

POLITECHNIKA LUBELSKA

opracowanie zbiorowe

**Laboratorium
podstaw elektrotechniki II**

pod redakcją

Tadeusza Janowskiego

Lublin 1994

Ćwiczenie 1

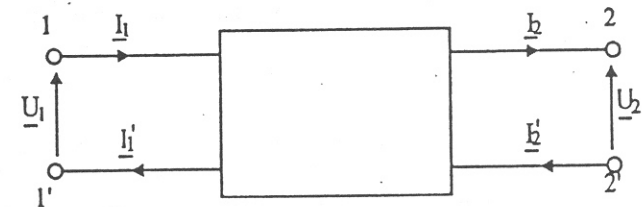
CZWÓRNIKI

1.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

1.1.1. Równania czwórnik

Czwórnik jest elementem czterozaciskowym, który ma dwie pary uporządkowanych zacisków, z których jedną parę nazywamy wejściem, a drugą parę wyjściem (rys.1.1), spełniający warunek równości prądów na wejściu i wyjściu.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 \quad (1.1)$$



Rys.1.1. Schemat ogólny czwórnik; prądy zwrócone od wejścia do wyjścia.

Czwórnik można klasyfikować według różnych cech charakteryzujących daną klasę. Z punktu widzenia energetycznego czwórnik dzielimy na pasywne i aktywne. Czwórnik pasywne są to czwórnik-zbudowane z elementów pasywnych R , L , C , bądź też zawierają pewną ilość galezi aktywnych, ale tak rozmieszczonych, że ich działanie nawzajem się kompensuje i na zewnątrz czwórnik nie możemy stwierdzić ich obecności. Czwórnik zawierające nieskompensowane źródła energii elektrycznej lub źródła sterowane nazywamy czwórniki aktywnymi. Jeżeli układ równań opisujących związki pomiędzy

OPINIODAWCA:

Prof. dr hab. inż. Kazimierz Matwiejuk
Politechnika Warszawska

OPRACOWALI:

Prof. dr hab. inż. Tadeusz Janowski	– ćw.: 12
Dr inż. Ryszard Goleman	– ćw.: 1
Dr inż. Bolesław Horyński	– ćw.: 8
Dr inż. Elżbieta Ratajewicz-Mikołajczak	– ćw.: 3
Dr inż. Henryka-Danuta Stryczewska	– ćw.: 13
Dr inż. Paweł Surdacki	– ćw.: 2
Dr inż. Andrzej Wac-Włodarczyk	– ćw.: 10
Mgr inż. Leszek Jaroszyński	– ćw.: 11
Mgr inż. Henryk Kawka	– ćw.: 6
Mgr inż. Maciej Pańczyk	– ćw.: 4
Mgr inż. Maciej Rutka	– ćw.: 5
Mgr inż. Jan Szponder	– ćw.: 7 i 9

SKŁAD:

Mgr inż. Maciej Rutka
Mgr inż. Dorota Wójcicka -Migasiuk

Wydano za zgodą Rektora Politechniki Lubelskiej

Publikacja dofinansowana przez Ministerstwo Edukacji Narodowej

ISBN 83-86333-76-6

© Copyright by Politechnika Lubelska 1994

Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Lubelskiej

Nakł. 1000 egz., f.B5. Ark. wyd. 7,15. Ark. druk. 9,25. Papier offset.
B1, 80g Zam. 123/94.

Druk: Zakład Wydawniczo-Poligraficzny Politechniki Lubelskiej
20-950 Lublin, ul. Bernardyńska 13

SPIS TREŚCI

Instrukcje do ćwiczeń

1. Czwórniki	5
2. Filtry częstotliwościowe	25
3. Obwody prądu przemiennego z elementami ferromagnetycznymi	37
4. Wzmacniacz magnetyczny	47
5. Magnetyczne mnożniki częstotliwości	53
6. Obwody nieliniowe zawierające prostowniki	63
7. Analizatory harmonicznych	75
8. Stany nieustalone w obwodach z elementami RC	83
9. Drgania relaksacyjne	91
10. Obwód szeregowy RLC w stanie nieustalonym	101
11. Model linii długiej	115
12. Moc przy przebiegach odkształconych	133
13. Synteza dwójników pasywnych	143

wielkościami wejściowymi i wyjściowymi czwórnik jest liniowy, to czwórnik nazywamy liniowym (linearnym), a jeżeli układ tych równań jest nieliniowy to czwórnik nazywamy nieliniowym (nieliniarnym). Pośród czwórników linearnych wyróżniamy jeszcze grupę czwórników, których parametry zależą od zmiennej niezależnej - czasu; czwórnik taki nazywamy parametrycznym. Dalszą klasyfikację czwórników można przeprowadzić na podstawie zasady wzajemności. Czwórnik nazywamy odwracalnym, jeżeli spełnia twierdzenie o wzajemności, to znaczy, że iloraz napięcia na wejściu do prądu na wyjściu (transmitancja napięciowo-prądowa) nie zależy od tego, która para zacisków jest parą zacisków wejściowych, a która para zacisków wyjściowych. Czwórnik nie spełniający warunku wzajemności nazywamy czwórnikiem nieodwracalnym. Ponadto klasyfikację czwórników można przeprowadzić na podstawie ich schematu wewnętrznego. Nazwa takich czwórników związana jest wtedy z tym schematem np. czwórnik typu Π , T, Γ , X itd. W ćwiczeniu ograniczymy się do badania czwórników liniowych i pasywnych. Wstanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym napięcia i prądu zespolone charakteryzujące pracę czwórnik można zapisać w postaci równania łańcuchowego

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

gdzie: $\underline{U}_1, \underline{I}_1$ - napięcie i prąd na wejściu, $\underline{U}_2, \underline{I}_2$ - napięcie i prąd na wyjściu czwórnik,

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ - parametry łańcuchowe czwórnik, zwane też transmitancjami, \underline{A} - macierz łańcuchowa czwórnik.

Parametry czwórnik pasywnego związane są zależnością, która stanowi warunek odwracalności czwórnik

$$\underline{AD} - \underline{BC} = 1 \quad (1.3)$$

Jeżeli $\underline{A} = \underline{D}$, to czwórnik jest symetryczny. Czwórnik w którym $\underline{A} \neq \underline{D}$ nazywamy niesymetrycznym. Przy zasilaniu czwórnik od strony zacisków wtórnych 2-2' (zmieniamy znaki prądów \underline{I}_1 i \underline{I}_2 na przeciwne na rys.1.1) równanie czwórnik ma postać

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Jeżeli znane są napięcia na wejściu \underline{U}_1 i na wyjściu \underline{U}_2 to prądy wyznacza się na podstawie równania admitancyjnego czwórnik

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{11} & \underline{y}_{12} \\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Y} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

gdzie: \underline{Y} - macierz admitancyjna czwórnik.

Równanie impedancyjne czwórnik, które pozwala na wyznaczenie napięcia na wejściu i wyjściu przy danych prądach, można napisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{Z} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

gdzie: \underline{Z} - macierz impedancyjna czwórnik

Jeżeli macierz admitancyjna \underline{Y} jest nieosobliwa, to również macierz impedancyjna \underline{Z} jest nieosobliwa, a iloczyn tych macierzy wynosi

$$\underline{Y} \cdot \underline{Z} = 1 \quad (1.7)$$

Równania czwórnik można również wyrazić w postaci hybrydowej

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{H} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

gdzie: \underline{H} - macierz hybrydowa

Odwrotne równanie hybrydowe ma postać

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{G} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

gdzie: \underline{G} - macierz hybrydowa odwrócona

Należy zwrócić uwagę, że między macierzami \underline{G} i \underline{H} zachodzi związek

$$\underline{G} \cdot \underline{H} = 1 \quad (1.10)$$

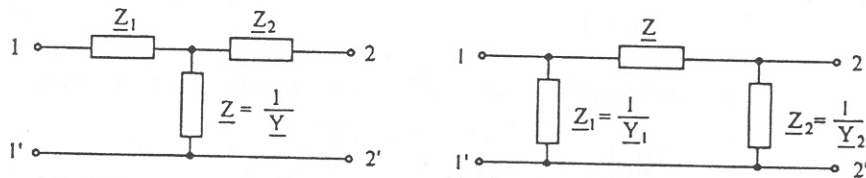
Warunki odwracalności (przy założonym zwrocie prądów - rys.1.1) odpowiadające parametrom admitancyjnym, impedancyjnym i hybrydowym są następujące:

$$y_{11} = -y_{22}, \quad z_{12} = -z_{21}, \quad g_{12} = g_{21}, \quad h_{12} = h_{21}, \quad (1.11)$$

parametry czwornika symetrycznego spełniają ponadto warunki:

$$y_{11} = -y_{22}, \quad z_{11} = -z_{22}, \quad \det \mathbf{H} = 1, \quad \det \mathbf{G} = 1, \quad (1.12)$$

Symetria elektryczna zapewnia odwracalność czwornika, ale twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe tzn. czwornik odwracalny nie musi być symetryczny. Z własnością symetrii elektrycznej czwornika nie jest konieczne związana symetria topologiczna układu lub symetria ukształtowania schematu czwornika. Odwrotnie, symetria topologiczna (z równością odpowiednich parametrów gałęzi) zapewnia symetrię elektryczną. Spośród czterech parametrów macierzy opisującej czwornik pasywny, trzy parametry są w ogólnym przypadku niezależne. W przypadku czwornika symetrycznego niezależne są tylko dwa parametry. Stąd wnioskujemy, że każdemu czwornikowi odwracalnemu można przyporządkować równoważny schemat zastępczy utworzony z trzech gałęzi, które mogą być połączone w układ gwiazdowy lub trójkątny tworząc czworniki typu T lub Π . Schematy tych czworników przedstawiono na rys.1.2.



Rys.1.2. Schematy czworników trójelementowych a) typu T, b) typu Π .

Macierze łańcuchowe czworników o schemacie wewnętrznym T i Π mają postacie

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y} \\ \underline{Y} & 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{A}_\Pi = \begin{bmatrix} 1 + \underline{Z} \underline{Y}_2 & \underline{Z} \\ \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z} & 1 + \underline{Z} \underline{Y}_1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Ważną wielkością w teorii czworników jest impedancja falowa zwana też impedancją charakterystyczną, która dla pary zacisków 1-1' i pary zacisków 2-2' wyraża się odpowiednio:

$$\underline{Z}_{1f} = \sqrt{\frac{\underline{A}\underline{B}}{\underline{C}\underline{D}}} \quad (1.15)$$

$$\underline{Z}_{2f} = \sqrt{\frac{\underline{D}\underline{B}}{\underline{C}\underline{A}}} \quad (1.16)$$

W czworniku symetrycznym, dla którego $\underline{A} = \underline{D}$, impedancje falowe obu stron czwornika są jednakowe

$$\underline{Z}_f = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} \quad (1.17)$$

1.1.2. Wyznaczanie parametrów czwornika

Parametry łańcuchowe \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} można wyznaczyć dwiema metodami: analityczną, gdy znany jest układ połączeń elementów czwornika i wartości elementów R, L, C oraz częstotliwość wymuszenia, oraz pomiarowo-analityczną, którą stosujemy gdy układ połączeń elementów czwornika nie jest znany. Zgodnie z zasadą Blondela stan pracy czwornika jest superpozycją stanu jałowego i stanu zwarcia czwornika. Rozważając czwornik w tych dwu stanach z równania łańcuchowego (1.2) znajdujemy wyrażenia opisujące parametry łańcuchowe

$$\underline{A} = \left. \frac{U_{10}}{U_{20}} \right|_{I_2 = 0} \quad - \text{transmitancja napięciowa w stanie jałowym czwornika}$$

$$\underline{B} = \left. \frac{U_{1z}}{I_{2z}} \right|_{U_2 = 0} \quad - \text{transmitancja napięciowo-prądowa w stanie zwarcia czwornika}$$

$$\underline{C} = \left. \frac{I_{10}}{U_{20}} \right|_{I_2 = 0} \quad - \text{transmitancja prądowo-napięciowa w stanie jałowym czwornika}$$

$$\underline{D} = \left. \frac{I_{1z}}{I_{2z}} \right|_{U_2 = 0} \quad - \text{transmitancja prądowa w stanie zwarcia czwornika}$$

Impedancję wejściową czwornika \underline{Z}_{10} w stanie jałowym na wyjściu oraz impedancję wejściową \underline{Z}_{1z} w stanie zwarcia po stronie wtórnej można określić zależnościami

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \quad (1.18)$$

$$\underline{Z}_{1z} = \frac{\underline{U}_{1z}}{\underline{I}_{1z}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \quad (1.19)$$

Po odwróceniu czwornika, tzn. przyłożeniu napięcia zasilającego do zacisków wyjściowych (2-2') przyjmując w równaniu (4) $\underline{I}_1 = 0$ (rozwarne zaciski 1-1') otrzymujemy impedancję wyjściową czwornika w stanie jałowym na wejściu

$$\underline{Z}_{20} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}_{20}} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \quad (1.20)$$

Przyjmując w równaniu (1.4) $\underline{U}_1 = 0$ można określić impedancję wyjściową w stanie zwarcia na wejściu

$$\underline{Z}_{2z} = \frac{\underline{U}_{2z}}{\underline{I}_{2z}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} \quad (1.21)$$

Uwzględniając zależności (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) i (1.3) wyznaczamy parametry czwornika.

Ponieważ tylko trzy parametry łańcuchowe są niezależne, w zależności od tego którą z zależności (1.18), (1.19), (1.20), (1.21) opuścimy, otrzymamy cztery możliwe rozwiązania na obliczanie parametrów łańcuchowych. Wzory zostały zestawione w tabelicy 1.1. Zatem, znając tylko trzy dowolne impedancje czwornika zmierzone w stanie zwarcia i jałowym (z czterech możliwych) można wyznaczyć wszystkie parametry łańcuchowe czwornika.

Tablica 1.1. Wyznaczanie parametrów łańcuchowych czwornika na podstawie pomiarów impedancji

parametry	impedancje dane z pomiarów			
	$\underline{Z}_{10}, \underline{Z}_{1z}, \underline{Z}_{20}$	$\underline{Z}_{10}, \underline{Z}_{20}, \underline{Z}_{2z}$	$\underline{Z}_{10}, \underline{Z}_{1z}, \underline{Z}_{2z}$	$\underline{Z}_{1z}, \underline{Z}_{20}, \underline{Z}_{2z}$
\underline{A}	$\frac{\underline{Z}_{10}}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1z})}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2z}}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1z}}{\underline{Z}_{2z}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1z})}}$	$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{1z}}{\underline{Z}_{2z}(\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2z})}}$
\underline{B}	$\underline{Z}_{1z}\underline{D}$	$\underline{Z}_{2z}\underline{A}$	$\underline{Z}_{2z}\underline{A}$	$\underline{Z}_{2z}\underline{A}$
\underline{C}	$\frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{10}}$	$\frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{10}}$	$\frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{10}}$	$\frac{\underline{D}}{\underline{Z}_{20}}$
\underline{D}	$\underline{Z}_{20}\underline{C}$	$\underline{Z}_{20}\underline{C}$	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}_{1z}}$	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}_{1z}}$

1.1.3. Połączenia czworników

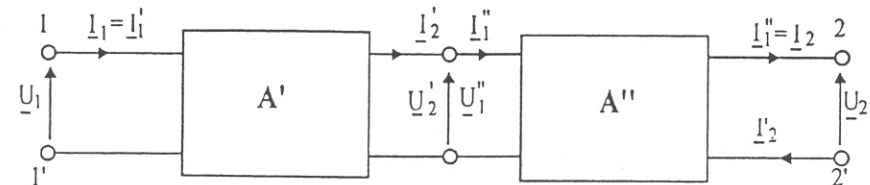
W teorii czworników rozróżnia się 5 sposobów łączenia czworników. Omówimy tylko najbardziej typowe, a mianowicie łańcuchowe, szeregowe i równoległe.

Połączenie łańcuchowe (kaskadowe) czworników

Połączeniem łańcuchowym dwóch czworników nazywamy układ, w którym zaciski wyjściowe pierwszego czwornika połączone są bezimpedancyjnie z zaciskami wejściowymi drugiego czwornika. Połączenie takie jest przedstawione na rys.1.3. Zachodzą tu zależności

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1, \quad \underline{I}'_2 = \underline{I}''_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}''_2 \quad (1.22)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1, \quad \underline{U}'_2 = \underline{U}''_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}''_2 \quad (1.23)$$



Rys.1.3. Połączenie kaskadowe czworników.

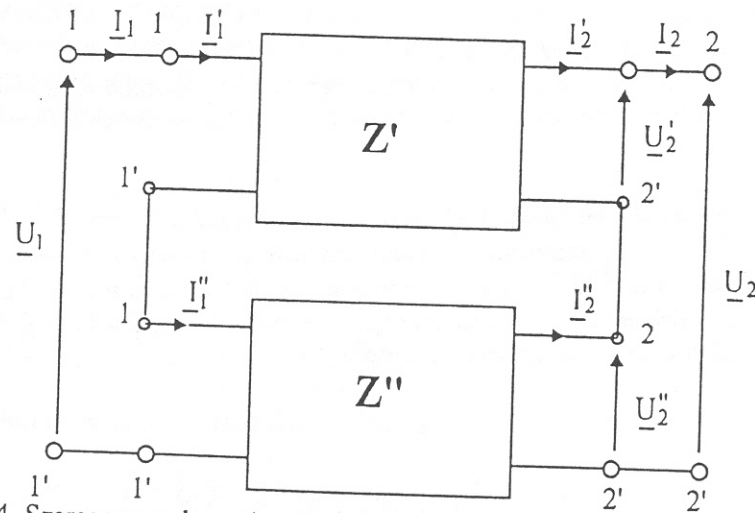
Zapisując równania czwórników w postaci łańcuchowej oraz korzystając ze wzorów (1.22), (1.23) otrzymujemy

$$A = A'A'' = \begin{bmatrix} \underline{A}'\underline{A}'' + \underline{B}'\underline{C}'' & \underline{A}'\underline{B}'' + \underline{B}'\underline{D}'' \\ \underline{C}'\underline{A}'' + \underline{D}'\underline{C}'' & \underline{C}'\underline{B}'' + \underline{D}'\underline{D}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Iloczyn macierzy jest nieprzemienne, wobec czego nie można zmieniać kolejności czynników w iloczynie (1.24). Macierze łańcuchowe występują w tej samej kolejności, jak czwórniki w połączeniu łańcuchowym.

Połączenie szeregowe

W połączeniu szeregowym dwóch czwórników zarówno strony wejściowe jak i wyjściowe obu czwórników są połączone szeregowo (rys.1.4).



Rys.1.4. Szeregowe połączenie czwórników.

Zależności między prądami na wejściu i wyjściu czwórników spełniają warunek

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = \underline{I}''_2 \quad (1.25)$$

Dla napięć zachodzą natomiast zależności

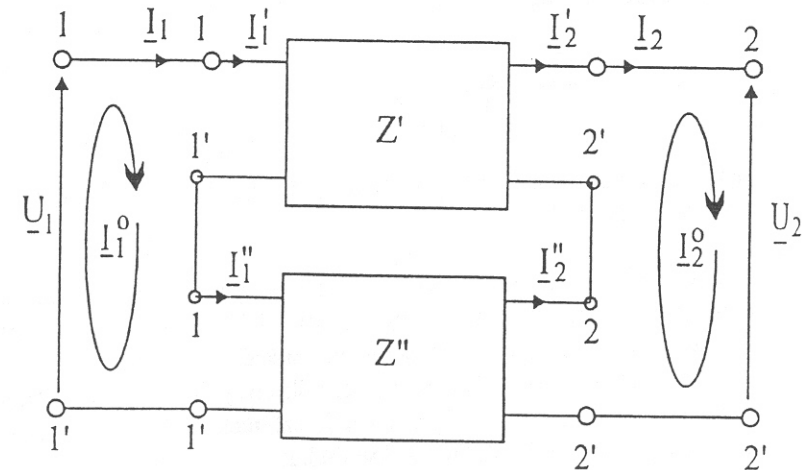
$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}''_1, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}'_2 = \underline{U}''_2 \quad (1.26)$$

W przypadku łączenia szeregowego wygodnie jest posłużyć się równaniami impedancyjnymi w postaci (1.6). Dodając równania czwórników do siebie stronami przy warunku (1.25) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{z}'_{11} + \underline{z}''_{11} & \underline{z}'_{12} + \underline{z}''_{12} \\ \underline{z}'_{21} + \underline{z}''_{21} & \underline{z}'_{22} + \underline{z}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{Z} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}' + \underline{Z}'' \quad (1.28)$$

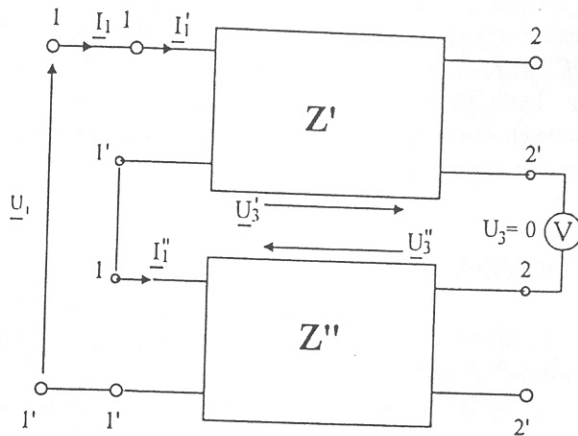
Warto zwrócić uwagę na warunek równości prądów (1.25), z którego wynika, że czwórniki składowe muszą spełniać zależność (1.1) nie tylko przed połączeniem ale i po ich połączeniu. Zależność ta może zostać naruszona wskutek nowych połączeń galwanicznych między czwórnikami. Aby sprawdzić czy połączenie szeregowe zachodzi, należy przeanalizować schemat wewnętrzny czwórników, bądź sprawdzić na drodze pomiarowej, czy warunek równości prądów (1.1) jest spełniony. Jeżeli zauważymy, że warunek równości prądów $\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}''_1$, i $\underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = \underline{I}''_2$ będzie spełniony i jeżeli prąd oczkowy $\underline{I}_3^0 = 0$, to otrzymamy (rys.1.5)



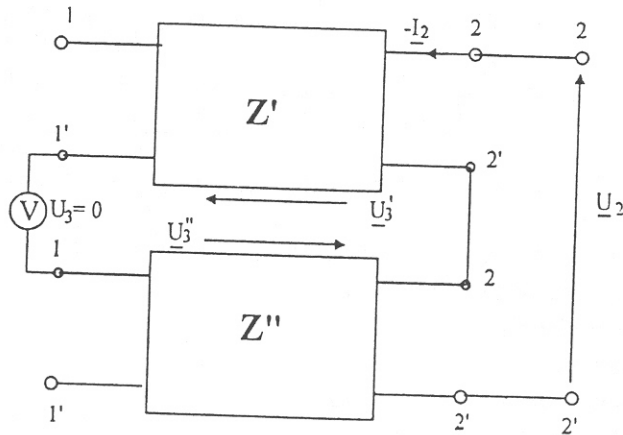
Rys.1.5. Oznaczenia prądów obwodowych.

$$\underline{I}_1^0 = \underline{I}_1 \text{ oraz } \underline{I}_2^0 = \underline{I}_2 \quad (1.29)$$

a).



b).



Rys.1.6. Sprawdzenie warunku równości prądów przy szeregowym połączeniu czwórników dla zgodnego przesyłu energii (a) i dla przeciwnego przesyłu energii (b).

Warunek $I_3^0 = 0$ powinien być spełniony dla każdego stanu pracy czwórnika, w szczególności przy $U_2 = 0$ i dowolnym U_1 oraz przy $U_1 = 0$ i dowolnym U_2 . Prowadzi to do zależności

$$\underline{U}_3' + \underline{U}_3'' = \underline{U}_3 = 0 \quad (1.30)$$

Wystarczy zatem sprawdzić, czy napięcie między zaciskami 2'-2 drugiej strony czwórnika dla zgodnego przesyłu energii i dla przeciwnego przesyłu energii jest równe zero (rys.1.6). Połączenie w którym spełnione są warunki równości prądów nazywamy regularnym.

Połączenie równoległe

W połączeniu równoległym dwóch czwórników zarówno strony wejściowe jak i wyjściowe obu czwórników połączone są równoległe (rys.1.7), wobec czego zależności między napięciami wejściowymi a wyjściowymi są następujące

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1' = \underline{U}_1'', \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2' = \underline{U}_2'' \quad (1.31)$$

natomiast zależności dla prądów spełniają warunki

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1' + \underline{I}_1'', \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2' = \underline{I}_2'' \quad (1.32)$$

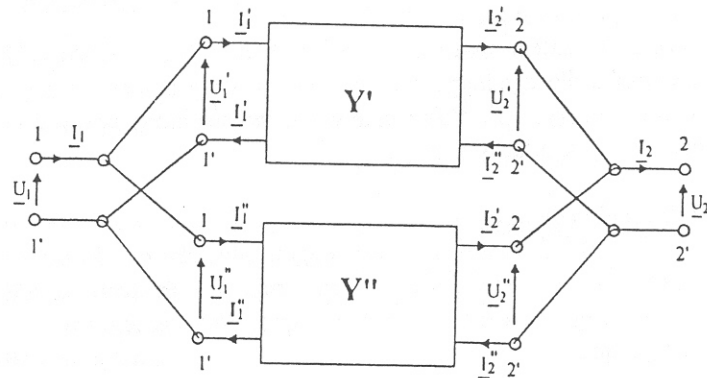
Dodając stronami równania admitancyjne czwórników zgodnie z warunkiem (1.32) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}'_{11} + \underline{y}''_{11} & \underline{y}'_{12} + \underline{y}''_{12} \\ \underline{y}'_{21} + \underline{y}''_{21} & \underline{y}'_{22} + \underline{y}''_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Y} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}' + \underline{Y}'' \quad (1.34)$$

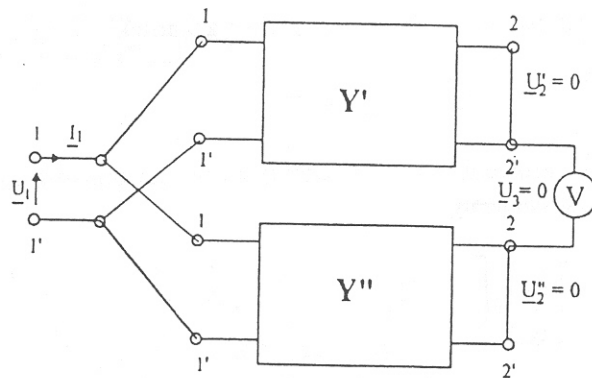
Ogólnie macierz admitancyjna n czwórników połączonych równoległe jest równa sumie macierzy admitancyjnych poszczególnych czwórników. Sprawdzenie regularności połączenia równoległego można dokonać na podstawie analizy schematów wewnętrznych czwórników, bądź mierząc napięcie między zwartymi stronami wyjściowymi czwórników zasilając układ od strony zacisków 1-1' oraz dla przeciwnego kierunku przesyłu energii, mierząc napięcie między zwartymi wejściami czwórników składowych (rys.1.8).

Oprócz omówionych połączeń czwórników rozróżnia się jeszcze połączenie szeregowo-równoległe oraz równoległo-szeregowe. Jeżeli jest spełniony warunek równości prądów (1.1) można wykazać, że w pierwszym przypadku macierz hybrydowa czwórnika zastępczego jest równa sumie macierzy hybrydowych czwórników składowych, natomiast w drugim przypadku dodają się macierze odwrócone czwórników składowych.

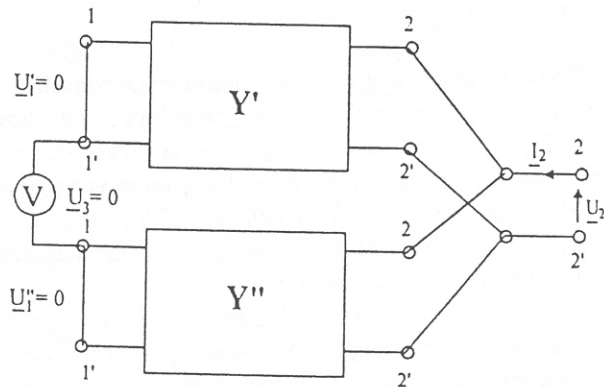


Rys.1.7. Równoległe połączenie czworników.

a).



b).



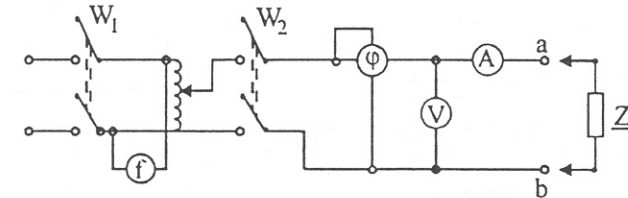
Rys.1.8. Sprawdzenie warunku równości prądów przy równoległym połączeniu czworników dla zgodnego kierunku przesyłu energii (a) i przeciwnego (b).

Oprócz omówionych połączeń czworników rozróżnia się jeszcze połączenie szeregowo-równoległe oraz równoległo-szeregowe. Jeżeli jest spełniony warunek równości prądów (1.1) można wykazać, że w pierwszym przypadku macierz hybrydowa czwornika zastępczego jest równa sumie macierzy hybrydowych czworników składowych, natomiast w drugim przypadku dodają się macierze odwrócone czworników składowych.

