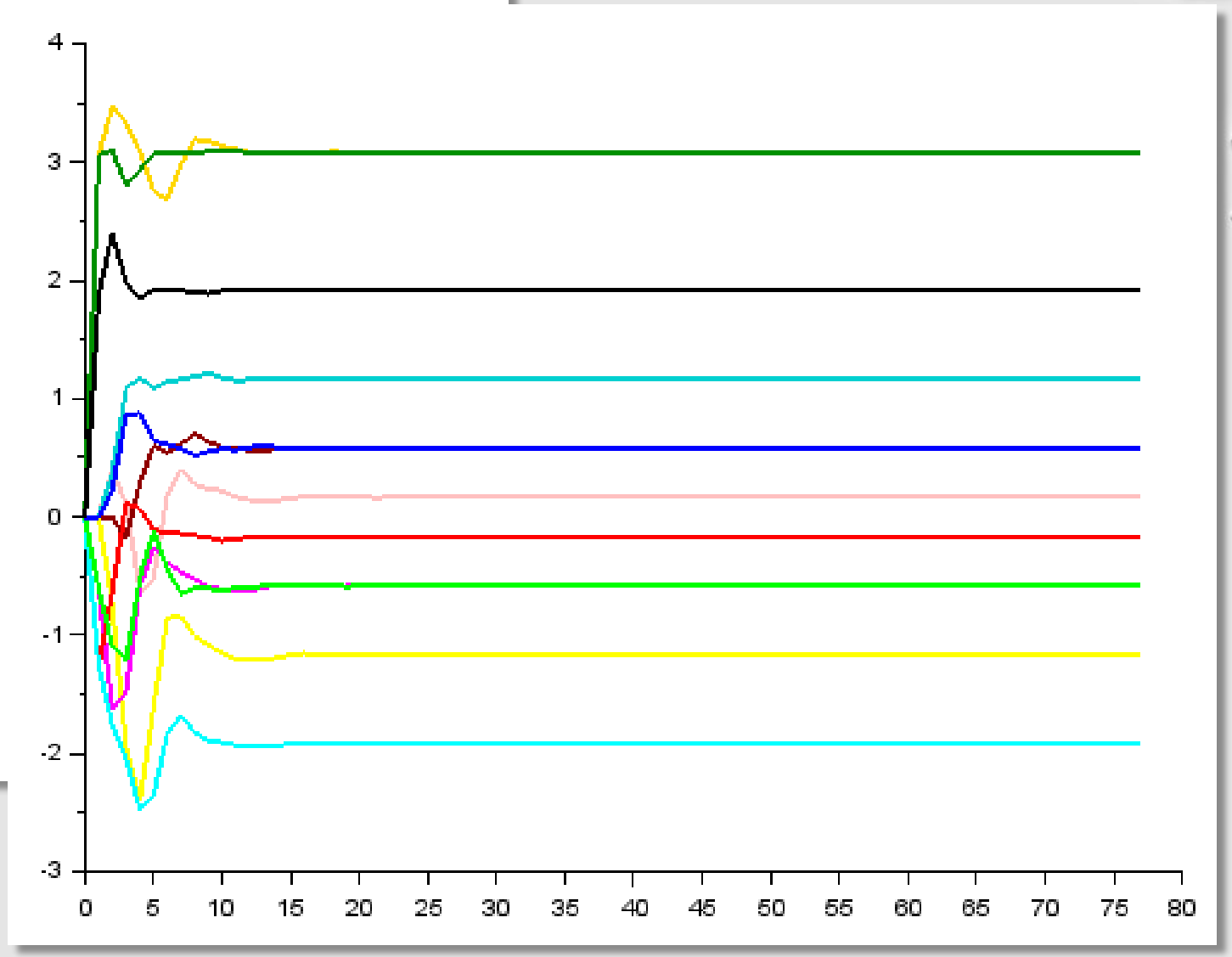


3.0833333
0.1666667
0.5833333
1.1666667
3.0833333
-1.1666667
-0.5833333
-0.1666667
-1.9166667
-0.5833333
0.5833333
1.9166667

Metoda nadrelaksacji

```
"Rozwiązanie osiagnięto po 78 dla w=0.612."

 3.0833333
 0.1666667
 0.5833333
 1.1666667
 3.0833333
-1.1666667
-0.5833333
-0.1666667
-1.9166667
-0.5833333
 0.5833333
 1.9166667
```