1.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

1.2.1. Pomiary impedancji elementów i wyznaczanie parametrów łańcuchowych czwornika

Schemat układu do pomiaru impedancji elementów czwornika jest przedstawiony na rys.1.9.



Rys. 1.9. Układ pomiarowy do wyznaczania impedancji elementów czwornika.

Oznaczenia:

W_1 – wyłącznik tablicy zasilającej,

W_2 – wyłącznik dwubiegunowy,

f – częstotniomierz,

φ – miernik $\cos\varphi$,

V – woltomierz elektromagnetyczny,

A – amperomierz elektromagnetyczny,

Z – element badany.

Należy mierzyć kolejno impedancje elementów badanych czworników, a wyniki wpisać do tablicy 1.2. Parametry łańcuchowe czworników obliczamy ze wzorów (1.13), (1.14) i na tej podstawie wyznaczamy impedancje falowe wejściową i wyjściową z zależności (1.15) i (1.16).

W układzie pomiarowym (rys.1.9) w miejsce fazomierza można zastosować watomierz, jeżeli znamy charakter badanych elementów. Kąt fazowy impedancji możemy wówczas określić następująco: $\varphi = \pm \arccos \frac{P}{U_1 I_1}$, znak(-) dotyczy elementów o charakterze pojemnościowym i czynno-pojemnościowym, a znak(+) w pozostałych przypadkach.

Tablica 1.2. Wyniki pomiarów impedancji gałęzi czwórnika i obliczeń parametrów łańcuchowych

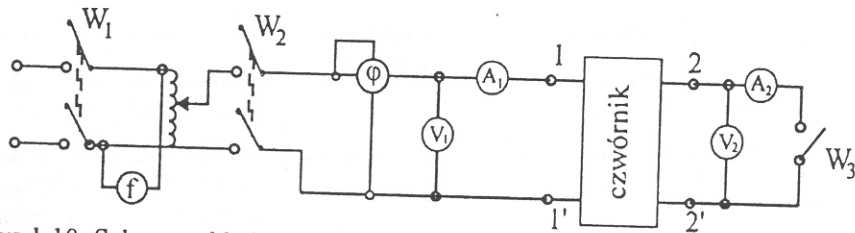
Typ czwórnika	Impedancja	Pomiary				Obliczenia							
		U	I	f	φ	Z	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>	<u>A</u>	Z_{f1}	Z_{f2}
		V	A	Hz	°	Ω	-	Ω	S	-	-	Ω	Ω
T	Z_1												
	Z_2												
	$Z = Y^{-1}$												
Π	$Z_1 = Y_1^{-1}$												
	$Z_2 = Y_2^{-1}$												
	$Z = Y^{-1}$												

$|A| = \det A = \underline{AD} - \underline{BC}$

1.2.2. Wyznaczanie parametrów łańcuchowych przez pomiar impedancji wejściowej i wyjściowej w stanie zwarcia i jałowym

Badanie czwórnika

Zestawiamy układ pomiarowy przedstawiony na rys.1.10 i badamy czwórnik kształtu T lub Π.



Rys.1.10. Schemat układu pomiarowego do wyznaczania parametrów łańcuchowych metodą doświadczalną.

Oznaczenia:

W_1 – wyłącznik tablicy zasilającej,

W_2, W_3 – wyłączniki dwubiegunowe,

f – częstotściomierz,

φ – miernik $\cos \varphi$,

V_1, V_2 - woltomierze elektromagnetyczne,

A_1, A_2 – amperomierze elektromagnetyczne,

Wykonujemy tylko trzy pomiary impedancji czwórnika spośród czterech możliwych, mianowicie: impedancji wejściowej w stanie jałowym Z_{10} , impedancji

wejściowej w stanie zwarcia strony wtórnej Z_{1z} , zasilając czwórnik od strony zacisków 1-1', oraz impedancji wyjściowej w stanie jałowym Z_{20} i impedancji wyjściowej w stanie zwarcia na wejściu Z_{2z} przy zasilaniu czwórnika od strony zacisków 2-2'. Wyniki pomiarów notujemy w tablicy 1.3 i na ich podstawie obliczamy parametry łańcuchowe czwórnika korzystając ze wzorów zestawionych w tablicy 1.1. Wyniki wyznaczania parametrów czwórnika dwiema metodami zestawiamy w tablicy 1.4.

Badanie czwórników połączonych łańcuchowo

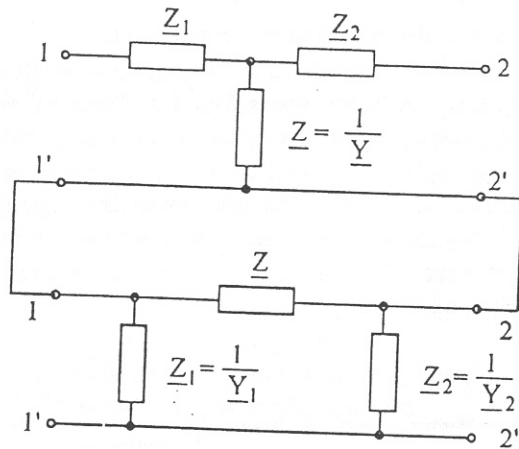
Tworzymy czwórnik jako połączenie kaskadowe czwórników T i Π, których parametry zestawiono w tablicy 1.2. Dokonujemy pomiarów impedancji wejściowych i wyjściowych czwórnika w układzie pomiarowym jak na rys.1.10 doprowadzając napięcie do zacisków 1-1', a następnie do zacisków 2-2'. Wyniki pomiarów impedancji oraz parametrów czwórnika zapisujemy w tablicy 1.5. Dla porównania wyników, wartości parametrów łańcuchowych czwórnika zastępczego obliczone z zależności (1.24) oraz uzyskane z pomiarów (tablica 1.3) wpisujemy do tablicy 1.6.

Tablica 1.3. Wyniki pomiarów impedancji wejściowych i wyjściowych czwórnika oraz obliczeń parametrów łańcuchowych

Typ czwórnika	Pomiary							
	Zasilanie od strony zacisków 1-1'							
	Stan jałowy na wyjściu				Stan zwarcia na wyjściu			
T lub Π	U_{10}	I_{10}	φ_{10}	U_{20}	U_{1z}	I_{1z}	φ_{1z}	I_{2z}
	V	A	°	V	V	A	°	A
	Zasilanie od strony zacisków 2-2'							
	Stan jałowy na wejściu				Stan zwarcia na wejściu			
	U_{20}	I_{20}	φ_{20}	U_{10}	U_{2z}	I_{2z}	φ_{2z}	I_{1z}
	V	A	°	V	V	A	°	A
	Obliczenia							
	Z_{10}	Z_{1z}	Z_{20}	Z_{2z}	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>
Ω	Ω	Ω	Ω	-	Ω	S	-	

1.2.3 Sprawdzenie warunku regularności połączenia czwórników Połączenie szeregowe czwórników

Czwórniki typu T i Π łączymy szeregowo zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 1.11. Sprawdzenie warunku równości prądów dokonujemy w układach pomiarowych z rys. 1.6. Przy zgodnym kierunku przepływu energii zaciski lewe czwórników (1-1') są połączone szeregowo, a zaciski prawe (2-2') są otwarte. Wejście czwórnika (1-1') łączymy z zaciskami a b w układzie pomiarowym z rys. 1.9. Dokonujemy pomiaru napięcia między zaciskiem wyjściowym 2' czwórnika T i zaciskiem 2 czwórnika typu Π .



Rys. 1.11. Szeregowe połączenie czwórników T i Π .

Tablica 1.4. Zestawienie parametrów łańcuchowych czwórnika

Typ czwórnika		Obliczone z impedancji stanu zwarcia i stanu jałowego
Parametr		
\underline{A}	-	
\underline{B}	Ω	
\underline{C}	S	
\underline{D}	-	
$\underline{AD} - \underline{BC}$	-	

Tablica 1.5. Wyniki pomiarów impedancji wejściowych i wyjściowych czwórnika oraz obliczeń parametrów łańcuchowych

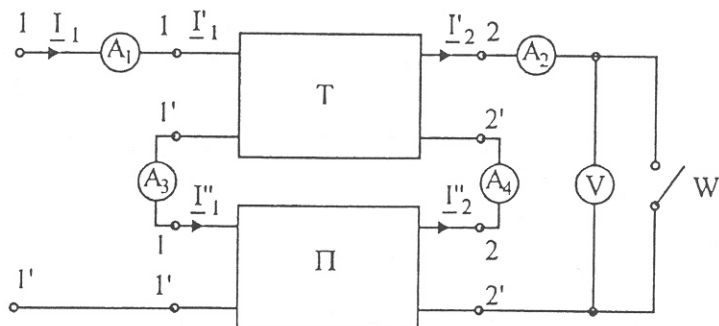
Typ czwór- nika	Pomiary							
	Zasilanie od strony zacisków 1-1'							
Połą- czenie	Stan jałowy na wyjściu				Stan zwarcia na wyjściu			
	łańcu- chowe	U_{10}	I_{10}	φ_{10}	U_{20}	U_{1z}	I_{1z}	φ_{1z}
V		A	°	V	V	A	°	A
czwór- ników	Zasilanie od strony zacisków 2-2'							
	Stan jałowy na wejściu				Stan zwarcia na wejściu			
T i Π	U_{20}	I_{20}	φ_{20}	U_{10}	U_{2z}	I_{2z}	φ_{2z}	I_{1z}
	V	A	°	V	V	A	°	A
Obliczenia								
	\underline{Z}_{10}	\underline{Z}_{1z}	\underline{Z}_{20}	\underline{Z}_{2z}	\underline{A}	\underline{B}	\underline{C}	\underline{D}
	Ω	Ω	Ω	Ω	-	Ω	S	-

Tablica 1.6. Zestawienie parametrów czwórników składowych i czwórnika zastępczego

Typ czwórnika	T	Π	Połączenie łańcuchowe czwórników T i Π	
Parametr			Obliczone z elementów czwórnika	Obliczone z impedancji stanu zwarcia i stanu jałowego
\underline{A}	-			
\underline{B}	Ω			
\underline{C}	S			
\underline{D}	-			
$\underline{AD} - \underline{BC}$	-			

Przy zasilaniu czwórnika zastępczego od strony zacisków wyjściowych (2-2') rozwieramy zaciski 1-1' drugiej strony czwórników i mierzymy między nimi napięcie. Wyniki pomiarów notujemy w tablicy 1.7. Następnie przeprowadzimy

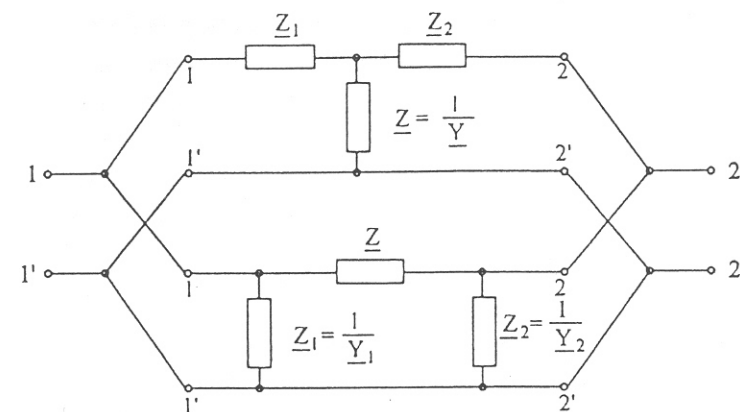
bezpośredni pomiar prądów wejściowych I_1, I_1'' i wyjściowych I_2', I_2'' obu czwórników połączonych szeregowo. Zestawiamy układ pomiarowy przedstawiony na rys.1.12 i wykonujemy badania w stanie jałowym i w stanie zwarcia na wyjściu czwórnika zastępczego. Wyniki pomiarów notujemy w tablicy 1.8.



Rys. 1.12. Pomiar prądów czwórników składowych T i Π połączonych szeregowo w stanie jałowym i w stanie zwarcia na wyjściu.

Tablica 1.8. Wyniki pomiarów prądów szeregowo połączonych czwórników T i Π w stanie jałowym i zwarcia na wyjściu

Stan jałowy na wyjściu					
U_1	U_2	I_1'	I_1''	I_2'	I_2''
V	V	A	A	A	A
Stan zwarcia na wyjściu					
U_1	U_2	I_1'	I_1''	I_2'	I_2''
V	V	A	A	A	A



Rys.1.13. Równoległe połączenie czwórników T i Π .

Tablica 1.7. Wyniki badań regularności połączenia czwórników T i Π

Sposób połączenia czwórników	Zasilanie od strony zacisków 1-1'			Zasilanie od strony zacisków 2-2'		
	U_1	I_1	U_3	U_1	I_2	U_3
	V	A	V	V	A	V
szeregowe						
równoległe						

czwórników

tu T i Π łączymy równoległe (rys.1.13). W celu pomiaru prądów po stronie wejściowej i wyjściowej, wykonujemy pomiary przy zwartych stronach wyjściowych, a następnie przy otwartych, połączonych jak na rys.1.8. Badaną konfigurację czwórników, połączonych jak na rys.1.8. Badaną konfigurację czwórników, połączonych jak na rys.1.8. Badaną konfigurację czwórników, połączonych jak na rys.1.8. Wyniki pomiarów notujemy w tablicy 1.7.

Połączenie równoległe czwórników

Czwórniki kształtu T i Π łączymy równoległe (rys.1.13). W celu pomiaru prądów po stronie wejściowej i wyjściowej, wykonujemy pomiary przy zwartych stronach wyjściowych, a następnie przy otwartych, połączonych jak na rys.1.8. Badaną konfigurację czwórników, połączonych jak na rys.1.8. Wyniki pomiarów notujemy w tablicy 1.7.

Ćwiczenie 2

FILTRY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

2.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

2.1.1. Określenia i klasyfikacja filtrów

W elektrotechnice przy przesyłaniu sygnałów elektrycznych zachodzi potrzeba przepuszczania przez dany układ sygnałów możliwie nietłumionych o częstotliwości zawartej w pewnym zakresie a zatrzymanie sygnałów o częstotliwości leżącej w innym zakresie. Do realizacji powyższego zadania wykorzystujemy filtry częstotliwościowe zwane krótko filtry.

Filtrem nazywamy czwórnik włączony między źródło a odbiornik, który przepuszcza bez tłumienia pewne zadane pasmo częstotliwości zwane *pasmem przepustowym* a tłumii w większym lub mniejszym stopniu częstotliwości położone poza tym pasmem, należące do *pasma tłumieniowego*. Oba wymienione pasma oddziela od siebie jedna *częstotliwość graniczna*, bądź kilka takich częstotliwości.

Ze względu na pasmo przepuszczania rozróżniamy filtry:

- a) *pasmostowe*, które przepuszczają prądy o pulsacjach w zakresie od ω_1 do ω_2 a tłumią prądy o pulsacjach położonych poza tym pasmem.
- b) *zaporowe*, które tłumią prądy o pulsacjach w zakresie od ω_1 do ω_2 a przepuszczają prądy o pulsacjach położonych poza tym zakresem.

Nadając częstotliwości granicznej szczególną wartość zero lub nieskończoność otrzymujemy pozostałe rodzaje filtrów:

c) *dolnoprzepustowe*, przepuszczające prądy o pulsacjach w zakresie od zera do ω_0 a tłumiące prądy o pulsacjach od ω_0 do nieskończoności.

d) *górnoprzepustowe*, przepuszczające prądy o pulsacjach w zakresie od ω_0 do nieskończoności a tłumiące prądy o pulsacjach od zera do ω_0 .

Kierując się rodzajem elementów, z których zbudowane są filtry, rozróżniamy: filtry reaktancyjne zbudowane z cewek i kondensatorów, filtry stratne RC, zawierające tylko oporniki i kondensatory oraz filtry aktywne.

W ramach klasy filtrów reaktancyjnych kształtu T, Π lub Γ wyróżniamy również filtry typu k (podstawowe) oraz filtry typu m (pochodne).

2.1.2.3. Zależności dotyczące filtrów reaktancyjnych typu k

Cechą charakterystyczną filtrów typu k jest to, że iloczyn impedancji podłużnej przez impedancję poprzeczną nie jest funkcją częstotliwości. Ponieważ reaktancja indukcyjna jest wprost proporcjonalna do częstotliwości a reaktancja pojemnościowa jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości, więc gałąź podłużna czwórnika stanowiącego filtr typu k musi mieć inny charakter niż gałąź poprzeczna.

Współczynnik przeniesienia g (a także współczynnik tłumienia, b - współczynnik fazowy) zdefiniowany jest przy obciążeniu filtru impedancją falową Z_c jako

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2} \quad (2.1)$$

Znając parametry łańcuchowe czwórnika można obliczyć współczynnik przeniesienia jako

$$g = \ln \left(\underline{A} + \sqrt{\underline{B} \cdot \underline{C}} \right) \quad (2.2)$$

Z tego równania otrzymamy parametr

$$\underline{A} = \operatorname{ch} g = \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cdot \cos b + j \operatorname{sh} a \cdot \sin b \quad (2.3)$$

Dla czwórnika symetrycznego o schemacie Y parametr $\underline{A} = 1 + \underline{Z}_T \underline{Y}_T$, zaś dla czwórnika symetrycznego o schemacie Π $\underline{A} = 1 + \underline{Z}_\Pi \underline{Y}_\Pi$. Dla filtrów typu k w obu przypadkach parametr \underline{A} jest liczbą rzeczywistą.

W pasmie przepustowym zachodzi teoretycznie równość $a = 0$, skąd $\operatorname{sh} a = 0$ oraz $\operatorname{ch} a = 1$ i otrzymujemy uproszczenie

$$A = \cos b \quad (2.4)$$

W pasmie tłumieniowym zachodzi natomiast nierówność $a \neq 0$, skąd $\operatorname{sh} a \neq 0$. Skoro parametr A jest liczbą rzeczywistą, to musi być $\sin b = 0$, czemu odpowiada ciąg wartości $b = 0, \Pi, 2\Pi, \dots, k\Pi$, dla których $\cos b = (-1)^k$. Otrzymujemy zatem uproszczenie

$$A = \pm \operatorname{ch} a \quad (2.5)$$

Z ostatnich wzorów otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} A^2 &= \cos^2 b < 1 \text{ w pasmie przepustowym,} \\ A^2 &= \operatorname{ch}^2 a > 1 \text{ w pasmie tłumieniowym,} \end{aligned} \quad (2.6)$$

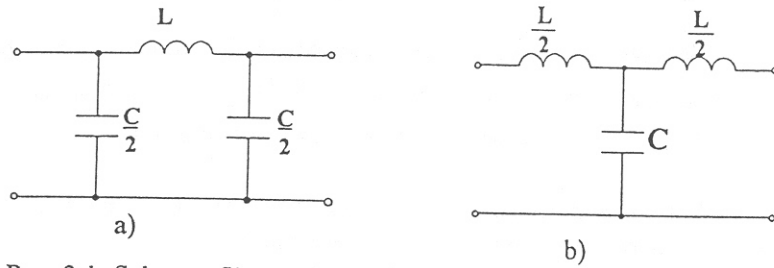
Jeżeli przekształcimy wyrażenie na impedancję falową

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}^2 - 1}{\underline{C}^2}} \quad (2.7)$$

to w wyrażeniu podpierwiastkowym mianownik jest zawsze ujemny (parametr \underline{C} jest wielkością urojoną), licznik zaś jest ujemny w pasmie przepustowym a dodatni w pasmie tłumieniowym. Wynika stąd, że impedancja falowa filtru reaktancyjnego jest liczbą rzeczywistą w pasmie przepustowym a urojona w pasmie tłumieniowym.

2.1.3. Filtry dolnoprzepustowe

Schematy filtrów dolnoprzepustowych typu Π oraz typu P przedstawiono na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Schemat filtru reaktancyjnego dolnoprzepustowego: a) typu Π oraz b) typu T.

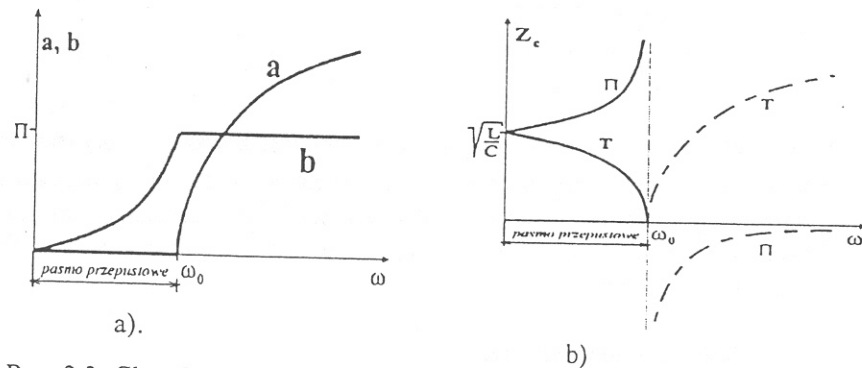
Pulsacja graniczna tych filtrów wynosi

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad (2.8)$$

zaś ich impedancję falową oblicza się odpowiednio według wzorów (2.9) i (2.10)

$$Z_{c\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (2.9)$$

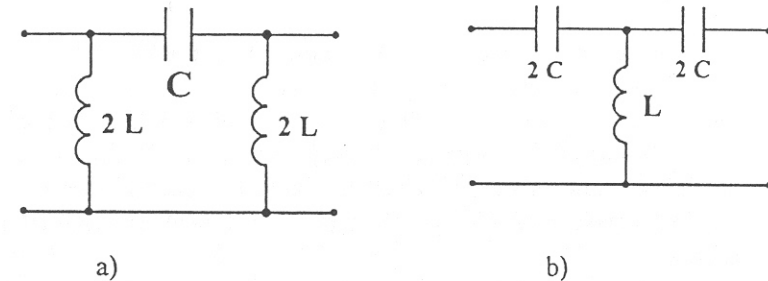
$$Z_{cT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.10)$$



Rys. 2.2. Charakterystyki częstotliwościowe: a) współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego oraz b) modułu impedancji falowej filtru dolnoprzepustowego typu Π i T.

Charakterystyki współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego dla filtru dolnoprzepustowego o kształcie Π lub T przedstawia rys. 2.2a zaś charakterystyki modułu impedancji falowej - rys. 2.2b. W pasmie przepustowym impedancje falowe obu filtrów mają charakter rzeczywisty. W pasmie tłumieniowym impedancja falowa filtru o kształcie T ma charakter indukcyjny, natomiast filtru o kształcie Π - charakter pojemnościowy. W zakresie od zera do połowy pasma przepustowego impedancja falowa zmienia się nieznacznie i jest bliska wartości $\sqrt{L/C}$. W miarę zbliżania się do pulsacji granicznej zmiany są gwałtowne i Z_{cT} maleje do zera a $Z_{c\Pi}$ rośnie do nieskończoności. Praca filtru w pobliżu pulsacji granicznej jest niekorzystna.

2.1.4. Filtry górnoprzepustowe



Rys. 2.3. Schematy filtrów reaktancyjnych górnoprzepustowych: a) o kształcie Π , b) o kształcie T.

Pulsacja graniczna filtrów górnoprzepustowych wynosi

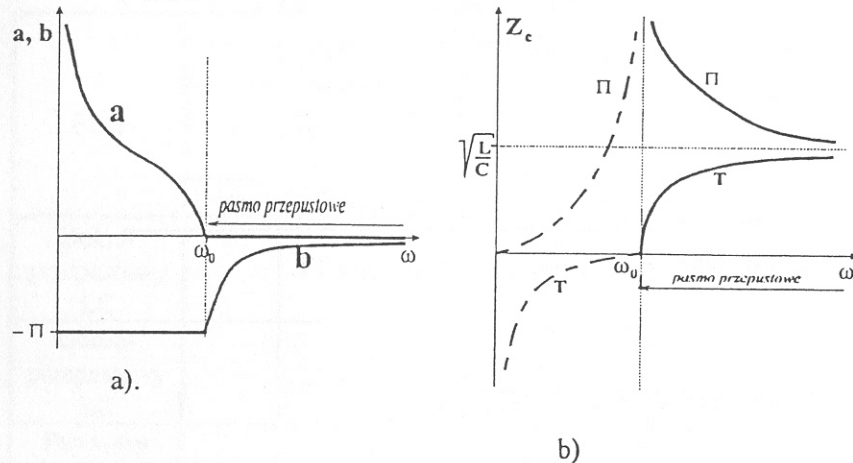
$$\omega_0 = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \quad (2.11)$$

zaś ich impedancję falową obliczamy odpowiednio ze wzorów:

$$Z_{c\Pi} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (2.12)$$

$$Z_{cT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \quad (2.13)$$

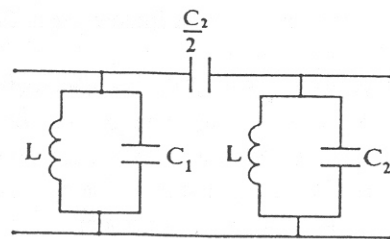
Charakterystyki współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego dla filtra górnoprzepustowego o kształcie Π lub T przedstawia rys. 2.5, zaś charakterystyki modułu impedancji falowej - rys. 2.6.



Rys. 2.4. Charakterystyki częstotliwościowe: a) współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego oraz b) modułu impedancji falowej filtra górnoprzepustowego typu Π i T .

W pasmie przepustowym impedancje falowe obu filtrów mają charakter rzeczywisty. W pasmie tłumieniowym impedancja falowa filtra o kształcie T ma charakter pojemnościowy, natomiast filtra o kształcie Π - charakter indukcyjny. Przy wielkich pulsacjach impedancja falowa w obu schematach jest bliska wartości $\sqrt{L/C}$ i zmienia się nieznacznie, natomiast w miarę zbliżania się do pulsacji granicznej zmiany Z_c są szybkie. Praca filtra w pobliżu ω_0 nie jest korzystna.

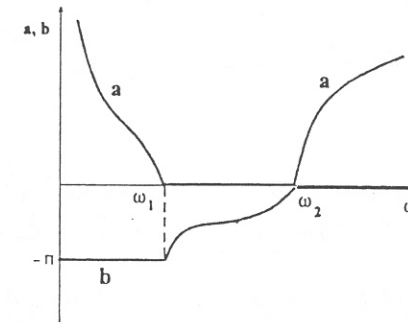
2.1.5. Filtr pasmowy



Rys.2.5. Schemat filtra reaktancyjnego pasmowego.

Pulsacje graniczne filtra pasmowego wynoszą odpowiednio

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \quad (2.14)$$



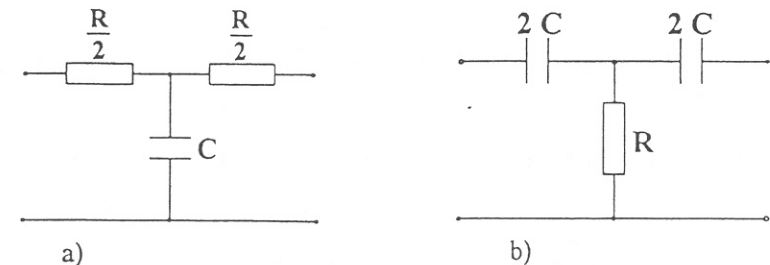
Rys. 2.6. Charakterystyki częstotliwościowe współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego filtra reaktancyjnego pasmowego.

Charakterystyki współczynnika tłumienia i współczynnika fazowego filtra pasmowego z rys. 2.5 przedstawiono na rys. 2.6

2.1.6. Filtry pasywne RC

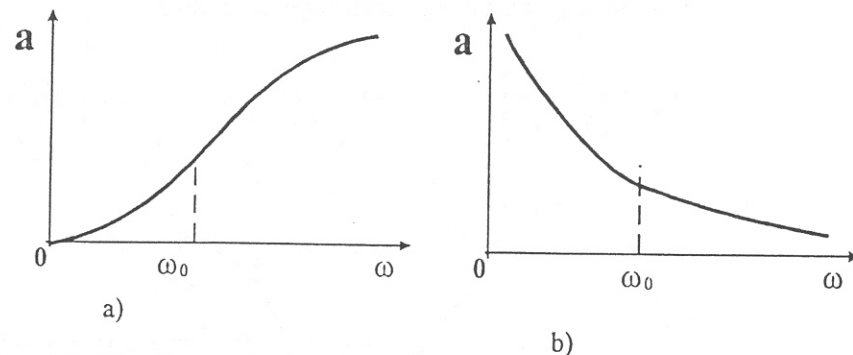
W układach filtrów reaktancyjnych występują elementy indukcyjne, których nie można realizować w technice układów scalonych. Ponadto konieczność uzyskiwania dużej indukcyjności poprzez stosowanie cewek z rdzeniem ferromagnetycznym wpływa na pogorszenie się ich dobroci. Z powyższych względów stosuje się filtry bezindukcyjne, w tym filtry pasywne RC.

Schemat filtra dolnoprzepustowego oraz górnoprzepustowego RC przedstawia rys. 2.7 zaś charakterystyki ich współczynnika tłumienia - rys. 2.8.



Rys.2.7. Schematy filtrów typu RC:

a) dolnoprzepustowego, b) górnoprzepustowego.



Rys.2.8. Charakterystyki współczynnika tłumienia filtra typu RC:
a) dolnoprzepustowego, b) górnoprzepustowego.

Jako pulsację graniczną ω_0 filtra dolnoprzepustowego umownie przyjmuje się taką pulsację, przy której rezystancja gałęzi wzdłużnej jest równa dwukrotnej wartości reaktancji poprzecznej, czyli $\frac{R}{2} = \frac{2}{\omega_0 C}$, stąd

$$\omega_0 = \frac{4}{RC} \quad (2.15)$$

Podobnie dla filtra górnoprzepustowego jako pulsację graniczną ω_0 przyjmuje się taką pulsację, przy której reaktancja gałęzi wzdłużnej jest równa dwukrotnej wartości rezystancji gałęzi poprzecznej, czyli

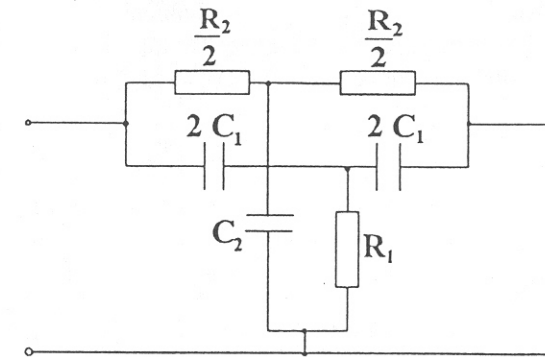
$$2R = \frac{1}{2\omega_0 C}, \quad \text{skąd}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{4RC} \quad (2.16)$$

Przykładem filtra pasmowego RC jest filtr typu TT przedstawiony na rys. 2.9

Pulsacje graniczne filtra typu TT wynoszą

$$\omega_1 = \frac{1}{4R_1 C_1} \quad \omega_2 = \frac{4}{R_2 C_2} \quad (2.17)$$



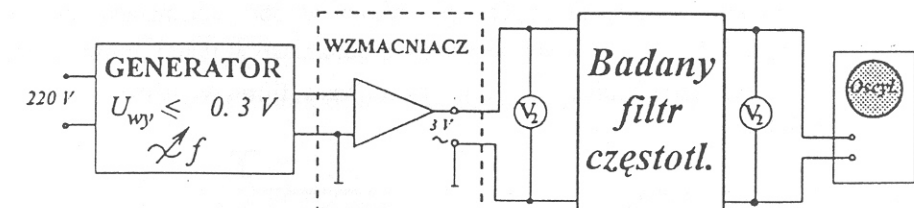
Rys. 2.9. Schemat filtra pasmowego RC typu TT.

2.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie częstotliwościowej charakterystyki współczynnika tłumienia dla filtrów dolnoprzepustowych, górnoprzepustowych i pasmowych, zarówno reaktancyjnych jak i typu RC oraz komputerowe zaprojektowanie filtra środkowoprzepustowego.

2.2.1. Badanie filtrów częstotliwościowych

Należy zestawić układ pokazany na rys. 2.10.



Rys. 2.10. Schemat układu do badania filtrów częstotliwościowych.

Nastawić napięcie U_1 filtra potencjometrem napięcia wyjściowego generatora na zadaną wartość, utrzymując ją na stałym poziomie podczas pomiarów. Zmieniając częstotliwość generatora, dokonać pomiarów napięcia wyjściowego U_2 filtra. Wyniki pomiarów należy wpisać do tablicy 2.1. Należy zaobserwować na oscyloskopie przebiegi napięcia na wyjściu filtra

częstotliwościowego, zwracając uwagę na amplitudę sygnału napięciowego przy częstotliwościach

Tablica 2.1

Filtr	Pomiary			Obliczenia		Przebiegi napięcia na wyjściu filtru
	f	U ₁	U ₂	$\frac{U_1}{U_2}$	a	
	Hz	V	V	-	dB	
Dolno-przepustowy LC						
Górno-przepustowy LC						
przepustowy LC						
Pasmowy LC						
Dolno-przepustowy RC						
Górno-przepustowy RC						
Pasmowy TT						

Współczynnik tłumienia filtru wyrażony w decybelach obliczamy ze wzoru

$$a = 20 \log \frac{U_1}{U_2} \quad (2.18)$$

Charakterystyki częstotliwościowe współczynnika tłumienia wykreślamy dla każdego z badanych układów. Z wykresów należy odczytać orientacyjne wartości częstotliwości granicznych.

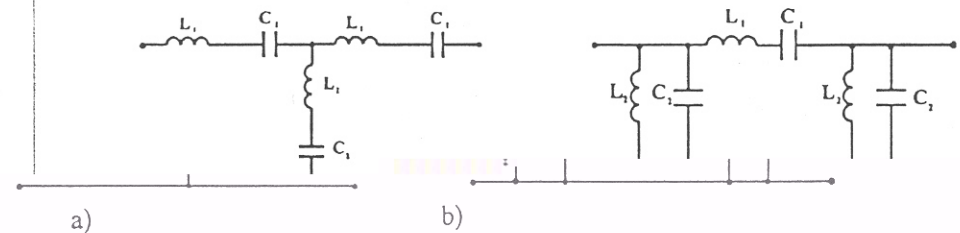
2.2.2. Projektowanie filtru pasmowego

W oparciu o program komputerowy FILTRCZ należy zaprojektować filtr pasmowy o zadanym przez prowadzącego zajęcia pasmie przepuszczania i tłumienia oraz rezystancji obciążenia.

Program FILTRCZ oblicza parametry i charakterystyki częstotliwościowe filtrów reaktancyjnych pasmowych o stałym k , przedstawionych na rys. 2.11.

Danymi wejściowymi są:

- rezystancja obciążenia filtru R_0 [Ω],
- graniczne częstotliwości pasma f_1, f_2 [Hz],
- przyrost częstotliwości z jakim mają być obliczone charakterystyki Δf [Hz].



Rys. 2.11. Projektowane filtry reaktancyjne pasmowe o strukturze: a) typu T, b) typu Π .

Jako wynik obliczeń otrzymujemy z programu wartości parametrów elementów reaktancyjnych L_1, C_1, C_2 i L_2 oraz charakterystyki częstotliwościowe współczynnika tłumienia a , współczynnika fazowego b oraz modułu impedancji falowej Z_c dla zadanego zakresu częstotliwości.

Należy wykonać wykresy charakterystyk częstotliwościowych zaprojektowanych filtrów i zinterpretować wartości obliczonych wielkości w poszczególnych zakresach częstotliwości.

Ćwiczenie 3

OBWODY PRĄDU PRZEMIENNEGO Z ELEMENTAMI
FERROMAGNETYCZNYMI

3.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

3.1.1. Wstęp

Podstawową częścią każdego obwodu prądu przemiennego z elementem ferromagnetycznym jest uzwojenie umieszczone na rdzeniu ferromagnetycznym. Cechą wyróżniającą elektromagnetyczne obwody prądu przemiennego jest wzajemne sprzężenie prądów w uzwojeniach ze strumieniami w rdzeniach, co komplikuje analizę obwodów i powoduje konieczność stosowania założeń upraszczających.

Nieliniowość charakterystyki magnesowania materiału rdzenia jest powodem odkształcenia przebiegu prądu magnesującego w przypadku zasilania obwodu napięciem sinusoidalnie zmiennym, bądź strumienia przy sinusoidalnym przebiegu prądu w uzwojeniu.

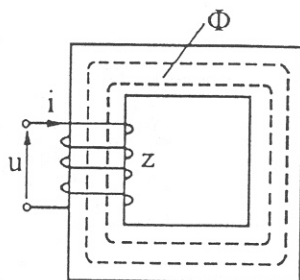
W analizie obwodów prądu przemiennego z elementami ferromagnetycznymi stosuje się najczęściej następujące założenia upraszczające:

- zamiast pętli histerezy przy przemagnesowaniu rdzenia przyjmuje się pierwotną charakterystykę magnesowania,
- zakłada się, że odpowiedź obwodu nieliniowego w stanie ustalonym na wymuszenie sinusoidalne jest okresowa odkształcona,
- zakłada się, że do odpowiedzi odkształconej można stosować zasadę bilansu harmonicznym i brać pod uwagę w obliczeniach jedynie pierwszą harmoniczną odpowiedzi.

3.1.2. Badanie dławika

Najprostszym przykładem obwodu prądu przemiennego z elementem ferromagnetycznym jest obwód cewki z rdzeniem stalowym zwanej dławikiem.

W uzwojeniu dławika płynie prąd zmienny $i(t)$ wytwarzający zmienny w czasie strumień magnetyczny Φ którego przebieg pokazuje rysunek 3.1.



Rys.3.1. Cewka z rdzeniem ferromagnetycznym.

Strumień skojarzony cewki wyraża się wzorem:

$$\Psi = z \Phi \quad (3.1)$$

gdzie z jest liczbą zwojów cewki.

Jeśli założyć, że rezystancja uzwojenia cewki jest równa zero, to napięcie na uzwojeniu dławika wyniesie:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = z \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.2)$$

Przyjmując w powyższym wzorze $\Psi = \Psi_m \sin \omega t$ otrzymamy:

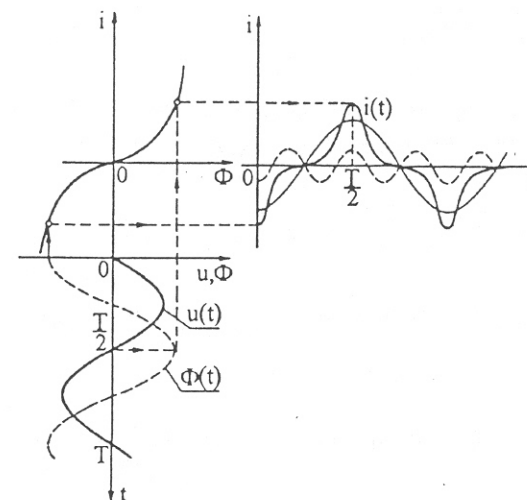
$$u = \omega \Psi_m \cos \omega t = \omega \Psi_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (3.3)$$

Ze wzoru wynika, że sinusoidalne napięcie $u(t)$ wytwarza w rdzeniu sinusoidalny strumień magnetyczny opóźniony w fazie o $\pi/2$ względem tego napięcia.

Przebieg prądu $i(t)$ można wyznaczyć graficznie, korzystając z charakterystyki magnesowania rdzenia równoznacznej z charakterystyką $\Psi(i)$, bądź analitycznie stosując aproksymację krzywej $\Psi(i)$ niepełnym wielomianem, którego wyrazy zawierać będą tylko nieparzyste potęgi zmiennej Ψ .

Konstrukcja przebiegu prądu pokazana jest na rysunku 3.2.

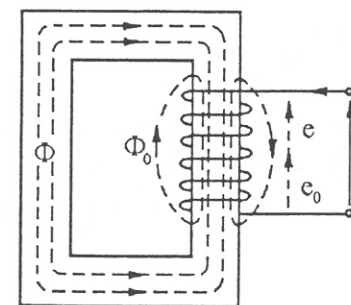
Krzywa prądu posiada wyraźną pierwszą i trzecią harmoniczną. Jeśli wymusimy przepływ prądu sinusoidalnie zmiennego w uzwojeniu, to strumień a zatem i napięcie na zaciskach cewki będą miały przebiegi odkształcone.



Rys.3.2. Wyznaczanie odkształconego przebiegu prądu w uzwojeniu cewki z rdzeniem ferromagnetycznym.

Zgodnie z przyjętymi na wstępie uproszczeniami z dostateczną dla praktyki dokładnością można uwzględnić w dalszej analizie tylko harmoniczną podstawową, co znacznie upraszcza opis zjawisk.

Prąd płynący w uzwojeniu dławika wytwarza strumień magnetyczny który dzieli się na strumień główny Φ zamykający się w rdzeniu i strumień rozproszenia Φ_0 , dla którego większa część drogi przypada na powietrze. Rozpływ strumieni magnetycznych w dławiku przedstawia rysunek 3.3



Rys.3.3. Rozpływ strumieni w cewce z rdzeniem ferromagnetycznym.

Strumień Φ_0 jest w przybliżeniu proporcjonalny do prądu $i(t)$ w uzwojeniu, wobec czego indukcyjność rozproszenia L_0 można przyjąć za stałą i równą:

$$L_0 = z \frac{\Phi_0}{i} \quad (3.4)$$

Zmienne w czasie strumienie Φ i Φ_0 powodują powstanie sił elektromotorycznych w uzwojeniu cewki:

$$e = -z \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{oraz} \quad e_0 = -z \frac{d\Phi_0}{dt} = -L_0 \frac{di}{dt} \quad (3.5)$$

Dla obwodu przedstawionego na rysunku 3.3 można więc napisać równanie napięć:

$$-u + Ri = e + e_0 \quad \text{lub} \quad Ri + L_0 \frac{di}{dt} + u_\mu = u \quad (3.6)$$

w którym R jest rezystancją uzwojenia cewki a u_μ napięciem indukowanym w jej uzwojeniu na skutek zmian strumienia głównego. Napięcie to równe jest $-e$, a jego wartość skuteczna przy cosinusoidalnym przebiegu strumienia wynosi:

$$U_\mu = 4.44 z \Phi_m f \quad (3.7)$$

gdzie:

f - częstotliwość prądu w cewce

Φ_m - wartość maksymalna strumienia głównego

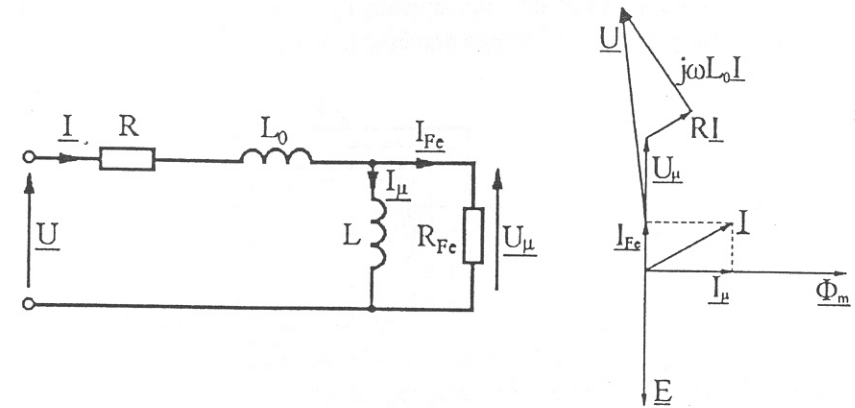
Uwzględniając założenia upraszczające możemy wzór (3.6) zapisać w postaci zespolonej:

$$(R + j\omega L_0) \underline{I} + \underline{U}_\mu = \underline{U} \quad (3.8)$$

Płynący w uzwojeniu cewki prąd \underline{I} możemy rozłożyć na dwie fikcyjne składowe: prąd magnesujący \underline{I}_μ opóźniony względem napięcia zasilającego \underline{U} o 90° , oraz prąd \underline{I}_{Fe} strat w żelazie, będący w fazie z tym napięciem:

$$\underline{I} = \underline{I}_\mu + \underline{I}_{Fe} \quad (3.9)$$

Zależności (3.8) i (3.9) wykorzystuje się do konstrukcji schematu zastępczego dławika oraz odpowiadającego mu wykresu wskazowego pokazanego na rysunku 3.4.



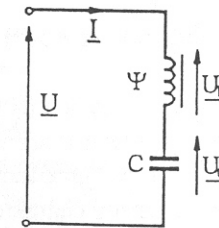
Rys.3.4. Schemat zastępczy i wykres wskazowy dławika.

Elementy R_{Fe} oraz L schematu zastępczego są w ogólnym przypadku nieliniowe i zależą od wartości skutecznej napięcia \underline{U} .

3.1.3. Zjawisko ferorezonansu

Zjawisko rezonansu występujące w obwodzie w którym cewka z rdzeniem ferromagnetycznym pracująca w stanie nasycenia połączona jest szeregowo lub równoległe z kondensatorem o charakterystyce liniowej nosi nazwę ferorezonansu. Zależnie od sposobu połączenia tych elementów wystąpi zjawisko ferorezonansu napięć lub prądów.

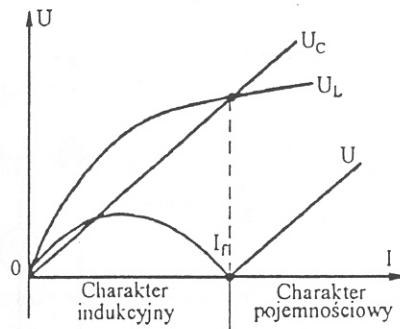
Dla obwodu szeregowego Ψ , C przedstawionego na rysunku 3.5 można wykreślić charakterystyki napięciowo-prądowe dławika, kondensatora, oraz charakterystykę łączną obu elementów.



Rys.3.5. Obwód ferorezonansu napięć.

Warunkiem wystąpienia ferorezonansu napięć jest przecięcie się charakterystyk napięciowo-prądowych obu elementów. Punkt ten odpowiada wartości prądu dla której moduły pierwszych harmonicznych napięć na cewce i kondensatorze są sobie równe.

Charakterystyki napięciowo-prądowe kondensatora i cewki idealnej, oraz charakterystykę łączną przedstawia rysunek 3.6.

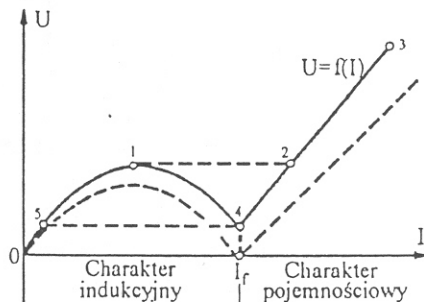


Rys. 3.6. Charakterystyki napięciowo-prądowe elementów szeregowego obwodu ferorezonansowego.

Jak wynika z rysunku charakterystyka łączna $U = f(I)$ jest przy zadanych wartościach napięć niejednoznaczna co uniemożliwia jej doświadczalne zdjęcie przy zasilaniu obwodu ze źródła napięcia.

Charakterystyki dławika i cewki przecinają się w punkcie o odciętej I_f odpowiadającej wartości prądu w chwili ferorezonansu. W przedziale wartości prądu od 0 do I_f wartość napięcia U_L na dławiku jest większa od napięcia U_C kondensatora, obwód ma więc charakter indukcyjny. Dla prądów $I > I_f$ obwód ma charakter pojemnościowy. Przy prądzie I_f moduły napięć U_L i U_C są sobie równe a napięcie zasilające U jest równe zero. W obwodzie rzeczywistym Ψ, C napięcie to znacznie różni się od zera a przyczyną tego są straty mocy w rdzeniu cewki, rezystancja uzwojenia, upływność kondensatora oraz odkształcenie krzywej prądu.

Charakterystyka napięciowo-prądowa rzeczywistego obwodu Ψ, C przedstawiona jest na rysunku 3.7.

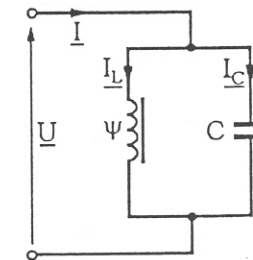


Rys. 3.7. Charakterystyka napięciowo-prądowa rzeczywistego obwodu Ψ, C .

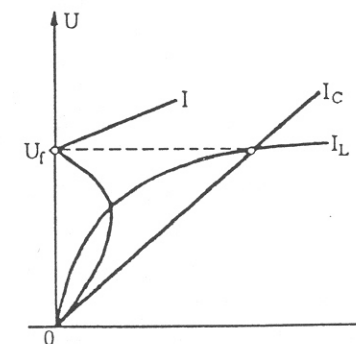
Zakładamy, że obwód Ψ, C zasilany jest napięciem płynnie regulowanym od zera. Podwyższając napięcie od $U=0$ do wartości odpowiadającej punktowi 1 na charakterystyce łącznej zaobserwujemy skokową zmianę prądu do wartości odpowiadającej punktowi 2. Następuje wtedy zmiana charakteru obwodu z indukcyjnego na pojemnościowy, a więc skokowa zmiana fazy o kąt π . Zjawisko to nosi nazwę przewrotu a punkt 1 charakterystyki łącznej jest punktem równowagi chwiejnej. Dalsze podwyższanie napięcia źródłowego powoduje wzrost prądu w sposób ciągły.

Zmniejszając napięcie do wartości odpowiadającej punktowi 4 zaobserwujemy skokową zmianę prądu do wartości w punkcie 5 charakterystyki łącznej. Punkt 4, będący punktem ferorezonansu jest więc także punktem równowagi chwiejnej.

Na rysunku 3.8 przedstawiono obwód równoległy Ψ, C w którym wystąpić może zjawisko ferorezonansu prądów.



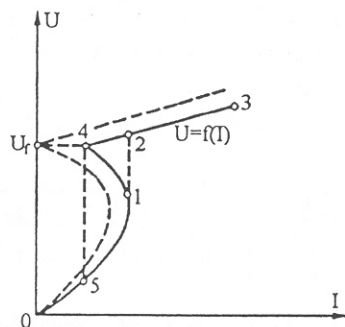
Rys.3.8. Obwód ferorezonansu prądów.



Rys.3.9. Charakterystyki napięciowo-prądowe elementów równoległego obwodu ferorezonansowego.

Przebieg tego zjawiska jest podobny do omówionego powyżej ferorezonansu napięć. Rysunek 3.9 przedstawia charakterystyki napięciowo-prądowe idealnych

elementów obwodu oraz charakterystykę wypadkową, rysunek 3.10 - charakterystykę obwodu rzeczywistego. Zjawisko przewrotu wystąpi dla wartości napięć odpowiadających punktom 1-2 oraz 4-5, pod warunkiem, że obwód zasilany będzie ze źródła prądu.

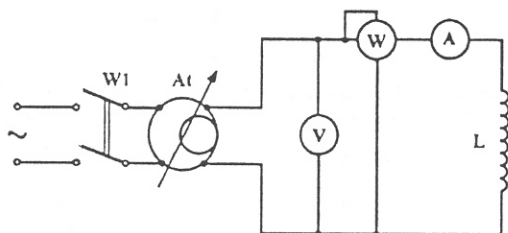


Rys.3.10. Charakterystyka napięciowo-prądowa rzeczywistego obwodu Ψ, C .

3.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

3.2.1. Badanie dławika

Należy zestawić układ pomiarowy według rysunku 3.11.



Rys.3.11. Układ pomiarowy do badania dławika.

Zmieniając wartość napięcie zasilającego odczytać wskazania mierników. Wyniki zapisać w tablicy 3.1

Tablica 3.1

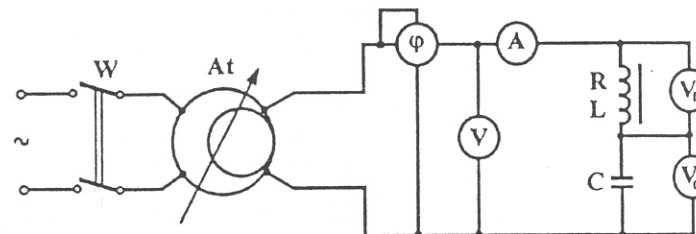
l.p.	I	U_L	P	$\cos\varphi$	S	Q	Z	L
	A	V	W	-	VA	VAR	Ω	H

Na podstawie pomiarów i obliczeń wykreślamy charakterystyki: $U=f(I)$, $L=f(I)$, $Z=f(I)$, $P=f(I)$, $\cos\varphi=f(I)$.

Włączając szeregowo z dławikiem opornik R podać na oscyloskop sygnał proporcjonalny do prądu w obwodzie. Narysować przebieg prądu w dławiku.

3.2.2. Badanie zjawiska ferorezonansu napięć

Zestawić układ przedstawiony na rysunku 3.12.



Rys. 3.12. Układ pomiarowy do badania zjawiska ferorezonansu napięć.

Po sprawdzającym uzyskaniu ferorezonansu napięć w obwodzie, zdejmujemy zwierając dławik charakterystykę $U_C=f(I)$ kondensatora oraz charakterystykę łączną $U=f(I)$. Wyniki notujemy w tablicach 3.2 i 3.3.

Tablica 3.2

l.p.	I	U_C
	A	V

Tablica 3.3

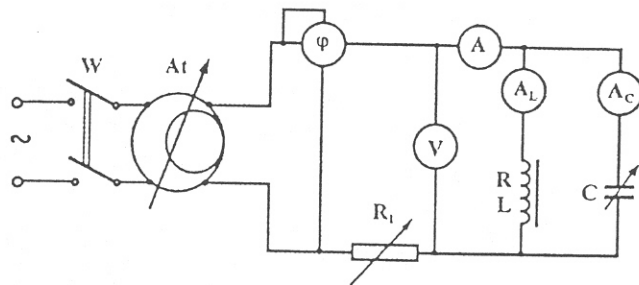
l.p.	I	U	U_C	U_L	φ
	A	V	V	V	

Podczas pomiarów należy zaobserwować wartości prądów w punktach równowagi chwiejnej.

Narysować na wspólnym wykresie $U_C=f(I)$, $U_{RL}=f(I)$ oraz charakterystykę łączną $U=f(I)$ elementów z tym samym granicznymi i doświadczalnie na podstawie zmian kąta fazowego określić charakter obwodu.

3.2.3. Badanie zjawiska ferrezonansu prądów

Zestawić układ pomiarowy przedstawiony na rysunku 3.13.



Rys.3.13. Układ pomiarowy do badania zjawiska ferrezonansu prądów.

Zdjąć charakterystykę łączną $U=f(I)$ obu elementów. Wyniki zanotować w tablicy 3.4.

Tablica 3.4

l.p.	U	I	I_C	I_L	φ
	V	A	A	A	

Na wspólnym wykresie umieścić charakterystyki dławika, kondensatora oraz charakterystykę łączną otrzymaną graficznie i doświadczalnie. Na podstawie zmian kąta fazowego określić charakter obwodu. Porównać przebieg zjawiska ferrezonansu w obu badanych układach.

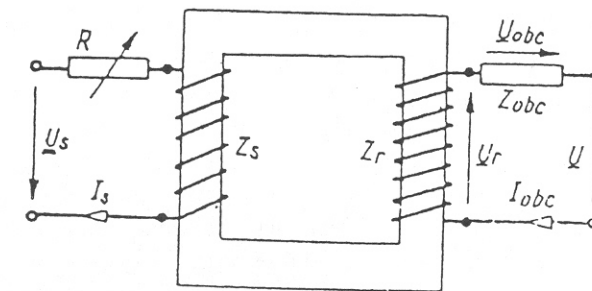
Ćwiczenie 4

WZMACNIACZ MAGNETYCZNY

4.1 WIADOMOŚCI OGÓLNE

4.1.1. Wstęp

Wzmacniaczem magnetycznym nazywamy urządzenie elektromagnetyczne, w którym wykorzystana jest zależność przenikalności magnetycznej materiałów ferromagnetycznych od podmagnesowującego pola magnetycznego stałego. Zjawisko to umożliwia wzmocnienie sygnału wejściowego, wytwarzającego lub zmieniającego pole podmagnesowujące. W celu zrozumienia zasady działania wzmacniacza magnetycznego rozpatrzmy schemat przedstawiony na rys.4.1.



Rys.4.1. Schemat prostego wzmacniacza magnetycznego.