Układ równań dla prądów oczkowych

$$2I_I R - I_{II} R = U_1 + Iz_1 R$$
$$-I_I R + 4I_{II} R - I_{III} R + = -3Iz_1 R$$
$$-I_{II} R + 4I_{III} R - I_{IV} R = Iz_1 R$$
$$-I_{III} R + 4I_{IV} R - I_V R = Iz_2 R$$
$$-I_{IV} R + 2I_V R = U_2$$

$$\begin{vmatrix} 2R & -R & 0 & 0 & 0 \\ -R & 4R & -R & 0 & 0 \\ 0 & -R & 4R & -R & 0 \\ 0 & 0 & -R & 4R & -R \\ 0 & 0 & 0 & -R & 2R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \\ I_{IV} \\ I_V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 + Iz_1 R \\ -3Iz_1 R \\ Iz_1 R \\ Iz_2 R \\ U_2 \end{vmatrix}$$

Współczynnik relaksacji dla metody Richardsona

Dla analizowanego układu równań wektor wartości własnych macierzy A:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 2.8768944 \\ 3.1715729 \\ 6 \\ 8.8284271 \\ 11.123106 \end{bmatrix}$$

Zakres dopuszczalnych wartości współczynnika korygującego:

$$0 < \omega < \frac{2}{\lambda_{max}} \qquad 0 < \omega < 0.1798$$

Optymalna wartość współczynnika korygującego:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \qquad \omega = 0.1429$$