Jest to schemat prostego wzmacniacza magnetycznego. Uzwojenie sterujące o liczbie zwojów (Z_s) jest połączone szeregowo z opornikiem o rezystancji (R) i dołączone do źródła napięcia stałego. Cewka robocza o liczbie zwojów (Z_r) i obciążenie o impedancji (Z_{obc}) połączone szeregowo, są zasilane napięciem sinusoidalnym (U). Obwód uzwojenia sterującego nazywamy obwodem

wyściowym a obwód uzwojenia roboczego - obwodem wyjściowym. Strumień magnetyczny wytworzony prądem (I_s) w uzwojeniu (z_s) będziemy nazywać strumieniem podmagnesowania. Parametry obwodu wyjściowego są tak dobrane, aby przy braku strumienia podmagnesowania, rdzeń nie był nasycony. Prąd w uzwojeniu roboczym wyraża się wzorem:

$$I_{obc} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L + X_{obc})^2}} \quad (4.1)$$

gdzie: R_2 - suma rezystancji uzwojenia i obciążenia
 ω - pulsacja napięcia zasilającego
 X_{obc} - reaktancja obciążenia
 L - indukcyjność uzwojenia roboczego

Wartość indukcyjności zależy od przenikalności magnetycznej rdzenia (μ) dla prądu zmiennego i określa się wzorem:

$$L = \frac{z_r^2 \cdot s}{l} \cdot \mu \quad (4.2)$$

gdzie: s - przekrój rdzenia
 l - średnia długość drogi magnetycznej w rdzeniu

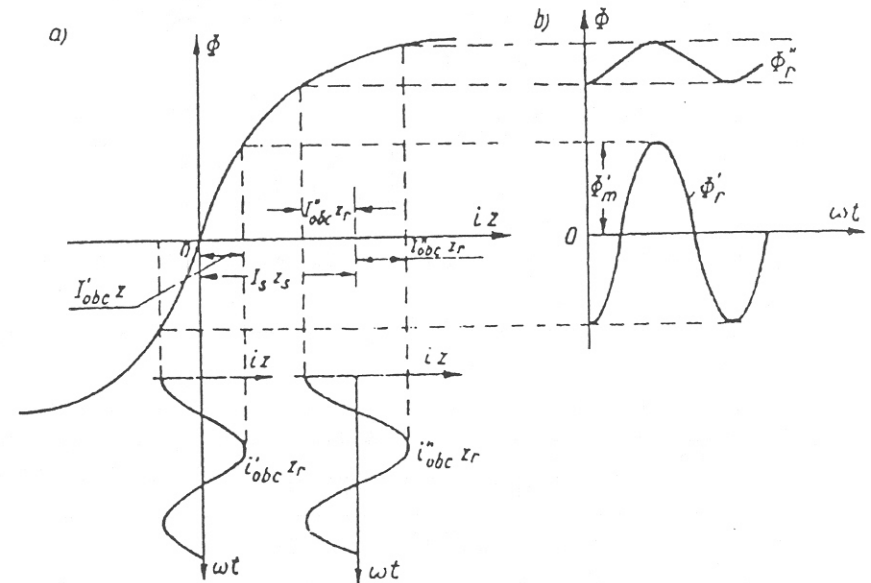
Wartość strumienia podmagnesowania zmieniamy poprzez zmianę wartości prądu sterującego. Powodujemy w ten sposób zmianę przenikalności magnetycznej rdzenia (μ) a zatem indukcyjności uzwojenia roboczego (L) oraz prądu obciążenia (I_{obc}). Z narastaniem wartości prądu sterującego następuje wzrost prądu w obwodzie wyjściowym i napięcia na obciążeniu. Jeżeli charakterystyka magnesowania materiału, z którego wykonany jest rdzeń, posiada dużą stromość odcinka liniowego, to wówczas małe zmiany prądu sterującego powodują znaczne zmiany napięcia na obciążeniu, prądu obciążenia i mocy pobieranej przez obciążenie. Zjawiska te wyjaśnia rys.4.2. W części (a) rysunku jest przedstawiona charakterystyka dynamiczna rdzenia $\Phi=f(i \cdot z)$. Na rysunku oznaczono:

w przypadku braku strumienia podmagnesowania:

Φ_r' - strumień magnetyczny wytworzony w uzwojeniu roboczym
 i'_{obc} - prąd obciążenia
 $i'_{obc} \cdot z_r$ - przepływ od uzwojenia roboczego

w przypadku istnienia strumienia podmagnesowania:

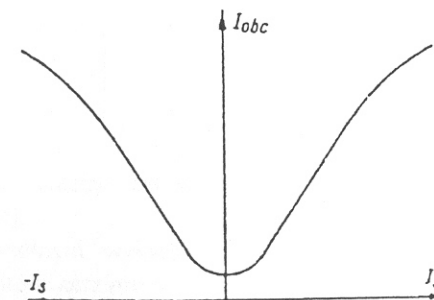
Φ_r'' - strumień magnetyczny wytworzony w uzwojeniu roboczym
 i''_{obc} - prąd obciążenia
 $i''_{obc} \cdot z_r$ - przepływ od uzwojenia roboczego



Rys.4.2. Wykresy $\Phi=f(i \cdot z)$, $\Phi=f(\omega \cdot t)$ i $z=f(\omega \cdot t)$ dla układu z rys.4.1.

Czynimy założenie, że prąd obciążenia (i_{obc}) jest sinusoidalny. Sinusoidalne będą wówczas również krzywe przepływu. Przy czym

$$i''_{obc} \cdot z_r > i'_{obc} \cdot z_r \quad (4.3)$$



Rys.4.3. Charakterystyka wzmacniacza $I_{obc}=f(I_s)$.

W przypadku pierwszym amplituda ($\hat{\Phi}'_r$) jest duża, więc napięcie indukowane w uzwojeniu roboczym jest duże, co równoważne jest dużej reakcji tego uzwojenia (ωL). Jeżeli w obwodzie wejściowym występuje prąd sterujący, to strumień Φ''_r jest sinusoidalny, a granice jego zmian są znacznie mniejsze od ($2\hat{\Phi}'_r$). Wówczas w uzwojeniu roboczym indukuje się znacznie mniejsze napięcie, co równoważne jest zmniejszeniu reakcji tego uzwojenia. Na rys.4.3 podano charakterystykę wzmacniacza $I_{obc}=f(I_s)$.

Ważnymi wielkościami charakteryzującymi wzmacniacz są współczynniki:

- a) współczynnik wzmocnienia napięcia - stosunek przyrostu napięcia wyjściowego do przyrostu napięcia na wejściu:

$$K_u = \frac{\Delta U_{obc}}{\Delta U_s} \quad (4.4)$$

W tym miejscu ustalamy, że napięciem wyjściowym określamy napięcie na impedancji obciążenia,

- b) współczynnik wzmocnienia prądu - stosunek przyrostu prądu wyjściowego do przyrostu prądu na wejściu:

$$K_i = \frac{\Delta I_{obc}}{\Delta I_s} \quad (4.5)$$

- c) współczynnik wzmocnienia mocy - stosunek przyrostu mocy wyjściowego do odpowiedniego przyrostu mocy na wejściu:

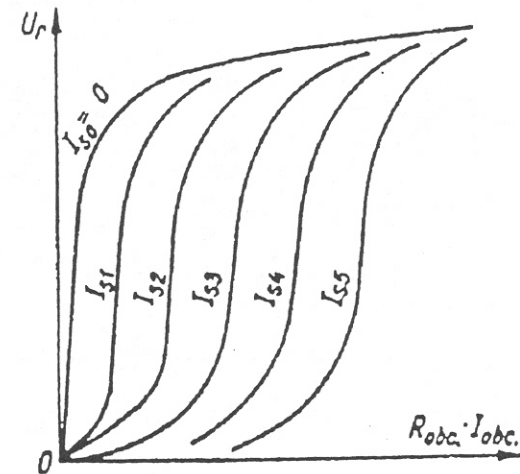
$$K_p = \frac{\Delta P_{obc}}{\Delta P_s} \quad (4.6)$$

Dla dokonania analizy pracy wzmacniacza magnetycznego posługujemy się rodziną charakterystyk $U_r=f(I_{obc})$ w odniesieniu do danych wartości (I_s). Przy założeniu obciążenia czysto rezystancyjnego można na osi odciętych, zamiast wartości (I_{obc}), odkładać wartości ($R_{obc} \cdot I_{obc}$). Ponadto jest wygodnie przyjąć jednakową podziałkę dla odciętych i rzędnych wykresu. Rodzinę charakterystyk $U_r=f(R_{obc} \cdot I_{obc})$ podano na rys.4.4.

Jeżeli pominąć rezystancję uzwojenia roboczego, to napięcia (U_r) i ($R_{obc} \cdot I_{obc}$) są przesunięte w fazie o ćwierć okresu. Wówczas możemy napisać równanie:

$$U_r^2 + (R_{obc} \cdot I_{obc})^2 = U^2 \quad (4.7)$$

Jest to równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu (U). Punkty przecięcia się tego okręgu z charakterystykami wyznaczają zależność I_{obc} od I_s .



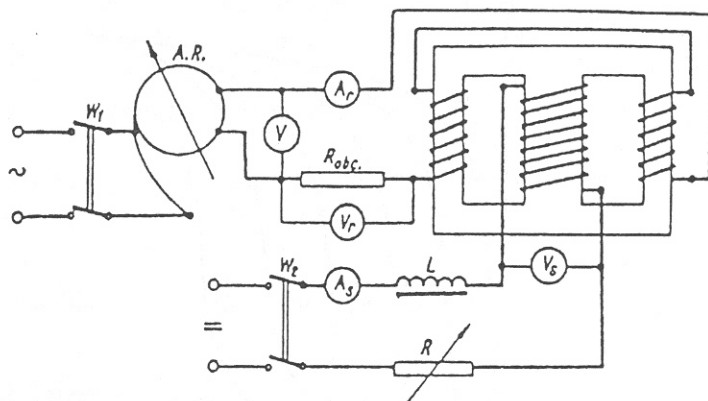
Rys.4.4. Charakterystyki wzmacniacza $U_r=f(R_{obc} \cdot I_{obc})$ przy $I_s=const$.

W praktyce stosujemy wzmacniacze magnetyczne bardziej rozbudowane, bowiem omówiony tu wzmacniacz posiada następujące niekorzystne cechy:

- przemienne strumień magnetyczny wytworzony w uzwojeniu roboczym indukuje napięcie przemienne w uzwojeniu sterującym, wskutek czego w obwodzie sterującym powstaje prąd przemienne dający dodatkowe straty mocy i pogorszenie pracy wzmacniacza,
- składowa przemienne strumienia magnetycznego zawiera dużą amplitudę drugiej harmonicznej, wskutek czego w napięciu U_{obc} i prądzie I_{obc} pojawiają się niepożądane drugie harmoniczne.

4.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

Zestawiamy układ połączeń wg rys.4.5. Uzwojenie robocze dławika włączamy do źródła napięcia przemiennego. Przy $U = \text{const}$ zmieniamy natężenie prądu sterującego od $(-I_s)$ do $(+I_s)$ i odczytujemy wartości prądu obciążenia. Pomiar wykonujemy dla trzech różnych wartości napięcia przemiennego (U). Wyniki pomiarów zapisujemy w tabelicy 4.1. Na podstawie wyników pomiarów wykreślamy charakterystyki $I_{obc} = f(I_s)$ dla trzech wartości napięcia (U).



Rys.4.5. Układ pomiarowy do badania wzmacniacza magnetycznego.

Tabela 4.1

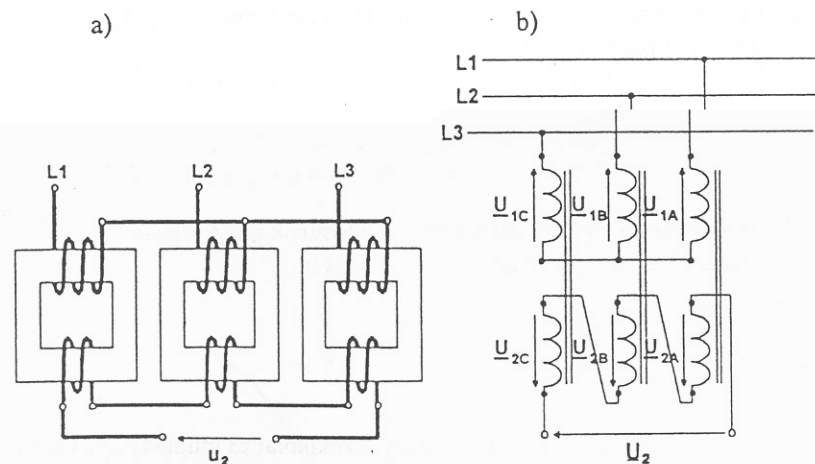
Lp.	Obwód prądu przemiennego			Obwód prądu stałego		
	U_r	I_r	P_r	U_s	I_s	P_s
	V	A	W	V	A	W

Ćwiczenie 5

MAGNETYCZNE MNOŻNIKI CZĘSTOTLIWOŚCI

5.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

Dla wielu odbiorników, takich jak indukcyjne układy grzejne, napędy elektryczne o dużych prędkościach obrotowych, pożądana jest częstotliwość napięcia zasilającego wyższa od częstotliwości sieciowej. Dla podwyższenia częstotliwości stosuje się przetwornice częstotliwości maszynowe, tyrystorowe oraz magnetyczne mnożniki częstotliwości.



Rys.5.1. Transformatorowy potrajacz częstotliwości: a) układ połączeń, b) schemat elektryczny.

W mnożnikach magnetycznych wykorzystuje się zjawisko silnej nieliniowości charakterystyki magnesowania obwodów magnetycznych,

zbudowanych z zimnowalcowanej blachy transformatorowej. Spośród wielu rodzajów mnożników magnetycznych szczególne znaczenie mają potrajacze częstotliwości, które obok trzykrotnego podwyższania częstotliwości symetryzują obciążenia jednofazowe.

Magnetyczny potrajacz częstotliwości typu transformatorowego składa się z trzech jednakowych jednofazowych transformatorów, których uzwojenia pierwotne połączone są w gwiazdę bez przewodu zerowego, zaś uzwojenia wtórne połączone są w otwarty trójkąt (rys.5.1.a, b). Przy zasilaniu układu ze źródła napięcia trójfazowego symetrycznego, prądy magnesujące są odkształcone (bo charakterystyki magnesowania rdzeni są nieliniowe) i zawierają nieparzyste harmoniczne, za wyjątkiem harmonicznych podzielnych przez 3 (tj. 3, 9, 15...). Prądy te wywołują w każdym rdzeniu strumienie odkształcone, które z kolei indukują w uzwojeniach wtórnych napięcia odkształcone. Są to napięcia zawierające harmoniczną podstawową i wyższe harmoniczne tworzące układy kolejności zerowej (tj. 3, 9, 15...). W otwartym trójkącie suma napięć od harmonicznych innych niż rzędu $3n$ jest równa zero, bo dla pierwszej (podstawowej) harmonicznej:

$$\underline{U}_{A(1h)} + \underline{U}_{B(1h)} + \underline{U}_{C(1h)} = \underline{U}_{A(1h)} \cdot (1 + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ}) = 0,$$

harmoniczne parzyste napięć fazowych nie występują, zaś dla harmonicznych trzeciego rzędu ($3n$), np. dla trzeciej harmonicznej:

$$\underline{U}_{A(3h)} + \underline{U}_{B(3h)} + \underline{U}_{C(3h)} = \underline{U}_{A(3h)} \cdot (1 + e^{-j3 \cdot 120^\circ} + e^{j3 \cdot 120^\circ}) = 3 \cdot \underline{U}_{A(3h)}$$

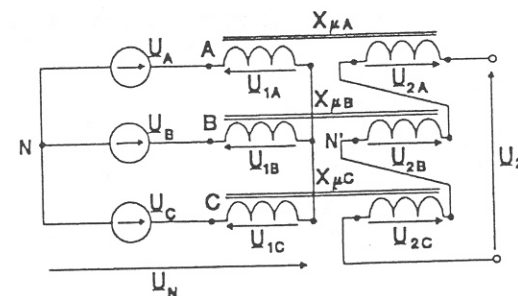
Amplitudy 9, 15 i wyższych harmonicznych są niewielkie w porównaniu z amplitudą trzeciej harmonicznej. Napięcie u_2 ma zatem częstotliwość trzykrotnie większą od częstotliwości źródła trójfazowego.

Jak wspomniano wcześniej, magnetyczne mnożniki częstotliwości symetryzują obciążenia jednofazowe. Dzieje się tak dlatego, że obciążenie jednofazowe zasilane przez magnetyczny potrajacz częstotliwości z sieci trójfazowej, stanowi z punktu widzenia tej sieci symetryczne obciążenie trójfazowe.

O wartości napięcia potrojonej częstotliwości na wyjściu mnożnika decyduje kształt charakterystyki magnesowania rdzeni jednofazowych transformatorów tworzących potrajacz. W oparciu o charakterystykę magnesowania można różnymi metodami analitycznymi bądź graficznymi wyznaczyć napięcie na zaciskach wyjściowych potrajacza.

Obliczenia napięcia wyjściowego sprowadzają się przede wszystkim do wyznaczenia udziału trzeciej harmonicznej indukcji $B_{(3h)}$ w rdzeniach.

Udział trzeciej harmonicznej indukcji warunkowany jest określonym stanem nasycenia rdzenia (punkt pracy na krzywej magnesowania). Znajomość wartości indukcji trzeciej harmonicznej $B_{(3h)}$ oraz odpowiadającej jej wartości indukcji pierwszej harmonicznej $B_{(1h)}$ pozwalają przy znanych wymiarach obwodu magnetycznego i liczbach zwojów uzwojeń określić napięcie wyjściowe. Przy obliczaniu napięcia wyjściowego w stanie jałowym pomija się zazwyczaj wpływ strat mocy w rdzeniach, impedancji uzwojeń, oraz zakłada się, że odkształcony strumień pierwotny zawiera tylko pierwszą i trzecią harmoniczną. Przy powyższych założeniach upraszczających napięcie wyjściowe potrajacza można wyznaczyć jako przeniesioną na stronę wtórną różnicę potencjałów punktów neutralnych uzwojeń pierwotnych N' i źródła zasilania N (zwaną dalej u_N).



Rys.5.2. Schemat potrajacza do wyznaczania napięć.

Z układu połączeń przedstawionego na rys.5.2 dla wartości chwilowych napięć możemy napisać:

$$\begin{aligned} u_{1A} &= u_A - u_N \\ u_{1B} &= u_B - u_N \\ u_{1C} &= u_C - u_N \end{aligned} \quad (5.1)$$

Jeżeli założymy, że przekładnia zwojowa transformatorów potrajacza jest równa jedności, to przy przyjętych założeniach upraszczających chwilowe wartości napięć fazowych strony wtórnej możemy zapisać jako:

$$u_{2A} = u_N - u_A$$

$$u_{2B} = u_N - u_B \quad (5.2)$$

$$u_{2C} = u_N - u_C$$

Napięcie wyjściowe potrajacza jest sumą napięć fazowych uzwojeń wtórnych:

$$u_2 = 3 \cdot u_N - (u_A + u_B + u_C) \quad (5.3)$$

Sieć zasilająca potrajacz jest symetryczna i suma napięć fazowych u_A , u_B , u_C jest równa zero ($u_A + u_B + u_C = 0$), stąd:

$$u_2 = 3 \cdot u_N \quad (5.4)$$

Napięcie wyjściowe potrajacza u_2 możemy więc wyznaczyć przez obliczenie napięcia u_N , które jak wiadomo określone jest zależnością:

$$u_N = \frac{\frac{u_A}{X_{\mu A}} + \frac{u_B}{X_{\mu B}} + \frac{u_C}{X_{\mu C}}}{\frac{1}{X_{\mu A}} + \frac{1}{X_{\mu B}} + \frac{1}{X_{\mu C}}} \quad (5.5)$$

gdzie:

X_{μ} - reaktancje reprezentujące siły elektromotoryczne indukowane w poszczególnych uzwojeniach fazowych potrajacza.

Reaktancję X_{μ} możemy określić z zależności:

$$X_{\mu} = \omega_1 \cdot L_{\mu} = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot \frac{z_1^2 \cdot S_{Fe} \cdot \mu}{L_{sr}} \quad (5.6)$$

gdzie:

z_1 - liczba zwojów uzwojenia pierwotnego transformatora,
 L_{sr} - średnia długość rdzenia transformatorowego potrajacza,
 S_{Fe} - przekrój stali rdzenia,
 μ - przenikalność dynamiczna rdzenia.

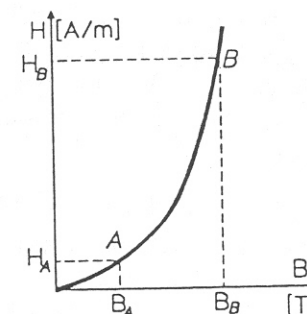
Przenikalność dynamiczną wyznaczamy z charakterystyki magnesowania, korzystając z równania aproksymującego:

$$H = C_1 \cdot \text{sh}(C_2 \cdot B) \quad (5.7)$$

gdzie:

C_1, C_2 - stałe, wyznaczone dla charakterystyki magnesowania.

Współczynniki C_1 i C_2 wyznaczamy w sposób następujący: na charakterystyce magnesowania wyznaczonej pomiarowo dla rdzenia jednofazowego transformatora wybieramy dwa punkty (rys.5.3). Punkt A leży przed zagięciem charakterystyki, zaś punkt B w obszarze znacznego nasycenia, w którym odbywa się praca potrajacza.



Rys.5.3. Wybór punktów A i B na krzywej magnesowania.

Podstawiając wartości współrzędnych punktów A i B (rys.5.3) do (5.7) otrzymamy równania:

$$H_A = C_1 \cdot \text{sh}(C_2 \cdot B_A) \quad (5.8)$$

$$H_B = C_1 \cdot \text{sh}(C_2 \cdot B_B)$$

Przedstawiając równania (5.8) w postaci wykładniczej i dzieląc je stronami przez siebie, po odpowiednich uproszczeniach (wyrażenia $\exp(-C_2 \cdot B_A)$ i $\exp(-C_2 \cdot B_B)$ pomijamy jako bardzo małe) otrzymamy:

$$C_1 = \frac{H_B}{\text{sh}(C_2 \cdot B_B)} \quad C_2 = \frac{\ln \frac{H_B}{H_A}}{B_B - B_A} \quad (5.9)$$

Obliczenia do tablicy 5.1:

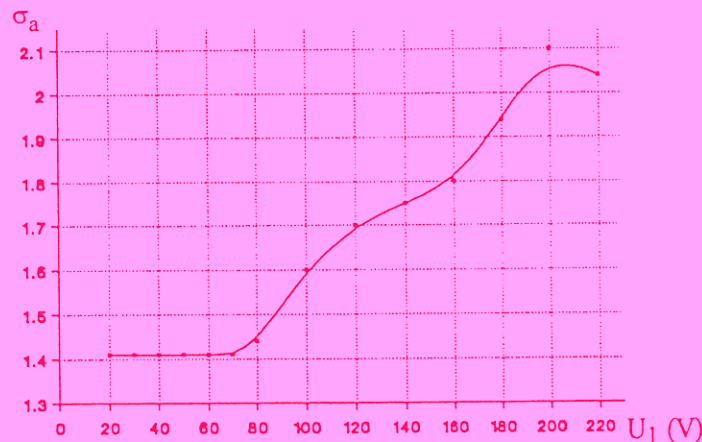
$$B_m = \frac{U_2}{4.44 \cdot S_{Fe} \cdot z_2 \cdot f} - \text{indukcja magnetyczna,}$$

$$H_m = \frac{\sigma_a \cdot I \cdot z_1}{l_{sr}} - \text{natężenie pola magnetycznego,}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{P_o}{U_1 \cdot I_o}\right) - \text{kąt fazowy obwodu,}$$

$I = I_o \cdot \sin\varphi$ - skuteczna wartość prądu magnesującego,

σ_a - współczynnik amplitudy prądu magnesującego (jego wartość odczytujemy z wykresu $\sigma_a = f(U_1)$). Współczynnik ten może znacznie różnić się od wartości dla przebiegów sinusoidalnych ($\sqrt{2}$) i może mieć różne wartości przy różnych nasyceniach rdzenia.



Wykres współczynnika amplitudy prądu pierwotnego w funkcji napięcia zasilającego dla transformatora składowego magnetycznego potrajacza częstotliwości.

Na podstawie wyników pomiarów oraz obliczeń indukcji B_m i natężenia pola magnetycznego H_m wykreślamy charakterystykę magnesowania rdzenia $B_m = f(H_m)$.

5.2.2. Aproksymacja charakterystyki magnesowania

Tablica 5.2

$H_A = \dots\dots\dots A/m$ (ok.180A/m)	$C_1 = \dots\dots\dots A/m$
$H_B = \dots\dots\dots A/m$ (ok.2500A/m)	$C_2 = \dots\dots\dots 1/T$
$B_A = \dots\dots\dots T$	

$B_B = \dots\dots\dots T$								
$H = \dots\dots\dots$								
B (T)								
H(A/m)								

Na wyznaczonej poprzednio charakterystyce magnesowania wybieramy dwa punkty A i B zgodnie z rys.5.3 dla wyznaczenia stałych C_1 i C_2 równania aproksymującego (5.7). Wyniki obliczeń współczynników równania aproksymującego oraz krzywej magnesowania zapisujemy w tablicy 5.2. Obliczoną (zastępczą) krzywą magnesowania umieszczamy na wspólnym wykresie z doświadczalną krzywą magnesowania, dlatego też, wartości indukcji magnetycznej B przyjmujemy takie same jak B_m w tablicy 5.1.

5.2.3. Analityczne wyznaczenie napięcia potrójonej częstotliwości

Dla wartości indukcji pierwszej harmonicznej $B_{(1h)}$ w zakresie (1.0 - 2.0)T wyznaczamy z zależności (5.11) napięcie pomiędzy punktami neutralnymi sieci i uzwojeń pierwotnych potrajacza U_N oraz napięcie U_2 (zależność (5.12)). Wykreślamy charakterystykę $U_2 = f(U_{1p})$. W celu ułatwienia sobie obliczeń, dobrze jest przyjąć wartości B_1 oraz U_{1p} takie same jak B_m oraz U_1 w tablicy 5.1.

Tablica 5.3.

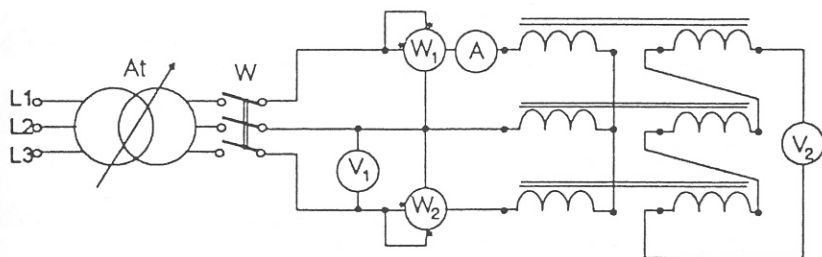
Lp.	B_1	$U_{1p} = U_1$	U_N	ϑ	U_2
	T	V	V	---	V
1					
2					
...					
6					

5.2.4. Demonstracja

W układzie pomiarowym wg. rys.5.5 w miejsce woltomierzy włączamy sondy oscyloskopu dwukanałowego. Po dostrojeniu oscyloskopu obserwujemy przebiegi napięć zasilającego i wyjściowego potrajacza, porównując ich częstotliwości. Przerysowujemy przebiegi i notujemy wnioski. Ta część ćwiczenia może być wykonywana na jednym ze stanowisk, podanym przez prowadzącego ćwiczenie.

5.2.5. Próba stanu jałowego potrajacza

W układzie pomiarowym wg. rys.5.5 wyznaczamy charakterystykę stanu jałowego potrajacza częstotliwości. Wyniki pomiarów zapisujemy w tablicy 5.4.



Rys.5.5. Układ pomiarowy próby stanu jałowego magnetycznego potrajacza częstotliwości.

Tablica 5.4

Lp.	U_1 V	U_{1f} V	P_1 W	P_2 W	P W	I_1 A	U_2 V
1							
2							
...							
8							

gdzie:

$$U_{1f} = \frac{U_1}{\sqrt{3}}$$

Na podstawie wyników pomiarów i obliczeń wykreślamy charakterystykę $U_2 = f(U_{1f})$ - na wspólnym wykresie z charakterystyką $U_2 = f(U_{1f})$ wyznaczoną analitycznie w punkcie 5.2.3. Wykreślamy też (na oddzielnym wykresie) charakterystyki $I_1 = f(U_{1f})$ oraz $P = f(U_{1f})$.

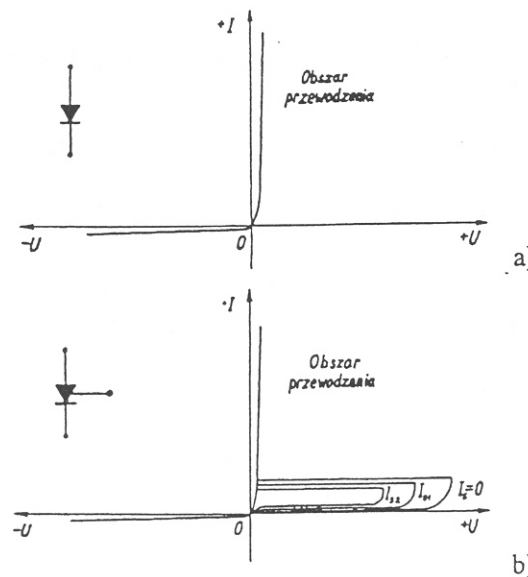
Ćwiczenie 6

OBWODY NIELINIOWE ZAWIERAJĄCE PROSTOWNIKI

6.1 WIADOMOŚCI OGÓLNE

6.1.1. Wstęp

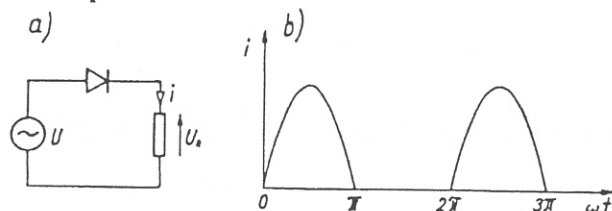
Prostownik należy do grupy nieliniowych elementów niesymetrycznych. Na rys. 6.1 pokazano charakterystyki prądowo-napięciowe dwóch zasadniczych



Rys.6.1. Charakterystyki prądowo-napięciowe dwóch typów elementów nieliniowych.

elementów prostownikowych: diody półprzewodnikowej a), tyrystora b). Przy rozpatrywaniu zjawisk zachodzących w obwodach zawierających elementy prostownikowe stosuje się często uproszczenia polegające na tym, że rezystancję w stanie przewodzenia przyjmuje się równą zero, a rezystancję w stanie zaporowym równą nieskończoności.

6.1.2. Prostowanie półfalowe



Rys. 6.2. Prostowanie półfalowe

Do obwodu pokazanego na rys. 6.2 włączymy przemienne napięcie postaci:

$$u = \hat{U} \sin \omega t$$

Prąd w obwodzie będzie odkształconą funkcją okresową, którą w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ możemy napisać:

$$i = \begin{cases} \hat{I} \sin \omega t & \text{dla } \omega t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 0 & \text{dla } \omega t \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases} \quad (6.1)$$

gdzie: $\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$

Wartość średnia przy prostowaniu półfalowym wynosi:

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{I} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{\hat{I}}{\pi} \quad (6.2)$$

Natomiast wartość skuteczna:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2 \omega t d(\omega t)} = \frac{\hat{I}}{2} \quad (6.3)$$

Moc czynna pobierana ze źródła i moc pozorna odpowiednio wynoszą:

$$P = RI^2 = \frac{R}{4} \hat{I}^2 \quad (6.4)$$

$$S = UI = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} I = \frac{R \hat{I}}{\sqrt{2}} \frac{\hat{I}}{2} = \frac{R}{2\sqrt{2}} \hat{I}^2 \quad (6.5)$$

Stosunek mocy czynnej do mocy pozornej nazywamy jak przy przebiegach sinusoidalnych, współczynnikiem mocy, który wyraża się wzorem:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \quad (6.6)$$

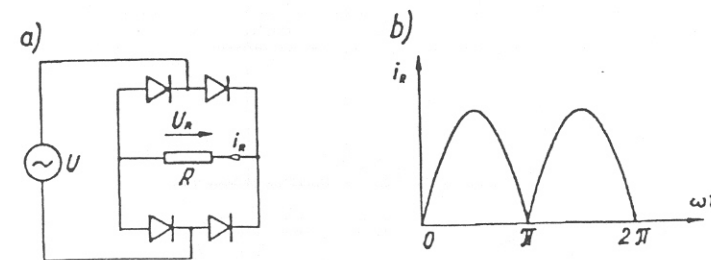
Moc użyteczną pobieraną przez odbiornik obliczamy ze wzoru:

$$P_u = RI^2 = \frac{R}{\pi^2} \hat{I}^2 \quad (6.7)$$

Sprawność danego układu prostowania wynosi:

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{4}{\pi^2} = 0,406 \quad (6.8)$$

6.1.3. Prostowanie całofalowe.



Rys. 6.3 Prostowanie całofalowe

Na rys. 6.3 pokazano układ do całofalowego prostowania prądu. Jest to tzw. układ Graetza. Wartość średnia prądu przy prostowaniu całofalowym wynosi:

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \hat{I} = 0,637 \hat{I} \quad (6.9)$$

Wartość skuteczna prądu:

$$I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = 0,707 \hat{I} \quad (6.10)$$

Moc czynna pobierana ze źródła:

$$P = RI^2 = \frac{R}{2} \hat{I}^2 \quad (6.11)$$

Moc użyteczna pobierana przez odbiornik:

$$P_u = R\bar{I}^2 = \frac{4}{\pi^2} R\hat{I}^2 \quad (6.12)$$

Sprawność układu prostowania wynosi:

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{8}{\pi^2} = 0,812 \quad (6.13)$$

6.1.4. Filtry wygładzające

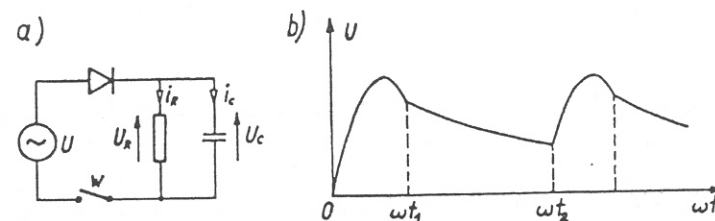
Do wygładzania przebiegu prądu wyprostowanego stosuje się filtry dolnoprzepustowe. Rozpatrzmy układ prostowania z takim filtrem. Niech będzie to filtr pojemnościowy (rys. 6.4). Napięcie źródła określone jest wzorem:

$$u = \hat{U} \sin \omega t \quad (6.14)$$

Wyznamy chwile czasowe t_1 oraz t_2 . W okresie przewodzenia diody $\omega t < \omega t_1$.

$$i_R = \frac{U_R}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \sin \omega t \quad (6.15)$$

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt} = \omega C \hat{U} \cos \omega t$$



Rys. 6.4. Prostowanie półfalowe z wygładzaniem

Prąd diody $i = i_R + i_C$ w chwili $t = t_1$ jest równy zero. Wobec tego mamy

$$0 = \hat{U} \left(\frac{1}{R} \sin \omega t + \omega C \cos \omega t \right) \quad (6.16)$$

z tego otrzymujemy:

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arctg(-\omega RC) \quad (6.17)$$

Od chwili t_1 trwa proces rozładowania kondensatora o napięciu początkowym

$$U_C(t_1) = \hat{U} \sin \omega t \quad (6.18)$$

poprzez rezystancję R , przy czym prąd rozładowania jest wykładniczą funkcją czasu:

$$i_R = i_C = \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t_1) e^{-\left(\frac{t-t_1}{RC}\right)} \quad (6.19)$$

Temu prądowi odpowiada napięcie na rezystancji

$$U_R = U_C = \hat{U} \omega t_1 \sin(\omega t_1) e^{-\left(\frac{t-t_1}{RC}\right)} \quad (6.20)$$

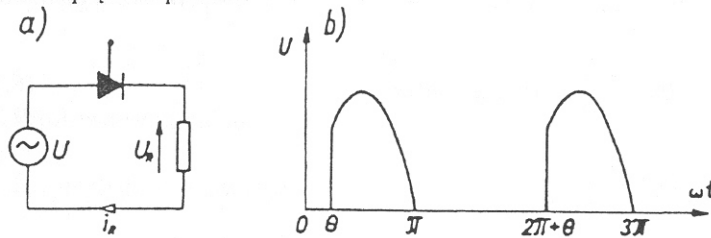
Proces rozładowania będzie trwał do chwili t_2 , w której napięcie na kondensatorze zrówna się z napięciem źródła w kierunku przewodzenia diody. Chwili t_2 odpowiada punkt, w którym napięcie na kondensatorze zrównuje się z napięciem zasilającym, czyli

$$\sin \omega t_2 = \sin(\omega t_1) e^{-\left(\frac{t_2 - t_1}{RC}\right)} \quad (6.21)$$

Rozwiązanie równania otrzymuje się graficznie bądź numerycznie przy użyciu maszyny cyfrowej.

6.1.5. Układ prostowniczy jednofazowy z prostownikiem sterowanym przy obciążeniu rezystancyjnym

Schemat takiego układu przedstawia rys. 6.5. Do obwodu włączymy przemienne napięcie o postaci:



Rys. 6.5. Prostowanie jednopółkowe z prostownikiem sterowanym

$$u = \hat{U} \sin \omega t$$

Przy pominięciu rezystancji tyrystora w stanie przewodzenia można określić prąd w obwodzie. Opisuje go odkształcona funkcja okresowa, którą w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ możemy napisać:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{dla } \omega t \in \langle 0, \Theta_Z \rangle \\ \hat{I} \sin \omega t & \text{dla } \omega t \in \langle \Theta_Z, \pi \rangle \\ 0 & \text{dla } \omega t \in \langle \pi, 2\pi \rangle \end{cases} \quad (6.22)$$

gdzie: Θ_Z - kąt zapłonu tyrystora,

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$$

Wartość średnia przebiegu za okres wynosi:

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta_Z}^{\pi} \hat{I} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{\hat{I}}{2\pi} (1 + \cos \Theta_Z) \quad (6.23)$$

Natomiast wartość skuteczna:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\Theta_Z}^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2 \omega t d(\omega t)} = \frac{\hat{I}}{2} \sqrt{1 - \frac{\Theta_Z}{\pi} + \frac{\sin 2\Theta_Z}{2\pi}} \quad (6.24)$$

Moc czynna pobierana ze źródła, moc pozorna i moc użyteczna użyteczna odpowiednio wynoszą:

$$P = RI = R \frac{\hat{I}^2}{4} \left(1 - \frac{\Theta_Z}{\pi} + \frac{\sin 2\Theta_Z}{2\pi} \right),$$

$$S = UI = \frac{\hat{U} \hat{I}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\Theta_Z}{\pi} + \frac{\sin 2\Theta_Z}{2\pi}}, \quad (6.25)$$

$$P_u = R \bar{I}^2 = \frac{R \hat{I}^2}{4\pi^2} (1 + \cos \Theta_Z)^2,$$

Współczynnik mocy wyraża się:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \frac{\Theta_Z}{\pi} + \frac{\sin 2\Theta_Z}{2\pi}} \quad (6.26)$$

Analogicznie sprawność danego układu prostowania wynosi:

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{(1 + \cos \Theta_Z)^2}{\pi \left(\pi - \Theta_Z + \frac{\sin 2\Theta_Z}{2} \right)} \quad (6.27)$$

6.1.6. Analiza harmoniczna okresowych prądów odkształconych

Prąd pobierany przez odbiornik i napięcie istniejące na zaciskach odbiornika, zasilanego w obwodzie z prostownikiem, są okresowymi funkcjami odkształconymi. Okresowe funkcje spełniające warunki Dirichleta rozwijamy w szereg Fouriera o postaci

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (6.28)$$

gdzie współczynniki a_k i b_k wyznaczamy ze wzorów:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.29)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Jeżeli funkcja $i(\omega t)$ jest przedstawiona tylko graficznie (funkcja nieanalityczna) to współczynniki a_k i b_k możemy wyznaczyć metodą liczbową Perry'ego. W tej metodzie pole pod krzywą na długości jednego pełnego jej okresu 2π dzielimy na ζ pionowych pasków o jednakowej szerokości $\frac{2\pi}{\zeta}$. Robimy to w celu zastąpienia całkowania sumowaniem. Nieskończenie mały przyrost $d(\omega t)$ zastępujemy małym przyrostem skończonym $\frac{2\pi}{\zeta}$. Każde zmiennej niezależnej $\omega t = n \frac{2\pi}{\zeta}$ odpowiada na wykresie wartość funkcji $i(\omega t)$ w postaci rzędnej y_n . Wzory (6.29) przyjmują teraz postać:

$$a_k \approx \frac{2}{\zeta} \sum_{n=1}^{n=\zeta} y_n \cos \left(kn \frac{2\pi}{\zeta} \right) \quad (6.30)$$

$$b_k \approx \frac{2}{\zeta} \sum_{n=1}^{n=\zeta} y_n \sin \left(kn \frac{2\pi}{\zeta} \right)$$

6.1.7. Moc układu prostownika

Moc pozorną obciążającą źródło obliczamy ze wzoru:

$$S = UI \quad (6.31)$$

Prostownik jest przyczyną występowania mocy biernej zniekształcenia, którą wyznaczamy ze wzoru:

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} \quad (6.32)$$

Dla układów bez wygładzania obciążonych odbiornikiem rezystancyjnym wzór (6.32) przyjmuje postać:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2} \quad (6.33)$$

Poszczególne współczynniki obliczamy ze wzorów:

$$k = \frac{I}{\hat{I}} - \text{współczynnik kształtu,}$$

$$s = \frac{\hat{I}}{I} - \text{współczynnik szczytu,}$$

$$z = \frac{I_1}{I} - \text{współczynnik zniekształcenia.}$$

6.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

6.2.1. Badanie układów z prostownikami niesterowanymi

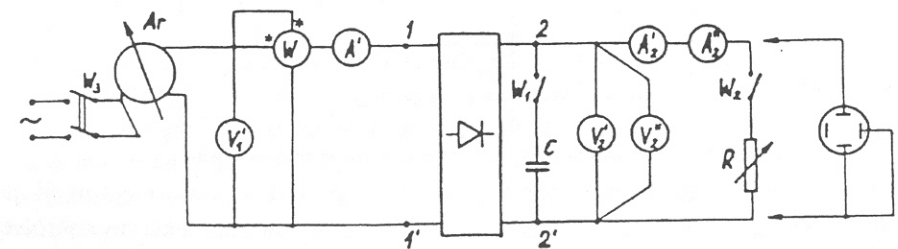
- Badanie układu prostowania półfalowego bez wygładzania i z wygładzaniem.
- Badanie układu prostowania całofalowego bez wygładzania i z wygładzaniem.

Dla przeprowadzenia pomiarów zestawiamy układ jak na rysunku 6.6.

Oznaczenia:

W_1 - wyłącznik filtru wygładzania,

W_2 - wyłącznik obciążenia.



Rys. 6.6. Układ pomiarowy

We wszystkich, wymienionych w p. a) i b), układach przeprowadzamy pomiary dla stanu jałowego (W_2 otwarty) i stanu obciążenia (W_2 zamknięty). Mierniki oznaczone na schemacie jako: V_1' , A_1' , V_2' , A_2' są miernikami elektromagnetycznymi a oznaczone jako V_2'' , A_2'' są miernikami magnetoelektrycznymi. Wyniki pomiarów i obliczeń notujemy w tabelicy 6.1.

Tabela 6.1

Układ	U_1'	I_1'	P	U_2'	U_2''	I_2'	I_2''	R	P_U
	V	A	W	V	V	A	A	Ω	W

Dla obu układów z wygładzaniem i bez wygładzania dla wybranego poziomu napięcia zasilającego i wybranej wartości rezystancji odbiornika, zaobserwować i narysować przebiegi napięcia na wyjściu. Na podstawie sporządzonych rysunków, stosując metodę Perry'ego, wyznaczyć współczynniki szeregu Fouriera do siódmej charmonicznej włącznie. Wartości współczynników notujemy w tabelicach wg podanej tabelicy 6.2.

Tabela 6.2

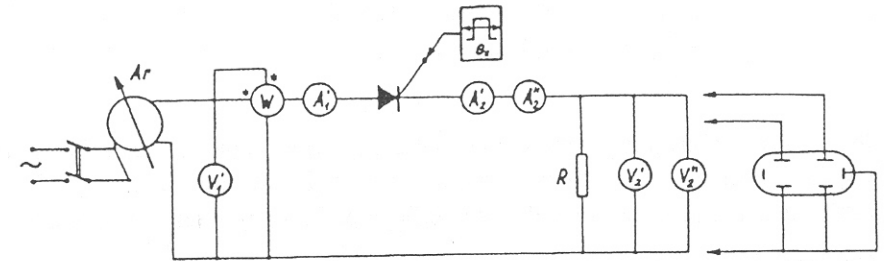
a_k	b_k	$\bar{\theta}_k$	
			$U = \dots\dots\dots$
			$\bar{\theta} = \dots\dots\dots$
			$\bar{U} = \dots\dots\dots$
			$k = \dots\dots\dots$
			$s = \dots\dots\dots$
			$z = \dots\dots\dots$

Dla tego samego napięcia zasilającego i tej samej rezystancji jak poprzednio, przeprowadzić analizę charmoniczną przy użyciu maszyny cyfrowej. W tym celu należy we wskazane miejsca na ekranie monitora wpisać odpowiednie wartości: napięcia zasilającego U , rezystancji R i pojemności C i odczytać wyniki

pomiarów. W tej metodzie wykorzystywane są wzory (6.29) a całkowanie odbywa się numerycznie. Zakłada się, że napięcie zasilające ma kształt sinusoidalny.

6.2.2. Badanie układów z prostownikami sterowanymi

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rys.6.7.



Rys. 6.7. Układ pomiarowy prostownika sterowanego jednofazowego pracującego na obciążeniu rezystancyjne.

W układzie przedstawionym na rys. 6.7 zbadać zależność prądu i napięcia odbiornika od wartości kąta zapłonu θ_z . Wyniki zamieścić w tabelicy 6.3. Pomiary kąta θ_z dokonać na oscyloskopie.

Tabela 6.3

Układ	U_1'	I_1'	P	U_2'	U_2''	I_2'	I_2''	θ	R	P_U
	V	A	W	V	V	A	A	rad	Ω	W

Analogicznie jak w poprzednim paragrafie wykonać analizę charmoniczną napięcia na odbiorniku. Pomiary i obliczenia wykonać dla kąta zapłonu $\theta_z = \pi/6$. Wartości współczynników notujemy w tabelicy sporządzonej wg tabelicy 6.2.

Ćwiczenie 7

ANALIZATORY HARMONICZNYCH

7.1 WIADOMOŚCI OGÓLNE

7.1.1. Wstęp

We współczesnej technice obserwuje się znaczny wzrost liczby i mocy odbiorników nieliniowych i przekształtników energii elektrycznej, który powoduje znaczne odkształcenia przebiegów sinusoidalnych wielkości elektrycznych i magnetycznych. Znajomość udziału wyższych harmonicznych w przebiegach odkształconych jest konieczna do analizy pracy tych urządzeń jak też ich współpracy z siecią energetyczną. Obecnie stosowane metody analizowania przebiegów odkształconych można podzielić na:

- metody analityczne
- metody pomiarowe.

Metody analityczne polegają na rozłożeniu odkształconej funkcji okresowej $f(t)$ spełniającej warunki Dirichleta w szereg Fouriera. Przebiegi okresowe prądów czy napięć otrzymujemy przeważnie w postaci krzywych zdjętych oscylograficznie albo wykreślonych na podstawie pętli histerezy. Krzywych tych nie można przedstawić w postaci analitycznej nadającej się do całkowania. W tych przypadkach, przy wyznaczaniu współczynników szeregu Fouriera stosowane są metody przybliżone, rachunkowe lub graficzne.

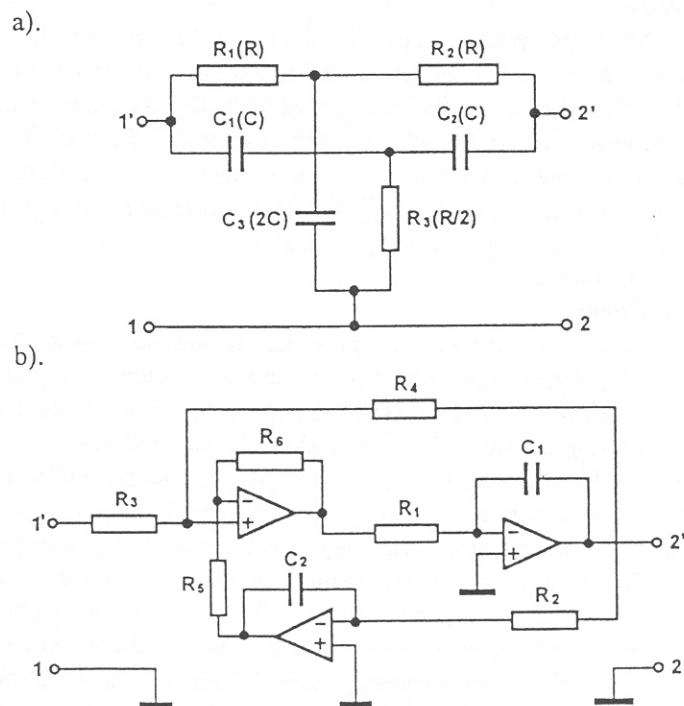
Do pomiaru zawartości harmonicznych w przebiegu odkształconym stosuje się analizatory harmonicznych. W ogólnym przypadku analizator harmonicznych jest wzmacniaczem selektywnym, którego praca polega na wydzielaniu dowolnie wybranego użytecznego sygnału z mieszaniny sygnałów i określeniu jego amplitudy. Powyższe warunki pracy określają wymagania stawiane tym urządzeniom odnośnie selektywności, stałości wzmocnienia wydzielonych harmonicznych, czułości oraz możliwości łatwego strojenia układu na żadaną harmoniczną.

Biorąc pod uwagę zasadę działania analizatorów, można je podzielić na analogowe i cyfrowe. W analizatorach analogowych powszechnie stosowane są filtry częstotliwościowe RC a nie LC. Decydują tu głównie ich małe gabaryty jak również łatwość przestrajania częstotliwości. W cyfrowych analizatorach sygnał analogowy przetwarzany jest na cyfrowy, a następnie podawany jest na wejście cyfrowego filtru, gdzie następuje jego analiza. W porównaniu z filtrami konwencjonalnymi, filtr cyfrowy posiada wiele zalet m.in. dokładnie zdefiniowane pasmo przenoszenia oraz nieczułość na starzenie elementów.

W ćwiczeniu do wyznaczania zawartości harmoniczných w przebiegach odkształconych będą używane dwa analizatory harmoniczných z filtrami RC.

7.1.2. Analizatory harmoniczných niskich częstotliwości z filtrami RC

Podstawowym elementem analizatora jest filtr częstotliwościowy. W pierwszym analizatorze jest zastosowany mostek RC typu TT (Rys. 7.1a), w drugim filtr rezonansowy ze wzmacniaczami operacyjnymi (rys. 7.1b).



Rys.7.1. Filtry zastosowane w analizatorach harmoniczných niskich częstotliwości: a) filtr rezonansowy RC typu TT, b) filtr rezonansowy ze wzmacniaczami operacyjnymi.

Dla filtru z rysunku 7.1a związki między wartościami elementów przy spełnieniu warunku równowagi mostka są następujące:

$$R_1 = R, R_2 = hR, R_3 = \frac{h}{1+h} \cdot R \quad (7.1)$$

$$C_1 = C, C_2 = \frac{C}{h}, C_3 = \frac{1+h}{h} \cdot C \quad (7.2)$$

gdzie: h - dowolna liczba dodatnia charakteryzująca asymetrię mostka.

Pulsacja rezonansowa filtru z rys.7.1.a wynosi:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (7.3)$$

a dobroć zastępcza filtru:

$$Q_{TT} = \frac{h}{2(1+h)} \quad (7.4)$$

W omawianym analizatorze zastosowano symetryczny układ mostka, dla którego $h=1$, wówczas R i C przybierają wartości podane w nawiasach na rys.7.1a, a dobroć zastępcza układu $Q_2 = 0,25$.

Przestrajanie mostka na różne harmoniczne wymaga jednoczesnej zmiany w jednakowych proporcjach rezystancji R_1, R_2 i R_3 . Ponieważ technicznie jest to trudne do spełnienia, więc w omawianym analizatorze, którego schemat blokowy przedstawiono na rys.7.2, zastosowano dla wytypowanych harmoniczných indywidualne mostki nastrojone na częstotliwości 50, 100, 150, 250, 350, 450 Hz odpowiadające tym harmoniczným.

Dla filtru aktywnego przedstawionego na rys.7.1.b obowiązują następujące zależności:

transmitancja

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}}(s) = \frac{-s \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1+R_6/R_5}{1+R_4/R_3}}{s^2 + s \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1+R_6/R_5}{1+R_4/R_3} + \frac{R_6}{R_5} \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (7.5)$$

wzmocnienie rezonansowe

$$H_0 = \frac{R_4}{R_3} \quad (7.6)$$

pulsacja rezonansowa

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_6}{R_5 R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (7.7)$$

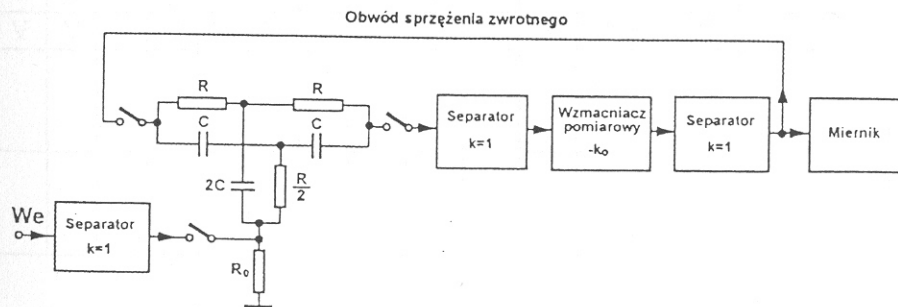
dobroć zastępcza

$$Q_z = \frac{1 + \frac{R_4}{R_3} \sqrt{\frac{R_6 R_2 C_1}{R_5 R_2 C_2}}}{1 + \frac{R_6}{R_5}} \quad (7.8)$$

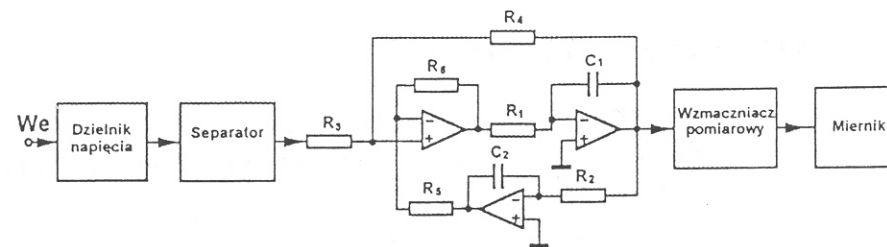
Strojenie tego filtra przeprowadza się podobnie jak w mostku RC, przez jednoczesną zmianę rezystancji R_1 i R_2 . Jak wynika z zależności (7.5÷7.8) parametry tego filtra zależą od stosunków wartości elementów składowych R i C i dzięki temu ich wartości mogą być mniejsze. Ponadto z zależności (7.8) wynika, że dobroć zastępcza filtra może być niezależnie dobierana za pomocą R_4 . W tym analizatorze harmonicznych, którego schemat blokowy przedstawiono na rys.7.3, przestrajanie filtra aktywnego na częstotliwości (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450) Hz odpowiadające poszczególnym harmonicznym zrealizowano przez dobór dla każdej z nich rezystancji R_1 i R_2 .

7.1.3. Schematy blokowe

Schematy blokowe używanych w ćwiczeniu analizatorów harmonicznych z filtrami aktywnymi przedstawiono na rys.7.2 i 7.3

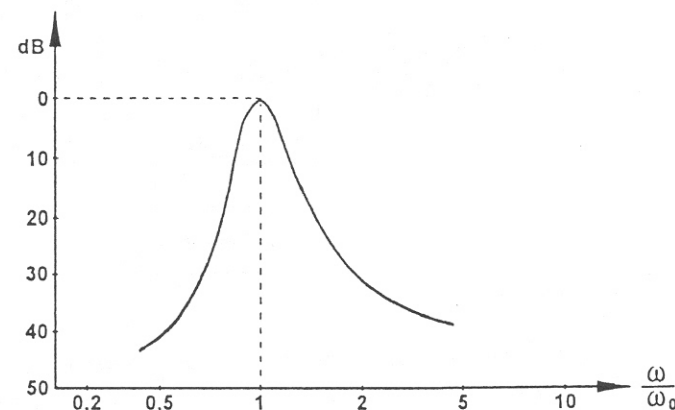


Rys.7.2. Schemat blokowy analizatora I z filtrami aktywnymi RC typu TT.



Rys.7.3. Schemat blokowy analizatora II z filtrami aktywnymi ze wzmacniaczami operacyjnymi.

Dokładność pomiaru analizatora charakteryzuje wyznaczona doświadczalnie krzywa selektywności przedstawiona na rys.7.4.



Rys.7.4. Krzywa selektywności analizatora.

Wybrane parametry techniczne obu analizatorów zamieszczono w Tabelcy 7.1.

Tablica 7.1

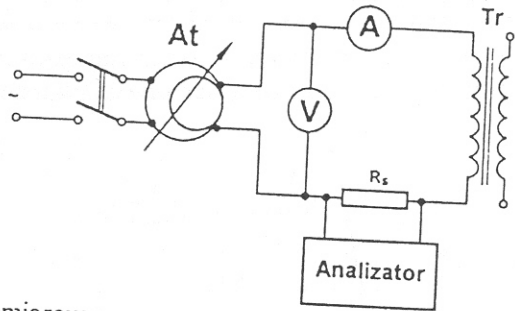
	Analizator I	Analizator II
Napięcie zasilania	220 V	220 V
Napięcie wejściowe	(7-400)V f=50Hz	(0,001-1000)V f=50Hz
Częstotliwość podstawowa mierzonego sygnału	50 Hz	50 Hz
Rezystancja wejściowa	7kΩ-0,5MΩ	1 MΩ
Pobór mocy	~ 5 VA	~ 3 VA

7.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

Zasada pomiaru dla obu analizatorów jest taka sama i polega na włączeniu odpowiedniego filtra i procentowym określeniu zawartości badanej harmonicznej w stosunku do harmonicznej podstawowej.

7.2.1. Pomiar udziału harmonicznch w prądzie magnesującym transformatora

Pomiar wykonać dla transformatora jednofazowego w stanie jałowym w układzie przedstawionym na rysunku 7.5.



Rys.7.5. Układ pomiarowy.

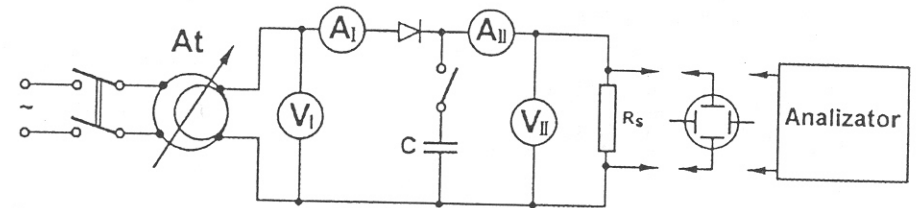
Przed rozpoczęciem pomiaru zaobserwować na oscyloskopie kształt prądu pierwotnego. Pomiar wykonać dla kilku różnych wartości napięcia zasilającego. W chwili rozpoczęcia pomiaru pokrętki wzmacniacza oraz strojenia filtrów (te ostatnie znajdują się tylko w analizatorze AHS-2) nastawić na minimum. Wyniki pomiarów zamieścić w tablicy 7.2.

Tablica 7.2

Lp	POMIARY									OBLICZENIA				
	U	I	$\frac{I_2}{I_1}$	$\frac{I_3}{I_1}$	$\frac{I_4}{I_1}$	$\frac{I_5}{I_1}$	$\frac{I_6}{I_1}$	$\frac{I_7}{I_1}$	$\frac{I_9}{I_1}$	I_1	I_3	I_5	I_7	I_9
-	V	A	%	%	%	%	%	%	%	A	A	A	A	A

Na podstawie wykonanych pomiarów narysować zależność $\frac{I_3}{I_1} = f(U)$ oraz $\frac{I_5}{I_1} = f(U)$ oraz narysować widmo harmonicznch mierzonego przebiegu dla wybranej wartości napięcia zasilającego.