Metoda Richardsona

Wyniki dla optymalnej wartości ω=0.1429

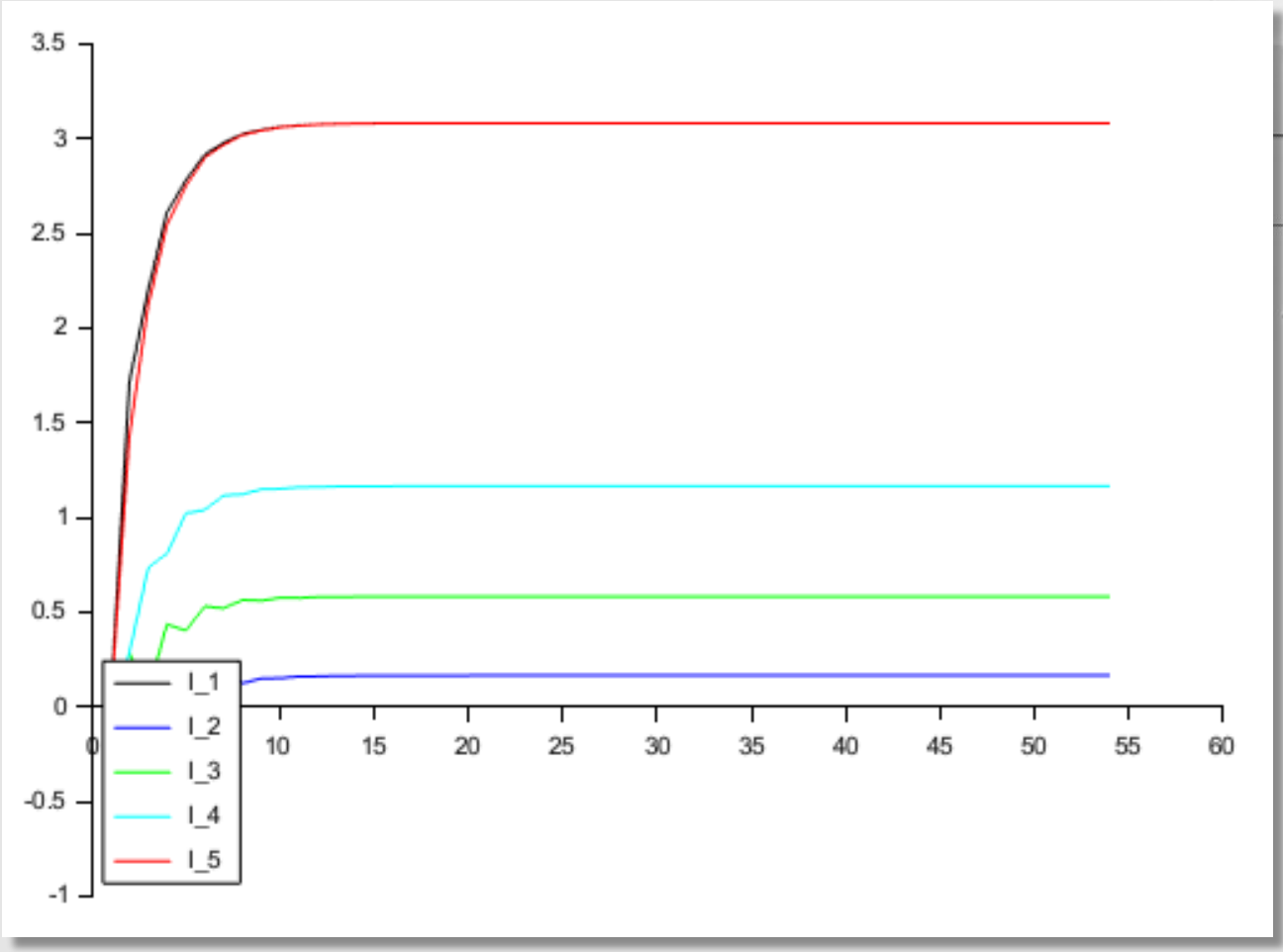
I_I=3.0833333

I_{II}= 0.1666667

I_{III}= 0.5833333

I_{IV}= 1.1666667

I_V= 3.0833333



Wyniki uzyskano po 54 krokach.

Metoda Jacobiego

Rozwiązanie osiągnięto po 39.

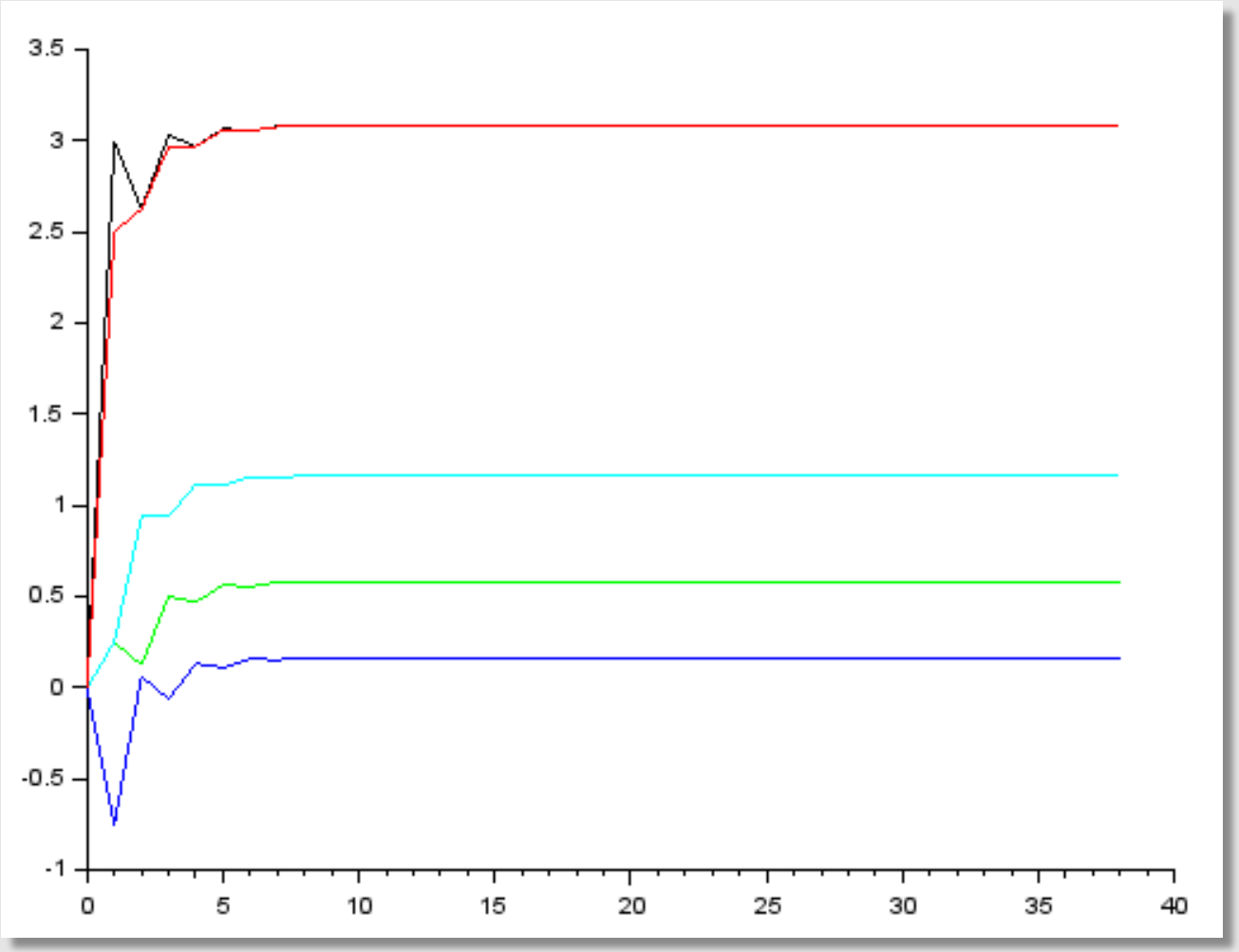
I_I=3.0833333

I_{II}= 0.1666667

I_{III}= 0.5833333

I_{IV}= 1.1666667

I_V= 3.0833333



Metoda Gaussa-Seidela

Rozwiązanie osiągnięto po 21.