7.2.2. Pomiar udziału harmonicznch w napięciu na wyjściu układu do prostowania jednopółwkowego



Rys.7.6. Układ pomiarowy.

Pomiary wykonać dla jednej wartości napięcia zasilającego i dla jednego obciążenia bez i z wygładzaniem napięcia. Pomiar zawartości harmonicznch dokonujemy analizatorem AHS-2, który mierzy również składową stałą przebiegu odkształconego. W sprawozdaniu porównać zawartość harmonicznch w przebiegu przed wygładzaniem i po wygładzeniu napięcia. Przebiegi napięcia zaobserwować na oscyloskopie i umieścić w sprawozdaniu.

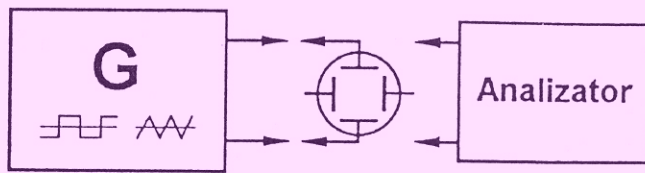
Wyniki pomiarów zamieścić w tablicy 7.3.

Tablica 7.3

Lp	POMIARY									OBLICZENIA						
	U_1	U_{II}	C	$\frac{U_0}{U_1}$	$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{U_3}{U_1}$	$\frac{U_4}{U_1}$	$\frac{U_5}{U_1}$	$\frac{U_6}{U_1}$	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
-	V	V	μF	%	%	%	%	%	%	V	V	V	V	V	V	V

Narysować w sprawozdaniu widmo harmonicznch mierzonych przebiegów.

7.2.3. Pomiar udziału harmonicznyc w przebiegu prostokątnym i trójkątnym



Rys.7.7. Układ pomiarowy.

Pomiary udziału harmonicznyc należy wykonać dla sygnału o przebiegu prostokątnym i trójkątnym przy częstotliwości 50 Hz. Wyniki pomiarów należy porównać z wynikami otrzymanymi teoretycznie z rozkładu na szereg Fouriera sygnału o przebiegu prostokątnym i trójkątnym.

Tablica 7.4

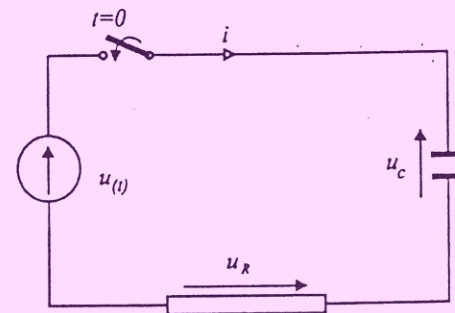
Lp	POMIARY					OBLICZENIA					-	
	$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{U_3}{U_1}$	$\frac{U_5}{U_1}$	$\frac{U_7}{U_1}$	$\frac{U_9}{U_1}$	$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{U_3}{U_1}$	$\frac{U_5}{U_1}$	$\frac{U_7}{U_1}$	$\frac{U_9}{U_1}$		
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%		

Ćwiczenie 8

STANY NIEUSTALONE W OBWODACH Z ELEMENTAMI RC

8.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

Rozpatrzmy obwód jednooczkowy zawierający gałąź szeregową RC, gdzie R i C są elementami liniowymi o parametrach skupionych. Schemat obwodu przedstawiono na rysunku 8.1.



Rys.8.1. Schemat obwodu z gałęzią szeregową RC.

Równanie równowagi napięciowej dla wartości chwilowych ma postać:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t) \quad (8.1)$$

Dla obwodów liniowych napięcie u_C można przedstawić jako superpozycję dwóch składowych

$$u_C = u_{CW} + u_{CS} \quad (8.2)$$

gdzie:

u_{cw} - składowa wymuszona (ustalona) napięcia,
 u_{cs} - składowa swobodna (przejściowa) napięcia

Rozwiązanie równania (8.1) ma postać:

$$u_c = u_{cw} + A \cdot \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) \quad (8.3)$$

gdzie:

$u_{cs} = A \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ - składowa swobodna

t_0 - chwila dokonania komutacji,

$\tau = RC$ - stała czasu gałęzi szeregowej RC,

A - stała całkowania, którą wyznaczamy z warunków początkowych po uwzględnieniu warunki komutacji

Najczęściej przyjmuje się $t_0=0$, stąd

$$u_c = u_{cw} + A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (8.4)$$

Warunki komutacji wynikają z następujących przesłanek fizycznych:
 moc chwilową źródła energii bądź odbiornika określamy wzorem

$$p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} \quad (8.5)$$

Moc układów rzeczywistych ma wartość oznaczoną. Energia pola elektrycznego kondensatora nie może więc zmieniać się skokowo, tylko w sposób ciągły.

$$w_{c(0^-)} = w_{c(0)} = w_{c(0^+)} \quad (8.6)$$

gdzie:

$w_{c(0^-)}$ - wartość energii tuż przed komutacją,

$w_{c(0)}$ - wartość energii w chwili komutacji,

$w_{c(0^+)}$ - wartość energii tuż po komutacji.

Energia pola kondensatora jest funkcją jego pojemności C i napięcia między okładzinami u_c .

$$w_c = \frac{1}{2} C u_c^2 \quad (8.7)$$

Ładunek elektryczny q , zgromadzony na okładzinach kondensatora, wyznaczamy z wzoru

$$q = C u_c \quad (8.8)$$

Po wyznaczeniu napięcia z (8.8) i podstawieniu do (8.7) otrzymuje się wzór na energię

$$w_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (8.9)$$

Z wzorów (8.6, 8.7 i 8.9) otrzymujemy warunki komutacji dla napięcia u_c i ładunku elektrycznego q .

$$u_{c(0^-)} = u_{c(0)} = u_{c(0^+)} \quad (8.10)$$

$$q_{(0^-)} = q_{(0)} = q_{(0^+)}$$

Stała całkowania A występująca we wzorze (8.4) wyznaczona z warunków początkowych, po uwzględnieniu warunków komutacji, ma wartość

$$A = u_{c(0^+)} - u_{cw(0^+)} \quad (8.11)$$

8.1.1. Ładowanie kondensatora

Obwód jak na rys. 8.1, przy czym elementem aktywnym jest źródło napięcia stałego ($u_{(t)} = u$). Przyjmujemy warunki początkowe zerowe ($u_{c(0^+)} = 0$). Przebiegi napięcia na zaciskach kondensatora, na zaciskach rezystora i prądu w obwodzie mają następującą postać:

$$u_c = u \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

$$u_R = u \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (8.12)$$

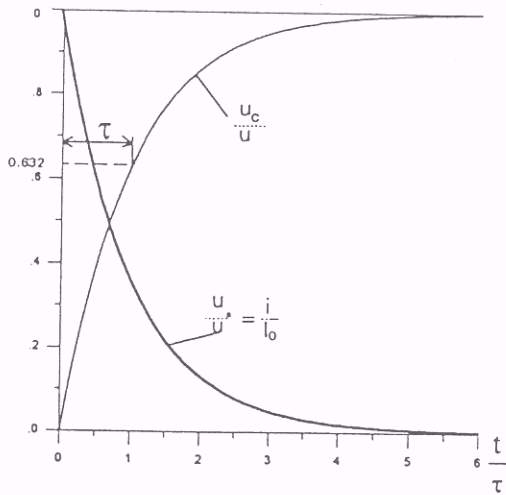
$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{u}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Wartość początkowa prądu $i_{(0^+)} = I_0 = \frac{u}{R}$.

Wzory (8.12) przekształcamy do postaci:

$$\frac{u_C}{u} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \frac{u_R}{u} = \frac{i}{I_0} = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (8.13)$$

Przebiegi opisane wzorem (8.13) przedstawiono na rys.8.2.



Przebiegi czasowe napięć i prądu przy ładowaniu kondensatora w

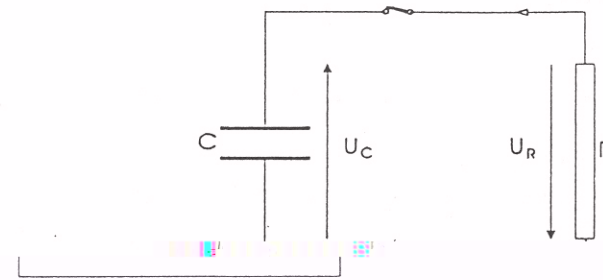
Przez czas $t = \tau$ napięcie na zaciskach kondensatora osiąga wartość, wyrażoną w odsetkach względem napięcia pełnego naładowania, równą:

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) 100\% = \left(1 - \frac{1}{2.718}\right) 100\% = 63,2\%$$

W ten sposób można wyznaczyć stałą czasu τ z wykresu, co przedstawiono na rys. 8.2.

Wolne rozładowanie kondensatora

Jeśli kondensator naładowany do napięcia u rozładowujemy przez włączenie rezystancji R - rys. 8.3.



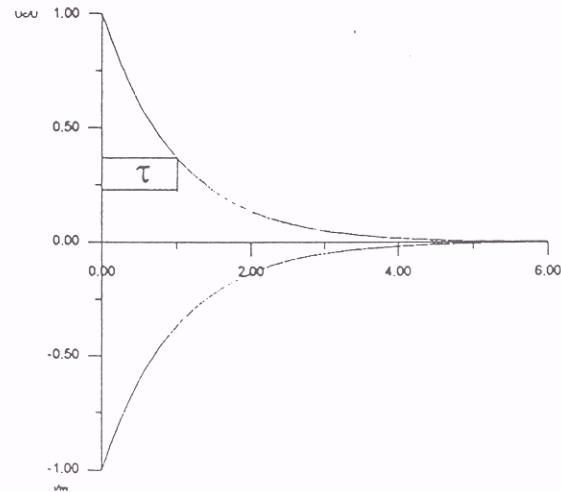
Rys.8.3. Schemat rozładowania kondensatora.

Wzory opisujące przebiegi napięcia i prądu mają postać:

$$u_C = u \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (8.14)$$

$$i = -\frac{u}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Przebieg napięcia i prądu przedstawiono na rys. 8.4.



Rys. 8.4. Przebiegi napięcia i prądu przy rozładowaniu kondensatora.

Po czasie $t = \tau$, napięcie na zaciskach kondensatora ma wartość, wyrażoną w odsetkach względem napięcia przed wyladowaniem, równą:

Rys. 8.2. Przebiegi napięć i prądu w obwodzie RC.

Po czasie $t = \tau$ napięcie na zaciskach kondensatora osiąga wartość, wyrażoną w odsetkach względem napięcia pełnego naładowania, równą:

$$\frac{u_C}{u}$$

Pozwala to wyznaczyć stałą czasu τ z wykresu, co przedstawiono na rys. 8.2.

8.1.2. Rozładowanie kondensatora

Jeśli kondensator naładowany do napięcia u rozładowujemy przez włączenie rezystancji R - rys. 8.3.

Napięcie na zaciskach kondensatora i prąd w rezystancji R zmieniają się w czasie zgodnie z

Przebiegi napięcia i prądu przedstawiono na rys. 8.4.

$$\frac{u_{c(t=\tau)}}{u} 100\% = \frac{1}{e} 100\% = 36,8\%$$

Wykresne wyznaczenie stałej czasu τ przedstawiono na rys. 8.4.

8.1.3. Energia pola elektrycznego

W czasie ładowania kondensatora obwód RC pobiera ze źródła napięcia energię wyrażoną wzorem:

$$W = W_R + W_{c(t \rightarrow \infty)} - W_{c(0^+)}$$

gdzie:

W_R - energia wydzielona w postaci ciepła na rezystancji R,

$W_{c(t \rightarrow \infty)}$ - energia zgromadzona w polu kondensatora po naładowaniu,

$W_{c(0^+)}$ - energia pola kondensatora tuż przed ładowaniem.

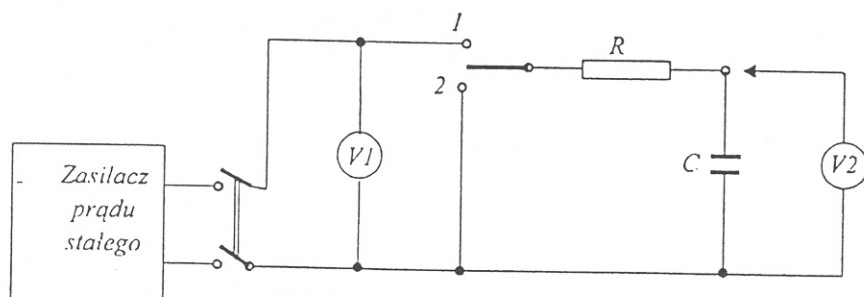
Dla warunków początkowych zerowych $W_{c(0^+)} = 0$, stąd $W_R = W_{c(t \rightarrow \infty)}$.

Sprawność układu ładowania wynosi wówczas $\eta = 0,5$. Przy wyładowaniu kondensatora, energia pola kondensatora wydziela się w postaci ciepła na rezystancji R.

8.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

8.2.1. Układ połączeń

Zestawiamy układ połączeń przedstawiony na rys.8.5.



Rys. 8.5. Układ pomiarowy do badania stanów nieustalonych w obwodzie RC.

Oznaczenia:

V1 - woltomierz magnetoelektryczny,

V2 - woltomierz lampowy,

R - rezystor,

C - kondensator,

w - wyłącznik dwubiegunowy,

p - przełącznik jednobiegunowy.

8.2.2. Pomiary i obliczenia

W badanym układzie należy mierzyć w określonych odstępach czasu napięcie na zaciskach kondensatora przy ładowaniu i rozładowaniu. Następnie obliczamy natężenie prądu w obwodzie. Na podstawie pomiarów i obliczeń należy narysować charakterystyki $u_c = f(t)$, $u_R = f(t)$ oraz $i = f(t)$. Ponadto należy wyznaczyć stałą czasu τ . Badanie obwodu wykonujemy dla dwóch wartości R i C.

Pomiary i obliczenia przy ładowaniu kondensatora

Przy położeniu przełącznika (P) w położeniu (O) włączamy wyłącznik (W) i sprawdzamy woltomierzem (V1) napięcie zasilacza. Po wykonaniu tej czynności ustawiamy przełącznik (P) w położeniu (1) i odczytujemy wskazania woltomierza (V2) co 30 do 60 sekund. Pomiary powtarzamy dla zmienionych wartości R i C. Na podstawie wyników pomiarów obliczamy:

$$u_R = u - u_c \quad \text{oraz} \quad i = \frac{u - u_c}{R}$$

Wyniki pomiarów i obliczeń notujemy w tablicy (8.1)

Tablica 8.1

Lp	t	$C_1 = \dots \mu\text{F}, R_1 = \dots \text{M}\Omega$				$C_2 = \dots \mu\text{F}, R_2 = \dots \text{M}\Omega$			
		u	u_c	u_R	i	u	u_c	u_R	i
	min.	V	V	V	A	V	V	V	A

Uwaga!

Woltomierz lampowy (V2) przyłączamy jednym zaciskiem na stałe a drugim dotykamy do zacisku kondensatora tylko w czasie pomiaru napięcia. Pomiar przeprowadzamy szybko, żeby nie rozładować kondensatora.

Pomiary i obliczenia przy rozładowaniu kondensatora

Przełącznik (P) ustawiamy w położenie (2). Odczytujemy wskazania woltomierza (V2) dla czasów $\tau, 2\tau, \dots, 5\tau$, przy czym τ obliczamy z wzoru $\tau = RC$. Wyniki pomiarów i obliczeń notujemy w tablicy 8.2.

Tablica 8.2

Lp.	t	$C_1 = \dots\dots\dots\mu\text{F}$ $R_1 = \dots\dots\dots\text{M}\Omega$		$C_2 = \dots\dots\dots\mu\text{F}$ $R_2 = \dots\dots\dots\text{M}\Omega$	
		u_c	i	u_c	i
	min.	V	A	V	A

Ćwiczenie 9

DRGANIA RELAKSACYJNE**9.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE****9.1.1. Wstęp**

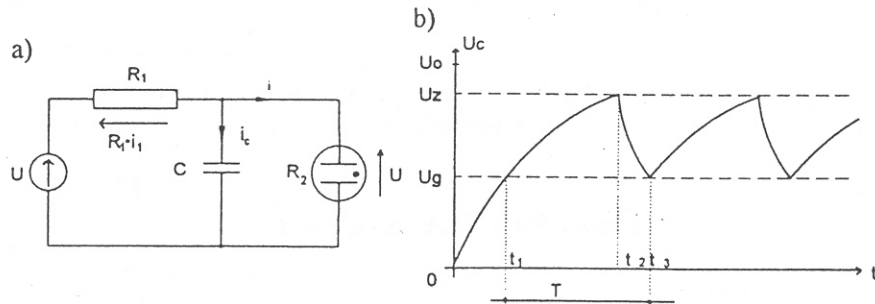
Napięcia o przebiegach niesinusoidalnych są często stosowane w urządzeniach elektronicznych do różnych celów: jako napięcie podstawy czasu w oscyloskopach lub urządzeniach telewizyjnych, do sterowania układów liczących, w układach impulsowych itd. Napięcie te uzyskuje się bądź przy użyciu generatorów drgań niesinusoidalnych, czyli układów wytwarzających napięcie o pożądanym przebiegu, bądź też przez odpowiednie kształtowanie napięć sinusoidalnych.

Jeżeli drgania charakteryzuje szybka zmiana wartości wielkości drgającej w ciągu bardzo małej części okresu i późniejsza powolna jej zmiana w następnej części okresu, to drgania mają charakter relaksacyjny. Przykładem drgań relaksacyjnych są drgania piłokształtne (lub trójkątne) uzyskiwane w generatorach przez wykorzystanie procesów ładowania i wyładowania kondensatora ze źródła napięcia stałego. Układ taki musi zawierać element ograniczający prąd ładowania kondensatora (w najprostrzym przypadku jest to opornik) oraz element umożliwiający przejście kondensatora z procesu ładowania do wyładowania i odwrotnie. Elementami umożliwiającymi przejście z procesu ładowania do wyładowania i odwrotnie są zwykle elementy nieliniowe, których charakterystyka $u=f(i)$ w pewnym przedziale jest funkcją malejącą.

Przykładem takich elementów jest dioda gazowana (neonówka), trioda gazowana (tyratron), a z elementów półprzewodnikowych - diak i dynistor.

9.1.2. Analiza obwodu RC z diodą gazową (neonówką)

Rozpatrzmy obwód przedstawiony na rys.9.1, w którym kondensator zasilany ze źródła napięcia stałego poprzez rezystor R_1 z bocznikowany jest diodą gazowaną R_2 .



Rys.9.1. Obwód RC z diodą gazowaną: a) schemat układu, b) szkic przebiegu napięcia na kondensatorze.

W chwili $t=0$ warunek początkowy jest zerowy, a po doprowadzeniu napięcia stałego U_0 kondensator o pojemności C ładuje się poprzez opornik o rezystancji R_1 aż do chwili t_2 , w której napięcie na kondensatorze osiągnie wartość progową U_z . Do chwili t_2 neonówka nie przewodziła i jej rezystancję wewnętrzną można było przyjąć za nieskończenie wielką. W chwili t_2 neonówka zaczyna przewodzić i jej rezystancja wewnętrzna maleje skokiem do wartości stosunkowo nieznacznej. W oczku powstałym przez połączenie elementów R_2C kondensator wyładowuje się, napięcie na nim maleje od wartości U_z do wartości osiągniętej w chwili t_3 , w której napięcie U_g nie wystarcza na podtrzymanie stanu przewodzenia neonówki, tak że przechodzi ona w stan zaporowy i zjawisko ładowania kondensatora o pojemności C przez opornik R_1 powtarza się.

Z dostatecznym przybliżeniem można przyjąć założenie:

- przed zapłonem, w przedziale napięciowym $U=0$ do $U_c=U_z$, prąd $i=0$, tzn.

$$R_2 = \infty$$

- po zapłonie, w przedziale napięciowym $U_c=U_z$ do $U_c=U_g$, $R_2 = \text{const.}$, przy czym $R_2 \ll R_1$.

Przed zapłonem, po uwzględnieniu wymienionych założeń, napięcie na kondensatorze będzie narastać według krzywej wykładniczej wyrażonej równaniem:

$$u_c(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}) \quad (9.1)$$

po zapłonie napięcie na kondensatorze maleje według krzywej wykładniczej określonej równaniem:

$$u_c(t) = U_z \cdot e^{-\frac{t-t_2}{R_2 C}} \quad (9.2)$$

Okres drgań T jest sumą czasu ładowania i rozładowania kondensatora. Z równania (9.1) otrzymujemy układ dwóch równań:

$$U_g = U(1 - e^{-\frac{t_1}{R_1 C}}) \quad (9.3)$$

$$U_z = U(1 - e^{-\frac{t_2}{R_1 C}})$$

Czas ładowania w cyklu drgań relaksacyjnych jest równy różnicy czasów $(t_2 - t_1)$, który określamy z równań (9.3):

$$t_2 - t_1 = R_2 C \cdot \ln \frac{U - U_g}{U - U_z} \quad (9.4)$$

czas rozładowania kondensatora będący różnicą czasów $(t_3 - t_2)$ wyznaczamy z równania (9.2)

$$t_3 - t_2 = R_2 C \cdot \ln \frac{U_z}{U_g} \quad (9.5)$$

Dodając stronami równania (9.4) i (9.5) otrzymujemy wzór na okres drgań:

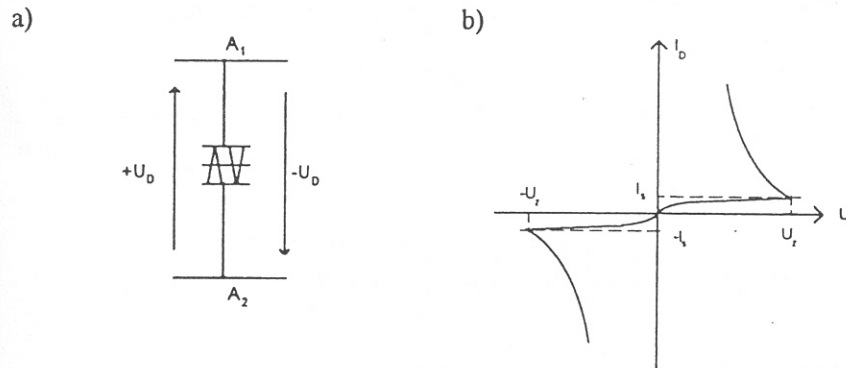
$$T = t_3 - t_1 = R_1 C \cdot \ln \frac{U - U_g}{U - U_z} + R_2 C \cdot \ln \frac{U_z}{U_g} \quad (9.6)$$

ponieważ $R_2 \ll R_1$ można pominąć drugi składnik wzoru i wyrażenie (9.6) uprości się do postaci:

$$T = R_1 C \cdot \ln \frac{U - U_g}{U - U_z} \quad (9.7)$$

9.1.3. Analiza obwodu RC z diakiem

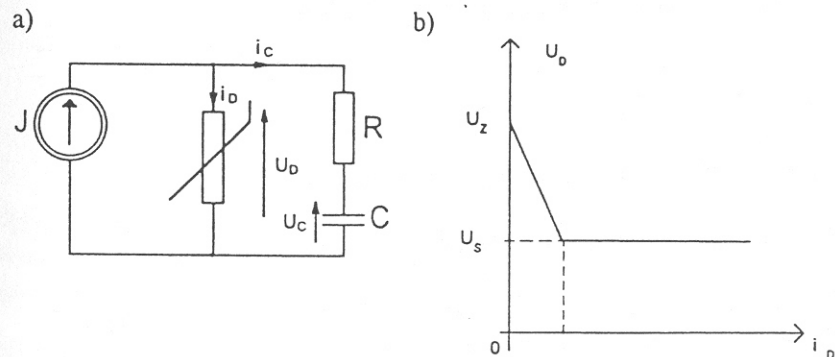
Diak jest symetryczną dwukierunkową diodą przełączającą o strukturze trójwarstwowej. Jego charakterystyka prądowo napięciowa z obszarem o ujemnej rezystancji różniczkowej umożliwia budowę układów wytwarzających impulsy o zmiennej polaryzacji.



Rys.9.2. Diak: a) oznaczenie graficzne diaka, b) charakterystyka prądowo-napięciowa diaka.

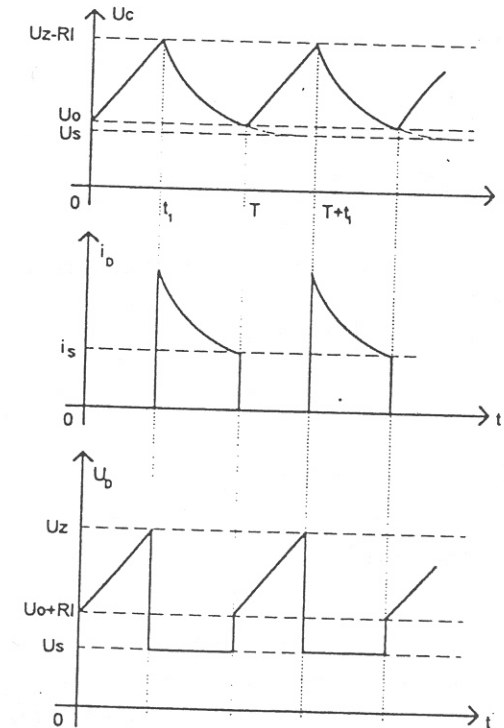
Z charakterystyki diaka (rys.9.2) wynika, że obszar ujemnej rezystancji występuje dla wszystkich wartości przekraczających prąd przełączania I_s . Diak wykorzystywany jest często w układzie generatora relaksacyjnego do sterowania tyrystorów jedno i dwukierunkowych.

Rozpatrzmy obwód przedstawiony na Rys.9.3. W obwodzie tym, w porównaniu z obwodem opisanym w p. 9.2 Rys.9.1a, źródło napięcia zastąpiono źródłem prądu.



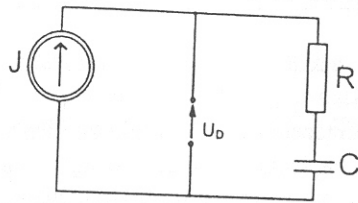
Rys.9.3. Obwód z diakiem: a) obwód RC z diakiem; b) odcinkami liniowo aproksymowana charakterystyka diaka.

Zasada pracy diaka w układzie generatora relaksacyjnego jest taka sama jak neonówki w układzie przedstawionym w p. 9.1.2. Jeżeli kondensator nie jest naładowany to po dołączeniu źródła prądu kondensator ładuje się, a napięcie na diaku rośnie. Gdy napięcie na diaku osiąga wartość U_z diak zaczyna przewodzić, kondensator rozładowuje się a prąd diaka po skokowym wzroście maleje do wartości I_s przy której diak przestaje przewodzić. Rozpoczyna się ponowne ładowanie kondensatora i proces powtarza się cyklicznie. Przebiegi czasowe napięcia kondensatora, prądu i napięcia diaka podczas pracy okresowej przedstawiono na rys.9.4.



Rys.9.4. Przebiegi napięcia kondensatora oraz napięcia i prądu diaka w układzie RC z diakiem.

Okres drgań przedstawionych na rys.9.4 można podzielić na dwa przedziały: $0 < t < t_1$ oraz $t_1 < t < T$. W pierwszym przedziale diak nie przewodzi prądu. W tym stanie układowi z rys.9.3a odpowiada schemat zastępczy przedstawiony na rys.9.5.



Rys.9.5. Schemat zastępczy obwodu z rys.9.3a dla przedziału czasu $0 < t < t_1$.

W obwodzie tym kondensator ładowany jest stałym prądem źródła. Biorąc pod uwagę warunek początkowy $u(0) = U_0$ możemy dla tego przedziału napisać:

$$u_C(t) = \frac{J}{C}t + U_0 \quad (9.8)$$

oraz

$$u_D(t) = RJ + u_C(t) = RJ + \frac{J}{C}t + U_0 \quad (9.9)$$

Z zależności (9.8) i (9.9) wynika, że napięcia na kondensatorze i na diaku narastają w tym przedziale liniowo.

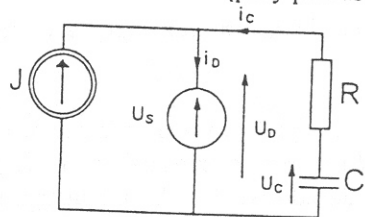
W chwili t_1 napięcie diaka osiąga wartość U_Z .

$$u_D(t_1) = U_Z \quad (9.10)$$

Po uwzględnieniu wzoru (9.9) otrzymujemy:

$$t_1 = \frac{C}{J}(U_Z - U_0 - RJ) \quad (9.11)$$

Od chwili t_1 rozpoczyna się drugi przedział okresu $t_1 < t < T$, w którym diak przewodzi a napięcie na nim spada skokowo do poziomu stabilizacji U_s . Przedziałowi temu odpowiada schemat zastępczy przedstawiony na rys.9.6.



Rys.9.6. Schemat zastępczy obwodu z rys.9.3a dla przedziału czasu $t_1 < t < T$.

Chwili t_1 odpowiada napięcie na kondensatorze:

$$u_C(t_1) = U_Z - RJ \quad (9.12)$$

Równanie to stanowi warunek początkowy dla obwodu z rys.9.6. Napięcie kondensatora maleje według krzywej wykładniczej określonej równaniem:

$$u_C(t) = U_s + (U_Z - RJ - U_s)e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad (9.13)$$

Prąd diaka wynosi:

$$i_D(t) = J - i_C = J + \frac{1}{R}(U_Z - RJ - U_s) \cdot e^{-\frac{t-t_1}{RC}} \quad (9.14)$$

Diak przestaje przewodzić gdy jego prąd zmniejszy się do wartości I_s . Nastąpi to w chwili $t=T$, stąd otrzymujemy warunek na okres T drgań relaksacyjnych:

$$T = RC \cdot \ln \frac{U_Z - RJ - U_s}{R(I_s - I)} + t_1 \quad (9.15)$$

Zmniejszenie prądu diaka do wartości I_s możliwe jest tylko pod warunkiem:

$$J < I_s \quad (9.16)$$

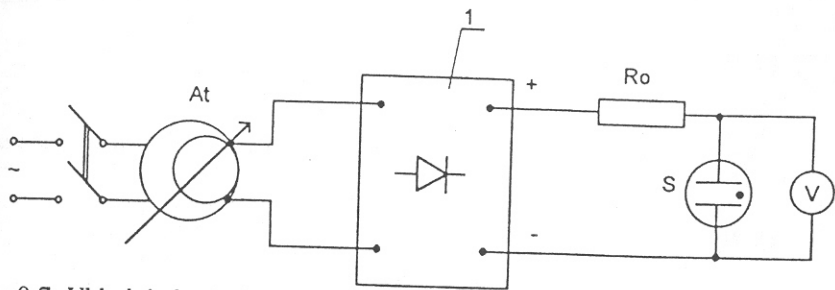
Nierówność ta jest warunkiem generacji drgań w obwodzie.

9.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

9.2.1. Badanie układu z diodą gazowaną (stabilivoltem)

Pomiar napięcia zapłonu i gaśnięcia stabiliwolu

Pomiaru dokonujemy w obwodzie przedstawionym na rys.9.7 obserwując moment zapłonu i gaśnięcia stabiliwoltu.



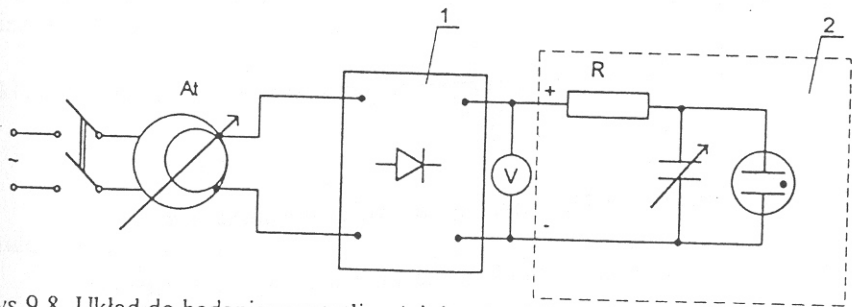
Rys.9.7. Układ do badania napięcia zapłonu i gaśnięcia stabiliwoltu.
Oznaczenia: 1-prostownik (układ Graetza); R_0 - rezystor ograniczający prąd stabiliwoltu; S- stabiliwolt; V- woltmierz cyfrowy.

Tablica 9.1

Lp	U_z V	$U_{zsr.}$ V	U_g V	$U_{gsr.}$ V
1				
2				
3				

Pomiar częstotliwości drgań relaksacyjnych

Pomiary wykonujemy w układzie przedstawionym na rys.9.7 mierząc sekundmierzem czas np. 10-ciu kolejnych zapłonów. Pomiary należy wykonać dla dwóch napięć, dwóch wartości rezystancji R i dwóch wartości pojemności C.



Rys.9.8. Układ do badania częstotliwości drgań relaksacyjnych.
Oznaczenia: 1-prostownik; 2- panel "Drgania relaksacyjne układu z diodą gazowaną".

Na podstawie znanych wartości U , U_2 , U_g , R , C wyznaczyć analitycznie okres drgań relaksacyjnych.

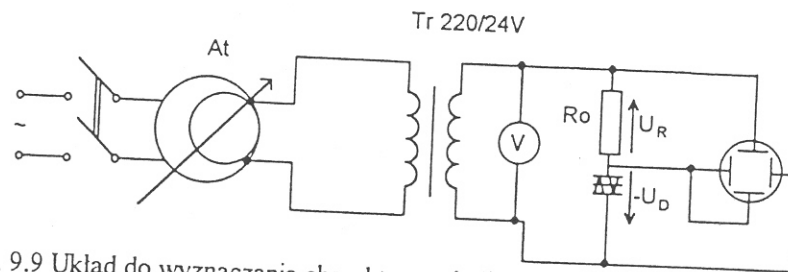
Tablica 9.2

Lp.	U V	R kΩ	C μF	T S	Tobl. S
1					
.					
.					
8					

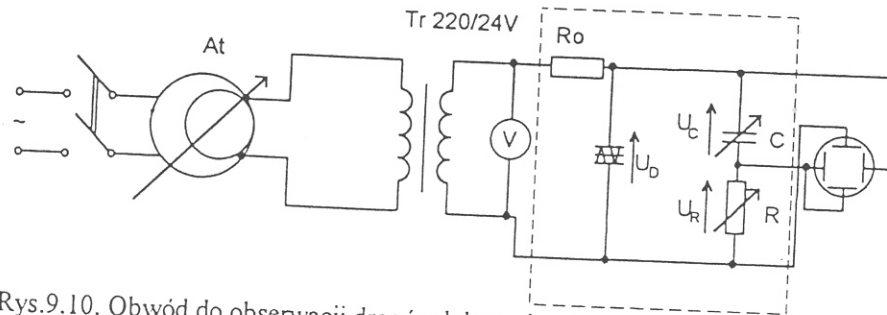
9.2.2. Badanie układu z diakiem

Wyznaczenie charakterystyki diaka

Wyznaczanie charakterystyki przeprowadzamy w układzie przedstawionym na rys.9.9. Na oscyloskopie obserwuje się krzywą $u_R(u_D)$. Ponieważ $u_R = R i_D$ to obserwowana jest krzywa $R i_D(u_D)$. Na tej podstawie należy wykreślić charakterystykę $i_D = f(u_D)$.



Rys. 9.9 Układ do wyznaczania charakterystyk diaka.



Rys.9.10. Obwód do obserwacji drgań relaksacyjnych.
Oznaczenia: 1- panel "Drgania relaksacyjne układu z diakiem".

Obserwacja drgań relaksacyjnych

Obserwacji dokonujemy w układzie przedstawionym na rys.9.10. Należy zaobserwować i przerysować przebiegi $u_c(t)$, $u_R(t)$ oraz $u_D(t)$ dla dwóch wartości pojemności C . Dla jednej wartości pojemności zaobserwować i przerysować cykl graniczny napięcia U_c .

Opracowanie wyników

Na podstawie przerysowanych przebiegów należy:

1. Dokonać aproksymacji charakterystyki diaka przez krzywą odcinkami liniową.
2. Na podstawie dokonanej aproksymacji obliczyć przebieg napięcia kondensatora $u_c(t)$ oraz napięcia diaka $u_D(t)$ dla jednego ze zmierzonych przypadków.

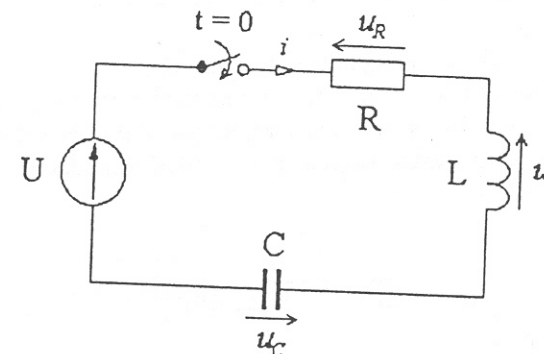
Należy przyjąć uproszczenie, że układ zasilany jest ze źródła prądu $J = \frac{U}{R_0}$.

Przebiegi uzyskane z obliczeń porównać na wspólnym wykresie z wynikami uzyskanymi z pomiarów.

Ćwiczenie 10**OBWÓD SZEREGOWY RLC W STANIE NIEUSTALONYM****10.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE**

Analiza gałęzi RLC metodą klasyczną

Przykładem liniowego stacjonarnego układu dynamicznego drugiego rzędu jest obwód szeregowy RLC.



Rys.10.1. Obwód szeregowy RLC zasilany ze źródła napięcia stałego.

Obwód ten opisany jest zwyczajnym równaniem różniczkowym drugiego rzędu :

$$U = LC \frac{d^2 u_{cp}}{dt^2} + RC \frac{du_{cp}}{dt} + u_c \quad (10.1)$$

Składową przejściową napięcia u_{cp} na kondensatorze wyznaczamy z równania jednorodnego:

$$\frac{d^2 u_{cp}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{cp}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{cp} = 0 \quad (10.2)$$

Równanie charakterystyczne dla (10.2) ma postać:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (10.3)$$

natomiast pierwiastki tego równania:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm \beta \quad (10.4)$$

$$\text{gdzie } \alpha = -\frac{R}{2L} ; \quad \beta = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{LC}} \quad (10.5)$$

Zależnie od wartości parametrów R, L, C równanie (10.4) ma trzy różne rozwiązania.

10.1.1. Przypadek 1 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Oba pierwiastki $s_{1,2}$ są rzeczywiste i ujemne, o różnej wartości. Zachodzi tu aperiodyczne ładowanie kondensatora przez rezystancję i indukcyjność.

Składowa przejściowa na kondensatorze będzie równa :

$$u_{cp} = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (10.6)$$

Stałe całkowania A_1 i A_2 wyznaczamy z warunków początkowych dla $t = 0$.

$$u_{cp}(0) = A_1 + A_2 = -U \quad (10.7)$$

$$i(0) = s_1 A_1 + s_2 A_2 = 0 \quad (10.8)$$

skąd:

$$A_1 = \frac{Us_2}{s_1 - s_2} ; \quad A_2 = -\frac{Us_1}{s_1 - s_2} \quad (10.9)$$

W stanie ustalonym napięcie na kondensatorze $u_{cu} = U$. Wobec tego napięcie na kondensatorze w stanie niestabilnym wynosić będzie:

$$\begin{aligned} u_c = u_{cp} + u_{cu} &= U - \frac{U}{s_1 - s_2} \cdot (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) = \\ &= U - U e^{-\alpha t} \left(\text{ch } \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \text{sh } \beta t \right) \end{aligned} \quad (10.10)$$

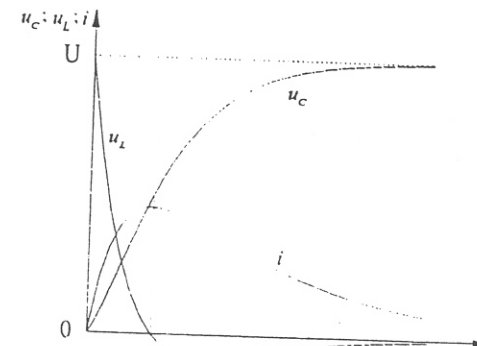
Prąd płynący w obwodzie, uwzględniając, że $s_1 \cdot s_2 = \frac{1}{LC}$:

$$i = C \frac{du_c}{dt} = \frac{U}{L(s_1 - s_2)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = \frac{U}{\beta L} e^{-\alpha t} \text{sh } \beta t \quad (10.11)$$

Napięcie na cewce indukcyjnej:

$$\begin{aligned} u_L = L \frac{di}{dt} &= \frac{U}{s_1 - s_2} \cdot (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) = \\ &= U e^{-\alpha t} \left(\text{ch } \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \text{sh } \beta t \right) \end{aligned} \quad (10.12)$$

Określone powyżej przebiegi przedstawia rys.10.2.



Rys.10.2. Przebiegi u_c , i , u_L dla przypadku aperiodycznego.

10.1.2. Przypadek 2 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Jest to przypadek aperiodyczny krytyczny. Równanie (10.3) ma jeden, ujemny pierwiastek :

$$s = -\frac{R}{2L} = -\alpha \quad (10.13)$$

Przebiegi prądu, napięcia na kondensatorze i na cewce wyrażone są wzorami:

$$i = \frac{U}{L} te^{st} = \frac{U}{L} te^{-\alpha t} \quad (10.14)$$

$$u_c = U - U(st - 1)e^{st} \quad (10.15)$$

$$u_L = U(1 + st)e^{st} \quad (10.16)$$

Charakter przebiegów prądu i napięć w funkcji czasu jest podobny jak w rozpatrywanym wcześniej przypadku aperiodycznym.

10.1.3. Przypadek 3 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Zachodzi tu oscylacyjne, tłumione ładowanie kondensatora przez rezystor i cewkę.

Równanie (10.3) posiada dwa pierwiastki zespolone, sprzężone:

$$s_1 = -\alpha - j\omega_0 \quad ; \quad s_2 = -\alpha + j\omega_0 \quad (10.17)$$

przy tym $\beta = j\omega_0$

Zależność (10.11) przyjmuje zatem postać :

$$i = \frac{U}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \quad (10.18)$$

Należy pamiętać, że pulsacja drgań własnych ω_0 zależy wyłącznie od parametrów obwodu R, L, C i wynosi:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (10.19)$$

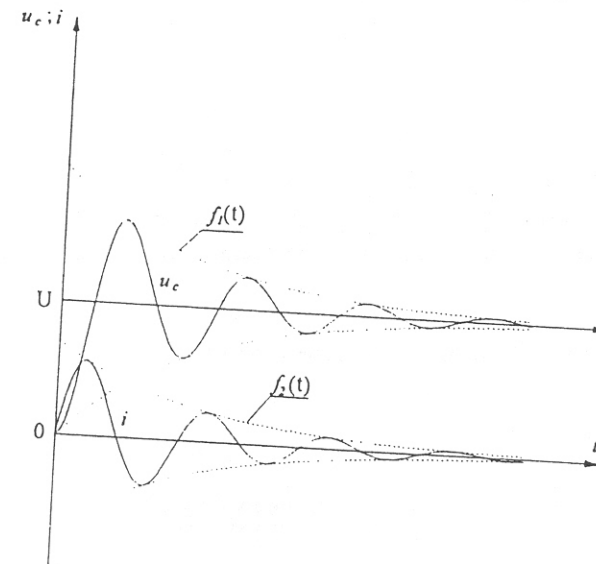
Napięcie na kondensatorze i cewce wynosi :

$$u_c = U - \frac{U}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (10.20)$$

$$u_L = -\frac{U}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t - \psi) \quad (10.21)$$

gdzie $\psi = \arctg \frac{\alpha}{\omega_0}$; natomiast stała tłumienia $\alpha = \frac{R}{2L}$.

Przebiegi prądu i oraz napięcia u_c na kondensatorze ilustruje rys. 10.3.



Rys. 10.3. Przebiegi u_c oraz i dla przypadku oscylacyjnego.

Obwiednie tych przebiegów oscylacyjnych określone są równaniami :

$$f_1(t) = U \pm \frac{U}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \text{ dla napięcia na kondensatorze } \quad (10.22)$$

$$f_2(t) = \pm \frac{U}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \quad - \text{ dla prądu} \quad (10.23)$$

Zmniejszanie się kolejnych amplitud oscylacji można określić posługując się tzw. dekrementem tłumienia, który jest równy stosunkowi amplitud przebiegu oscylacyjnego tłumionego, odległych o jeden okres T :

$$\frac{i(t)}{i(t+T)} = e^{-\alpha T} \quad (10.24)$$

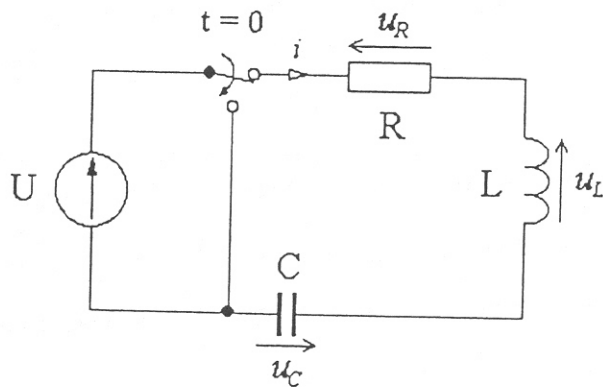
logarytm naturalny tego stosunku:

$$\ln e^{-\alpha T} = -\alpha T = -\frac{2\pi\alpha}{\omega_0} = -\frac{\pi R}{\omega_0 L} \quad (10.25)$$

nosi nazwę logarytmicznego dekrementu tłumienia.

10.1.4. Rozładowanie kondensatora przez obwód RL

Rozpatrzmy zwarcie gałęzi RLC przy warunkach początkowych niezerowych. Odpowiada to fizycznie rozładowaniu kondensatora przez rezystancję i cewkę indukcyjną (rys. 10.4).

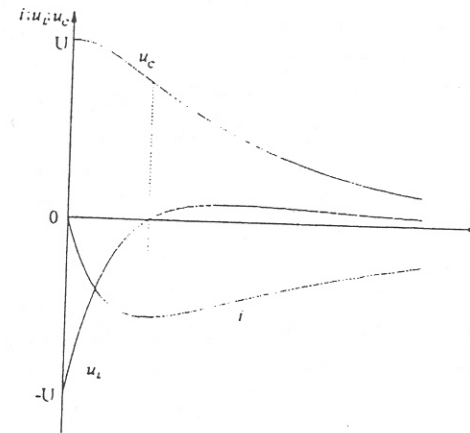


Rys.10.4. Zwarcie gałęzi szeregowej RLC przy niezerowych warunkach początkowych.

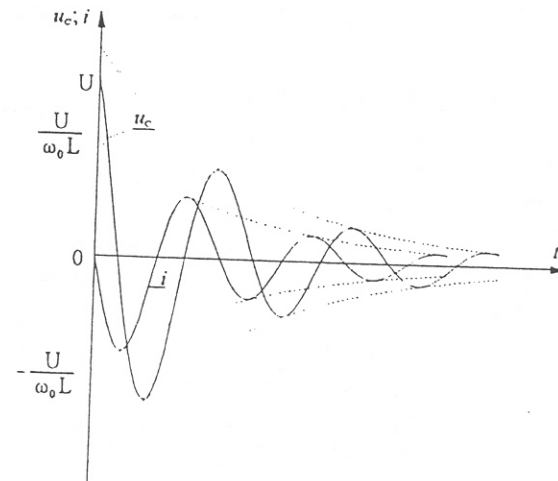
Analizując rozpatrywane oczko uzyskamy dla napięcia u_C równanie różniczkowe jednorodne o postaci identycznej jak równanie (10.2). Postępując analogicznie jak

dla przypadku ładowania kondensatora przez rezystancję i cewkę indukcyjną można otrzymać odpowiednie wzory na prąd i napięcia układu dla trzech przypadków: aperiodycznego, aperiodycznego krytycznego i oscylacyjnego.

Na rysunkach 10.5. i 10.6. podano przebiegi prądów i napięć dla przypadku aperiodycznego i oscylacyjnego rozładowania kondensatora przez cewkę i rezystancję.



Rys. 10.5. Przebiegi prądu i napięć zwarcia przez gałęzi RLC - przypadek aperiodyczny.



Rys.10.6. Przebiegi prądu i napięcia przy zwarcia gałęzi RLC - przypadek oscylacyjny.

10.2. Metoda płaszczyzny fazowej

Jedną z metod badania stanów nieustalonych jest metoda płaszczyzny fazowej. Metoda ta służy przede wszystkim do badania cech jakościowych badanych układów, zarówno liniowych jak i nieliniowych. W przypadku obwodów elektrycznych analizę ogranicza się do układów rzędu pierwszego i drugiego.

U podstaw tej metody leży badanie punktów na płaszczyźnie fazowej. Przez płaszczyznę fazową rozumiemy płaszczyznę układu prostokątnego, gdzie na osi odciętych odkładana jest wielkość badana, a na osi rzędnych jej pochodna względem czasu. Każdemu punktowi na tej płaszczyźnie będzie odpowiadał pewien stan układu opisany za pomocą zmiennych stanu x i $y = dx/dt$. Zmianie stanu obwodu w stanie nieustalonym odpowiada zmiana współrzędnych, czyli ruch punktu na płaszczyźnie fazowej. Liniją jaką wykreśli poruszający się punkt nazywamy trajekcją fazową. Ruch punktu może się odbywać tylko w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Dla zjawisk okresowych trajekcja fazowa jest krzywą.

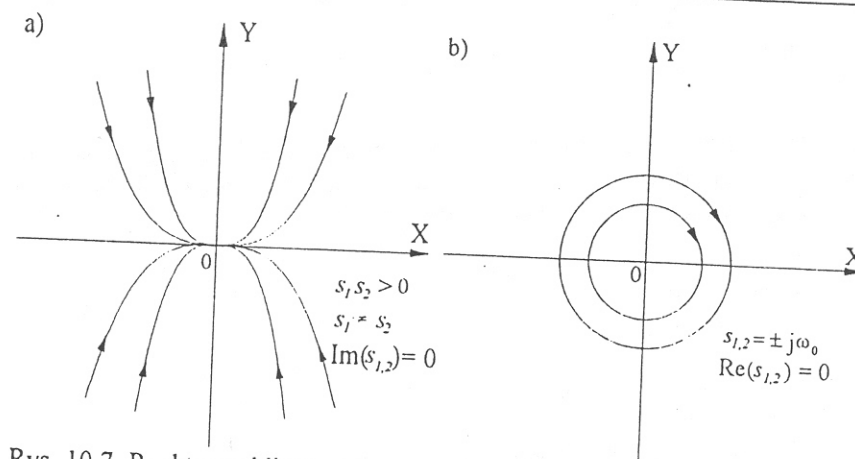
Dla układu liniowego pierwszego rzędu przy wymuszeniu stałym wszystkie trajektorie leżą na jednej prostej, a zależnie od warunku początkowego ruch następuje od różnych punktów początkowych do wspólnego punktu końcowego.

Dla układu liniowego rzędu drugiego trajekcją fazową zwaną często krzywą całkową jest pewna krzywa o parametrach zależnych od warunków początkowych. Rodzinę wszystkich trajektorii fazowych nazywamy portretem fazowym danego układu.

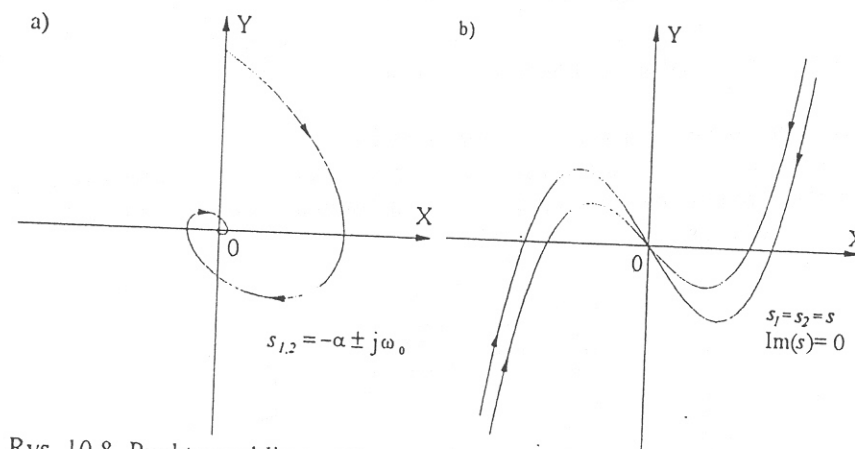
Stan równowagi układu drugiego rzędu na płaszczyźnie fazowej reprezentują tak zwane *punkty osobliwe*. Wystąpienie punktu osobliwego określonego rodzaju jest uzależnione od tego, jakie są pierwiastki charakterystycznego równania różniczkowego.

I tak punkt osobliwy typu *węzeł* wystąpi jeśli pierwiastki s_1 i s_2 są różne, rzeczywiste i tego samego znaku. Punkt osobliwy typu *środek (centrum)* wystąpi, gdy s_1 i s_2 są urojone: $s_{1,2} = \pm j\omega_0$. Punkt osobliwy typu *ognisko* powstanie jeśli pierwiastki s_1 i s_2 są liczbami zespolonymi, sprzężonymi.

Wreszcie punkt osobliwy typu *węzeł zdegenerowany* ma miejsce w przypadku, gdy istnieje jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty $s_1 = s_2$. Rodzaje punktów osobliwych przedstawia rys. 10.7. i 10.8.



Rys. 10.7. Punkty osobliwe: a) typu węzeł, b) typu środek (centrum).



Rys. 10.8. Punkty osobliwe: a) typu ognisko, b) typu węzeł zdegenerowany.

Zanalizujmy teraz obwód z rys.10.1. stosując metodę płaszczyzny fazowej.

W przypadku oscylacyjnym tłumionym przy $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ wyznaczyliśmy prąd i (10.18) jako:

$$i = \frac{U}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$$

gdzie $\alpha = \frac{R}{2L}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}$

oznaczając wartość początkową obwiedni drgań $A = \frac{U}{\omega_0 L}$ (patrz równanie 10.23)

napiszemy wyrażenie na x i y w funkcji czasu:

$$x = Ae^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \quad (10.26)$$

$$y = -\alpha Ae^{-\alpha t} \sin \omega_0 t + \omega_0 Ae^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$$

Dążąc do eliminacji czasu t dokonamy przekształcenia liniowego współrzędnych, aby w wyrażeniu na y występował tylko jeden człon.

$$u = \omega_0 x$$

$$v = \alpha x + y$$

Po podstawieniu za x i y wartości ze wzoru (10.26) otrzymamy:

$$u = \omega_0 Ae^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \quad (10.27)$$

$$v = \alpha Ae^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$$

Podnosimy obie zależności do kwadratu i dodajemy stronami:

$$u^2 + v^2 = \omega_0^2 A^2 e^{-2\alpha t} \quad (10.28)$$

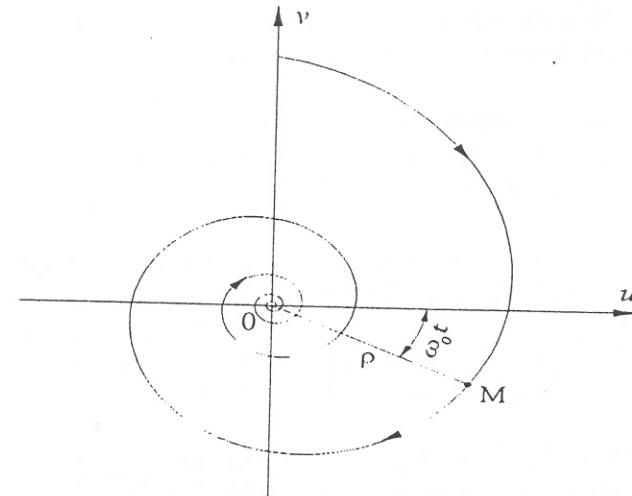
Możemy wyrazić te równania we współrzędnych biegunowych:

$$\rho = \sqrt{u^2 + v^2} = \omega_0 A e^{-\alpha t} \quad (10.29)$$

$$\operatorname{tg} \omega_0 t = \frac{u}{v} \quad (10.30)$$

Torem punktu w płaszczyźnie (u, v) jest więc spirala logarymiczna dążąca do ogniska $(0, 0)$, rys. (10.9).

Punkt osiągnie ognisko po czasie nieskończenie wielkim.



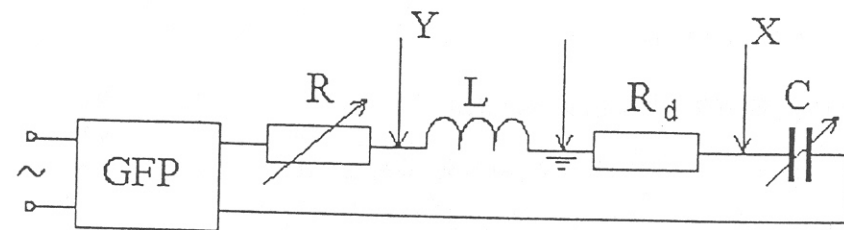
Rys. 10.9. Krzywa całkowita (trajektoria fazowa) gałęzi RLC.

W podobny sposób można uzyskać inne trajektorie fazowe dla układu szeregowego RLC, np. dla przypadku aperiodycznego.

10.3. WYKONANIE ĆWICZENIA

10.3.1. Ładowanie i rozładowanie kondensatora przez rezystancję i cewkę indukcyjną

Zestawiamy układ przedstawiony na rysunku 10.10.



Rys. 10.10. Układ pomiarowy do badania stanów nieustalonych w gałęzi RLC. (GFP - generator fali prostokątnej, R - rezystor 1500Ω , R_d - rezystor 46Ω)

Układ składa się z generatora fali prostokątnej, elementów R, L, C , (przy czym R oraz C są regulowane) oraz oscyloskopu.

Zasilanie układu impulsami prostokątnymi pozwala odtworzyć dwa przypadki stanów nieustalonych gałęzi RLC: włączenie napięcia stałego oraz zwarcie przy niezerowych warunkach początkowych.

Korzystając z zestawionego układu należy :

1. Wyznaczyć rezystancję krytyczną R_{kr} dla jednej wartości pojemności układu $C = \dots\dots\dots F$, przy znanej indukcyjności cewki $L = \dots\dots\dots H$.