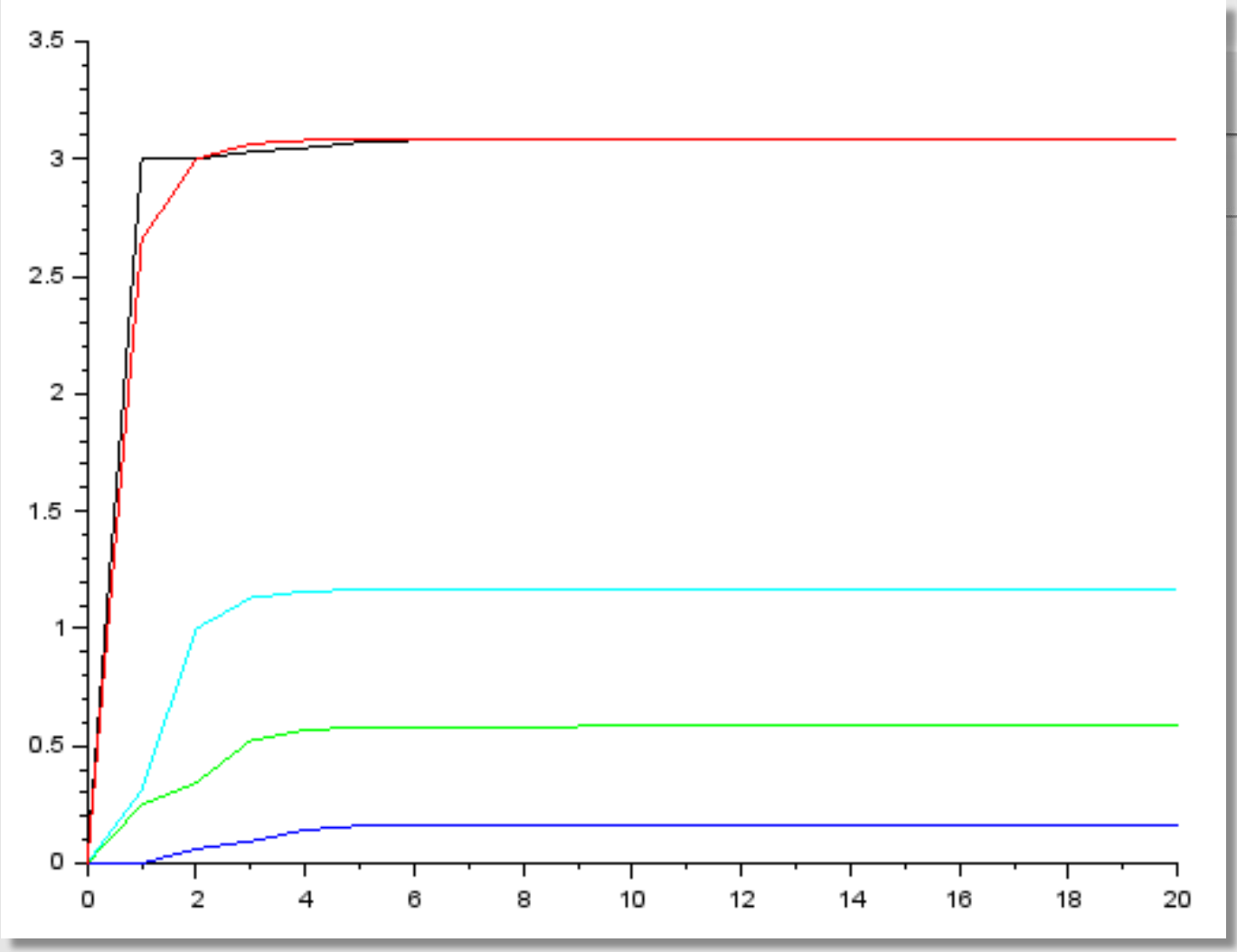
I_I=3.0833333

I_{II}= 0.1666667

I_{III}= 0.5833333

I_{IV}= 1.1666667

I_V= 3.0833333



Metoda Nadrelaksacji

Rozwiązanie osiągnięto po 15 krokach dla ω=1.1

I_I=3.0833333

I_{II}= 0.1666667

I_{III}= 0.5833333

I_{IV}= 1.1666667

I_V= 3.0833333