2. Zaobserwować i podać w sprawozdaniu kształt następujących napięć u_R , u_C , u_L , dla dwu przypadków: aperiodycznego i oscylacyjnego dla wartości pojemności z punktu 1. Rozpatrzyć przy tym zarówno przypadek ładowania kondensatora przez cewkę i rezystancję, jak też analogiczny przypadek rozładowania przy niezerowych warunkach początkowych.

3. Dla wartości R , L , C zgodnych z demonstrowanym przypadkiem drgań oscylacyjnych wyznaczyć wartość współczynnika tłumienia i pulsacji drgań własnych ω_0 . Podać chwilową wartość prądu w obwodzie zgodnie ze wzorem (10.18) dla przypadku ładowania kondensatora przez rezystancję i cewkę.

10.3.2. Trajektorie fazowe układu szeregowego RLC

Korzystamy z układu pomiarowego z Rys. 10.10. Na oś X oscyloskopu podajemy sygnał napięciowy proporcjonalny do prądu i w obwodzie (np. napięcie $u_{Rd} = R_d i$) a oś Y sygnał proporcjonalny do różniczki tego prądu (np. napięcie $u_L = L \frac{di}{dt}$). Zmieniając odpowiednie parametry obwodu możemy uzyskać trajektorie fazowe o różnych rodzajach punktów osobliwych.

W sprawozdaniu należy :

1. Zamieścić trajektorie fazowe układu RLC :

a. dla rezystancji $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ przy pojemności $C = \dots\dots\dots F$
oraz indukcyjności $L = \dots\dots\dots H$,

b. dla rezystancji $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ przy tych samych L i C ,

c. dla rezystancji $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ przy tych samych L i C .

2. Wyprowadzić wzór na trajektorię fazową układu szeregowego LC wykorzystując przykład podany w punkcie 10.2. Narysować kilka trajektorii tego układu dla różnych warunków początkowych.

Ćwiczenie 11

MODEL LINII DŁUGIEJ

11.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

11.1.1. Wstęp

Przepływ energii w obwodzie elektrycznym można rozpatrywać jako rozprzestrzenianie się fali elektromagnetycznej w przestrzeni otaczającej ten obwód. Podstawową zależność dla ruchu falowego przedstawia zależność (11.1).

$$v_f = \lambda \cdot f \quad (11.1)$$

gdzie:

v_f - prędkość fazowa czyli prędkość przemieszczania się punktów drgania sinusoidalnego, mających ten sam kąt fazowy, mierzona w [m/s],

λ - długość fali w [m],

f - częstotliwość drgań w [Hz].

W przypadku obwodu umieszczonego w powietrzu ($v_f=3 \cdot 10^8$ m/s) długość fali elektromagnetycznej o częstotliwości drgań $f=50$ Hz wynosi $\lambda=6000$ km, dla częstotliwości drgań $f=200$ MHz długość fali wynosi $\lambda=1.5$ m.

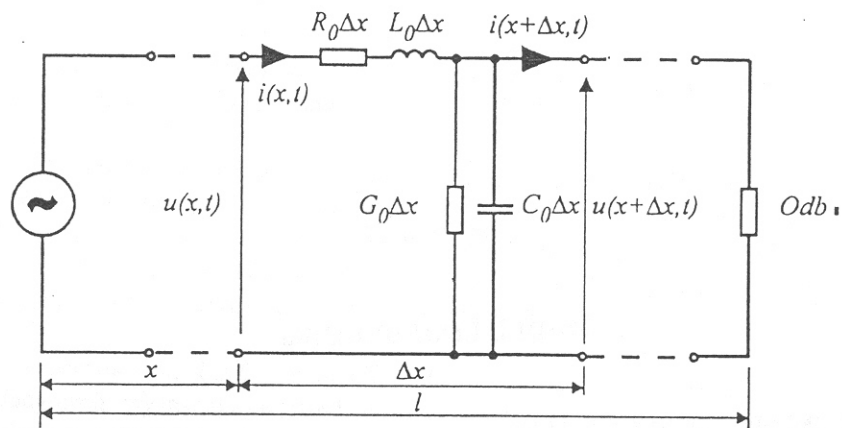
Jeżeli długość linii stanowiącej element obwodu elektrycznego jest rzędu długości fali elektromagnetycznej, na której linia pracuje nazywa się ją linią długą.

Dla uproszczenia rozważań zjawiska fizyczne w polu elektromagnetycznym zachodzące w przestrzeni linii długiej można uprościć do efektów zachodzących w elementach elektrycznych takich jak rezystory, kondensatory, indukcyjności.

Linie długą o parametrach rozłożonych można przedstawić jako kaskadę sekcji elementarnych o parametrach skupionych.

11.1.2. Sekcja elementarna linii długiej

Rozważmy sekcję linii długiej o długości Δx . Schemat zastępczy tej sekcji przedstawiono na rysunku 11.1.



Rys. 11.1. Schemat zastępczy elementu linii długiej.

Elementy schematu zastępczego z rysunku 11.1 przedstawiają następujące parametry linii długiej:

- podłużne:

R_0 - rezystancja jednostkowa linii, wyrażona w Ω/m ,

L_0 - indukcyjność jednostkowa linii, wyrażona w H/m ,

- poprzeczne:

G_0 - konduktancja jednostkowa linii, wyrażona w S/m ,

C_0 - pojemność jednostkowa linii, wyrażona w F/m ,

Linie długą, której parametry jednostkowe nie zależą od współrzędnej x nazywa się linią jednorodną. Jeżeli parametry jednostkowe nie zależą od wartości prądów i napięć w linii taką nazywa się linią długą liniową. Dalsze rozważania prowadzone są dla linii długiej jednorodnej i liniowej.

11.1.3. Równania linii długiej

Korzystając ze schematu zastępczego z rysunku 11.1 i przechodząc do nieskończonej małej sekcji linii długiej ($\Delta x \rightarrow 0$) można zapisać układ równań

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 \cdot i + L_0 \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 \cdot u + C_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (11.2)$$

Zakładając, że wymuszeniem jest źródło napięcia sinusoidalnego o danej częstotliwości w stanie ustalonym napięcia i prądy w linii są sinusoidalnymi funkcjami dwóch zmiennych: czasu i odległości oraz mają częstotliwość równą częstotliwości wymuszenia. Stosując metodę liczb zespolonych układ równań (11.2) można zapisać w postaci (11.3).

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \underline{I} \\ -\frac{dI}{dx} = (G_0 + j\omega C_0) \cdot \underline{U} \end{cases} \quad (11.3)$$

Wprowadzając oznaczenia (11.4)

$$\begin{aligned} R_0 + j\omega L_0 &= \underline{Z}_0 \\ G_0 + j\omega C_0 &= \underline{Y}_0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

otrzymuje się układ równań (11.5).

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I} \\ -\frac{dI}{dx} = \underline{Y}_0 \cdot \underline{U} \end{cases} \quad (11.5)$$

Układ (11.5) stanowi dwa równania różniczkowe liniowe, pierwszego rzędu o stałych współczynnikach. Jedną z metod rozwiązania równań linii długiej jest przejście do jednego równania drugiego rzędu zawierającego tylko jedną zmienną. Po zróżniczkowaniu obu stron pierwszego równania za wzoru (11.5) otrzymuje się równanie (11.6).

$$-\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \cdot \frac{dI}{dx} \quad (11.6)$$

Po podstawieniu drugiego równania ze wzoru (11.5) otrzymuje się równanie (11.7).

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \underline{U} \quad (11.7)$$

Równanie (11.7) zawiera tylko jedną zmienną U . Po wprowadzeniu oznaczenia (11.8)

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \alpha + j\beta \quad (11.8)$$

otrzymuje się postać równania (11.9).

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U} \quad (11.9)$$

$\underline{\gamma}$ jest to stała propagacji (rozprzestrzeniania) linii długiej, jej wymiarem jest $[m^{-1}]$. α nazywa się stałą tłumienia, β nazywa się współczynnikiem przesunięcia fazowego. Obie ostatnie wielkości wyrażone są w $[m^{-1}]$. Rozwiązaniem równania (11.9) jest całka ogólna równania stanowiąca kombinację liniową dwóch całek szczególnych o postaci danej równaniem (11.10).

$$\underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x} \quad (11.10)$$

Stale całkowania \underline{A}_1 i \underline{A}_2 mają charakter i wymiar fizyczny napięcia. Podstawiając równanie (11.10) do pierwszego równania układu (11.5) otrzymuje się równanie (11.11).

$$\underline{Z}_0 \underline{I} = \underline{\gamma} \cdot (\underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}) \quad (11.11)$$

Po przekształceniu równania (11.11) otrzymuje się wzór (11.12)

$$\underline{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}} \cdot (\underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}) = \frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot (\underline{A}_1 \cdot e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}) \quad (11.12)$$

gdzie:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \underline{Z}_c = Z_c e^{j\vartheta} \quad (11.13)$$

\underline{Z}_c nazywa się impedancją falową zespoloną linii długiej i wyraża się w $[\Omega]$.

Równania (11.10) i (11.12) stanowią rozwiązanie równania linii długiej uzależnione od stałych całkowania \underline{A}_1 i \underline{A}_2 . Wyrażając stałe całkowania poprzez równania (11.14),

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= A_1 e^{j\psi_1} \\ \underline{A}_2 &= A_2 e^{j\psi_2} \end{aligned} \quad (11.14)$$

znając równanie (11.8) i korzystając ze znanych zależności, równanie (11.10) można wyrazić w postaci (11.15).

$$u = \sqrt{2} \cdot A_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha+j\beta)x} + \sqrt{2} \cdot A_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha+j\beta)x} \quad (11.15)$$

Znając wzór (11.13) równanie (11.12) przyjmuje postać (11.16).

$$z_c e^{j\vartheta} i = \sqrt{2} \cdot A_1 e^{j\psi_1} e^{-(\alpha+j\beta)x} - \sqrt{2} \cdot A_2 e^{j\psi_2} e^{(\alpha+j\beta)x} \quad (11.16)$$

Po przekształceniach otrzymujemy układ równań (11.17).

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} \cdot A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \sqrt{2} \cdot A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) \\ z_c i = \sqrt{2} \cdot A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \vartheta) - \sqrt{2} \cdot A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \vartheta) \end{cases} \quad (11.17)$$

Pierwsze człony prawych stron równań (11.17) przedstawiają matematyczny opis fali pierwotnej, rozchodzącej się z prędkością fazową $v = \omega/\beta$, drugie człony opisują falę odbitą o prędkości fazowej $v_o = -\omega/\beta$. Długość fali wynosi $\lambda = 2\pi/\beta$. Stałe całkowania wyznacza się z warunków brzegowych na początku linii. Oznaczając długość linii przez l , wartości napięcia i prądu na początku linii ($x=0$) przez \underline{U}_1 i \underline{I}_1 i podstawiając do równań (11.10) i (11.12) otrzymuje się układ równań (11.18).

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{Z}_c \underline{I}_1 = \underline{A}_1 - \underline{A}_2 \end{cases} \quad (11.18)$$

Stąd otrzymuje się rozwiązanie (11.19)

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1) \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1) \end{aligned} \quad (11.19)$$

Ostatecznie po podstawieniu rozwiązania (11.19) do równań (11.10) i (11.12) otrzymuje się układ równań (11.20)

$$\begin{cases} \underline{U} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1) \cdot e^{-\gamma x} + \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1) \cdot e^{\gamma x} \\ \underline{Z}_c \underline{I} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1) \cdot e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1) \cdot e^{\gamma x} \end{cases} \quad (11.20)$$

lub w innej postaci układ równań (11.21).

$$\begin{cases} \underline{U} = \frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \cdot \underline{U}_1 - \frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \cdot \underline{Z}_c \underline{I}_1 \\ \underline{Z}_c \underline{I} = -\frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \cdot \underline{U}_1 + \frac{1}{2} \cdot (e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) \cdot \underline{Z}_c \underline{I}_1 \end{cases} \quad (11.21)$$

Wykorzystując funkcje hiperboliczne argumentu γx można zapisać układ równań (11.22).

$$\begin{cases} \underline{U} = \operatorname{ch} \gamma x \cdot \underline{U}_1 - \operatorname{sh} \gamma x \cdot \underline{Z}_c \underline{I}_1 \\ \underline{Z}_c \underline{I} = -\operatorname{sh} \gamma x \cdot \underline{U}_1 + \operatorname{ch} \gamma x \cdot \underline{Z}_c \underline{I}_1 \end{cases} \quad (11.22)$$

W modelu laboratoryjnym linii długiej wykorzystuje się generator o częstotliwości $f=100 \div 200$ MHz. W tym przypadku zachodzą zależności (11.23).

$$\begin{cases} \omega L \gg R \\ \omega C \gg G \end{cases} \quad (11.23)$$

Model można uważać za linie bez strat ($R=0$, $G=0$). Zachodzą wtedy równości (11.24).

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= j\beta = j\omega\sqrt{LC} \\ \underline{Z}_c &= \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Po wprowadzeniu zależności (11.24) do układu równań (11.22) można zapisać układ równań (11.25).

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_1 \cos \beta x - j\sqrt{\frac{L}{C}} \underline{I}_1 \sin \beta x \\ \underline{I} = -j\sqrt{\frac{C}{L}} \underline{U}_1 \sin \beta x + \underline{I}_1 \cos \beta x \end{cases} \quad (11.25)$$

W przypadku pomiaru odległości x od końca linii w równaniach wyjściowych (11.2) i (11.3) znikają znaki minus po lewej stronie, równania drugiego rzędu (11.7) i (11.9) pozostają bez zmian. Rozwiązanie równania (11.9) można zapisać wtedy w postaci (11.26).

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x} \\ \underline{Z}_c \underline{I} = -\underline{A}_1 \cdot e^{-\gamma x} + \underline{A}_2 \cdot e^{\gamma x} \end{cases} \quad (11.26)$$

Przy tym stałe całkowania w zależności od wartości \underline{U}_2 i \underline{I}_2 na końcu linii opisane są równościami (11.27).

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2) \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) \end{aligned} \quad (11.27)$$

Po przekształceniu i wprowadzeniu funkcji hiperbolicznych otrzymuje się układ równań (11.28).

$$\begin{cases} \underline{U} = \operatorname{ch} \gamma x \cdot \underline{U}_2 + \operatorname{sh} \gamma x \cdot \underline{Z}_c \underline{I}_2 \\ \underline{Z}_c \underline{I} = \operatorname{sh} \gamma x \cdot \underline{U}_2 + \operatorname{ch} \gamma x \cdot \underline{Z}_c \underline{I}_2 \end{cases} \quad (11.28)$$

Dla linii długiej bez strat można zapisać układ równań (11.29),

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x + j\sqrt{\frac{L}{C}} \underline{I}_2 \sin \beta x \\ \underline{I} = j\sqrt{\frac{C}{L}} \underline{U}_2 \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x \end{cases} \quad (11.29)$$

który jest odpowiednikiem układu (11.25).

11.1.4. Stan jałowy linii długiej bez strat

W stanie jałowym $I_2=0$. Układ równań (11.29) możemy przekształcić do postaci (11.30).

$$\begin{cases} \underline{U} = U_2 \cos \beta x \\ \underline{I} = j\sqrt{\frac{C}{L}} U_2 \sin \beta x \end{cases} \quad (11.30)$$

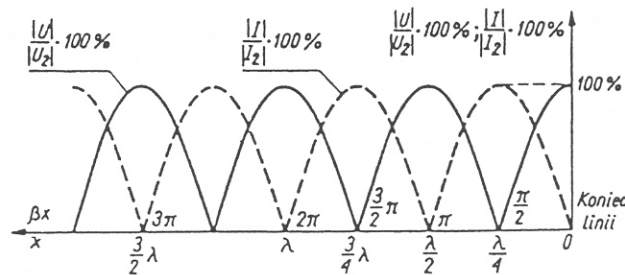
Ponieważ

$$\underline{U}_2 = U_2 e^{j\psi_2} = U_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

dla wartości chwilowych obowiązuje układ równań (11.31).

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} \cdot U_2 \sin(\omega t + \psi_2) \cos \beta x \\ i = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot U_2 \sin(\omega t + \psi_2 + \frac{\pi}{2}) \sin \beta x \end{cases} \quad (11.31)$$

Na podstawie układu (11.31) można stwierdzić, że fala napięciowa i fala prądowa to fale stojące. Na końcu linii ($x=0$) występuje strzałka fali napięciowej i węzeł fali prądowej. Impedancja wejściowa linii ($x=l$) określona jest równaniem (11.32).



Rys. 11.2. Rozkład amplitudy napięcia i prądu w linii długiej bezstratnej w stanie jałowym.

$$\underline{Z}_{we0} = -j\sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{ctg} \beta l \quad (11.32)$$

Charakter impedancji wejściowej zależy od długości linii i zmienia się w sposób opisany w tablicy 11.1.

Tablica 11.1 Charakter linii bezstratnej w stanie jałowym w zależności od długości linii.

Długość linii l / długość fali λ	Charakter impedancji wejściowej
0	obwód rezonansowy LC równoległy
(0,0.25)	C
0.25	obwód rezonansowy LC szeregowy
(0.25,0.5)	L
0.5	obwód rezonansowy LC równoległy
(0.5,0.75)	C
0.75	obwód rezonansowy LC szeregowy
(0.75,1)	L

11.1.5. Stan zwarcia linii długiej bez strat

W stanie zwarcia $\underline{U}_2=0$. Układ równań (11.29) możemy przekształcić do postaci (11.33).

$$\begin{cases} \underline{U} = j\sqrt{\frac{L}{C}} I_2 \sin \beta x \\ \underline{I} = I_2 \cos \beta x \end{cases} \quad (11.33)$$

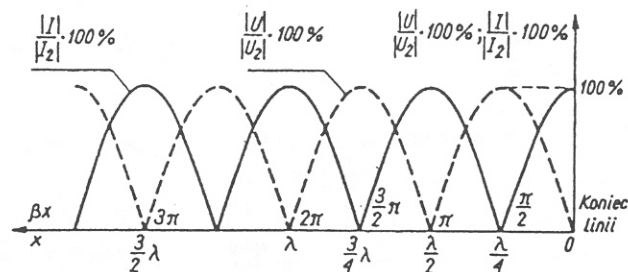
Ponieważ

$$\underline{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2} = I_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

dla wartości chwilowych obowiązuje układ równań (11.34).

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot I_2 \sin(\omega t + \psi_2 + \frac{\pi}{2}) \sin \beta x \\ i = \sqrt{2} \cdot I_2 \sin(\omega t + \psi_2) \cos \beta x \end{cases} \quad (11.34)$$

Na podstawie układu (11.34) można stwierdzić, że fala napięciowa i fala prądowa to fale stojące. Na końcu linii ($x=0$) występuje węzeł fali napięciowej i strzałka fali prądowej. Impedancja wejściowa linii ($x=l$) określona jest równaniem (11.35).



Rys. 11.3 Rozkład amplitudy napięcia i prądu w linii długiej bezstratnej w stanie zwarcia.

$$\underline{Z}_{wcZ} = j\sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{tg}\beta l \quad (11.35)$$

Charakter impedancji wejściowej zależy od długości linii i zmienia się w sposób opisany w tabelicy 11.2.

Tabela 11.2 Charakter linii bezstratnej w stanie zwarcia w zależności od długości linii.

Długość linii l / długość fali λ	Charakter impedancji wejściowej
0	obwód rezonansowy LC szeregowy
(0,0.25)	L
0.25	obwód rezonansowy LC równoległy
(0.25,0.5)	C
0.5	obwód rezonansowy LC szeregowy
(0.5,0.75)	L
0.75	obwód rezonansowy LC równoległy
(0.75,1)	C

Podsumowując wspólne cechy wykresów napięć i prądów w funkcji odległości od końca linii badanej w stanie jałowym i zwarcia można zauważyć:

- zmienność amplitud napięcia i prądu w linii bezstratnej stanowi falę stojącą, w której węzłom fali napięciowej odpowiadają strzałki fali prądowej i odwrotnie,
- zmienność fazy napięcia i prądu jest taka, że faza zmienia się skokiem o kąt π w tych punktach, w których amplituda ma wartość równą zero czyli występuje jej węzeł,
- ekstrema amplitudy napięcia oraz prądu przeplatają się co ćwierć długości fali, ta sama własność odnosi się do węzłów.

11.1.6. Linia długa bez strat obciążona reaktancyjnie

Przy obciążeniu $\underline{Z}_2 = \underline{X}_0 = jX_0$ linii wzór (11.29) przyjmuje postać (11.36).

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta x + j\underline{Z}_c \frac{\underline{U}_2}{jX_0} \sin \beta x \\ \underline{I} = j\frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot \underline{I}_2 \cdot jX_0 \sin \beta x + \underline{I}_2 \cos \beta x \end{cases} \quad (11.36)$$

Po przekształceniu otrzymuje się postać (11.37).

$$\begin{cases} \underline{U} = \frac{\underline{U}_2}{X_0} (X_0 \cos \beta x + \underline{Z}_c \sin \beta x) \\ \underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} \cdot \underline{I}_2 (-X_0 \sin \beta x + \underline{Z}_c \cos \beta x) \end{cases} \quad (11.37)$$

Wiedząc, że impedancja falowa \underline{Z}_c linii bezstratnej ma charakter rzeczywisty można użyć oznaczeń (11.38)

$$\cos \varphi = \frac{Z_c}{\sqrt{Z_c^2 + X_0^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{X_0}{\sqrt{Z_c^2 + X_0^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{X_0}{Z_c} \quad (11.38)$$

i przekształcić wzór (11.37) do postaci (11.39).

$$\begin{cases} \underline{U} = \frac{\underline{U}_2}{\sin \varphi} (\sin \varphi \cos \beta x + \cos \varphi \sin \beta x) \\ \underline{I} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \underline{I}_2 (-\sin \varphi \sin \beta x + \cos \varphi \cos \beta x) \end{cases} \quad (11.39)$$

Korzystając z ogólnych zależności trygonometrycznych można zapisać równanie (11.40).

$$\begin{cases} \underline{U} = \frac{\underline{U}_2}{\sin \varphi} \sin(\beta x + \varphi) \\ \underline{I} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \underline{I}_2 \cos(\beta x + \varphi) \end{cases} \quad (11.40)$$

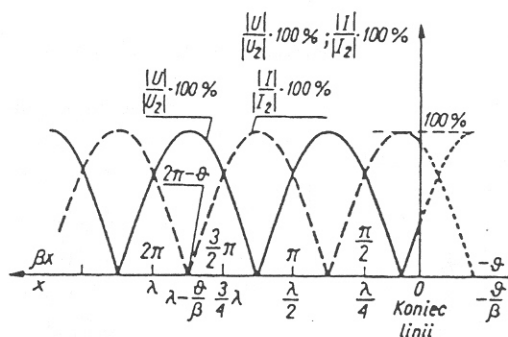
$$\text{gdzie: } \varphi = \arctan\left(\frac{Z_c}{X_0}\right) = \arctan\left(\frac{1}{X_0} \sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

Na podstawie układu (11.40) można stwierdzić, że fala napięciowa i fala prądowa to fale stojące. Strzałki fali napięciowej i węzły fali prądowej występują gdy

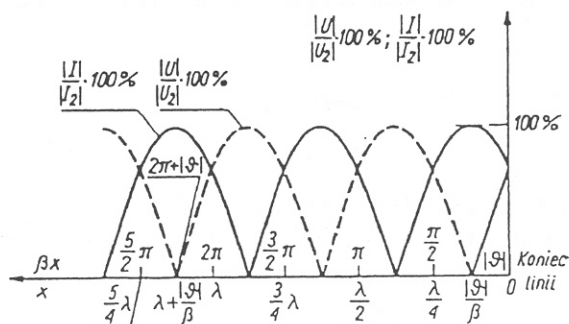
$$\beta x + \varphi = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (11.41)$$

to znaczy gdy odległość x od końca linii wynosi

$$x = \frac{1}{\beta} \cdot \left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} - \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \lambda \quad (11.42)$$



Rys. 11.4 Rozkład amplitudy napięcia i prądu w linii długiej bezstratnej w stanie obciążenia cewką idealną.



Rys. 11.5 Rozkład amplitudy napięcia i prądu w linii długiej bezstratnej w stanie obciążenia kondensatorem idealnym.

11.1.7. Linia długa bez strat obciążona impedancją falową

Przy obciążeniu linii odbiornikiem o impedancji

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_c \quad (11.43)$$

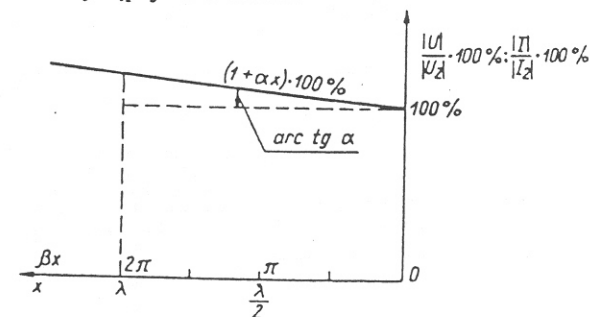
wzór (11.29) przyjmuje postać (11.44).

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x) = \underline{U}_2 e^{j\beta x} \\ \underline{I} = \underline{I}_2 (\cos \beta x + j \sin \beta x) = \underline{I}_2 e^{j\beta x} \end{cases} \quad (11.44)$$

Dla wartości chwilowych obowiązuje układ równań (11.45).

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} \cdot U_2 \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) \\ i = \sqrt{2} \cdot I_2 \sin(\omega t + \beta x + \psi_2) \end{cases} \quad (11.45)$$

Równania (11.45) opisują falę pierwotną tzn. w odróżnieniu od poprzednich stanów w linii nie występuje fala odbita.

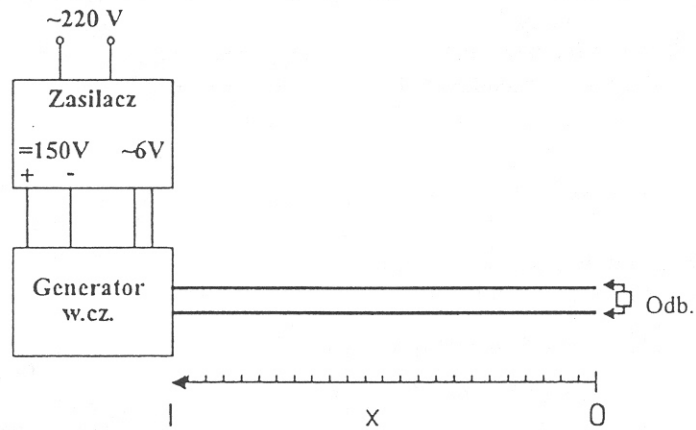


Rys. 11.5 Rozkład amplitudy napięcia i prądu w linii długiej bezstratnej w stanie obciążenia impedancją falową.

11.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

11.2.1. Opis stanowiska pomiarowego

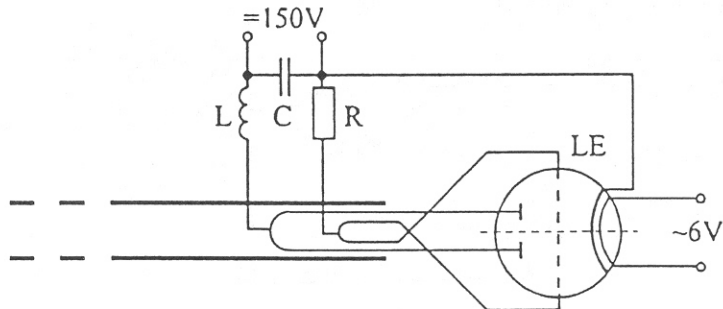
Stanowisko pomiarowe do badania linii długiej składa się modelu linii połączonego z generatorem w.c.z., sieciowego zasilacza wysokiego napięcia i zestawu wskaźników. Schemat stanowiska przedstawiono na rys. 11.6.



Rys. 11.6. Schemat poglądowy stanowiska pomiarowego z zasilaczem.

Przewody linii wykonano z rurek miedzianych o średnicy zewnętrznej $d_z=8$ mm i średnicy wewnętrznej $d_w=5$ mm ułożonych równolegle w odległości $d=20$ mm. Wzdłuż linii umieszczono podziałkę centymetrową służącą do pomiaru odległości od końca linii.

Generator lampowy o schemacie pokazanym na rys. 11.7 wytwarza drgania o częstotliwości $f \approx 180$ MHz. Generator jest sprzężony indukcyjnie z prętami linii.



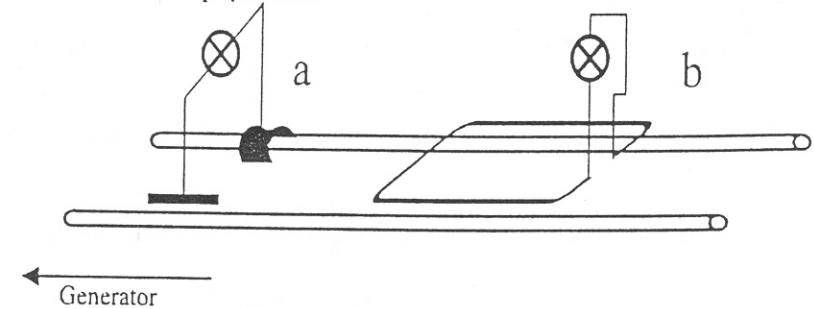
Rys. 11.7. Schemat ideowy generatora lampowego w.cz.

Przyrządy stosowane w czasie ćwiczenia:

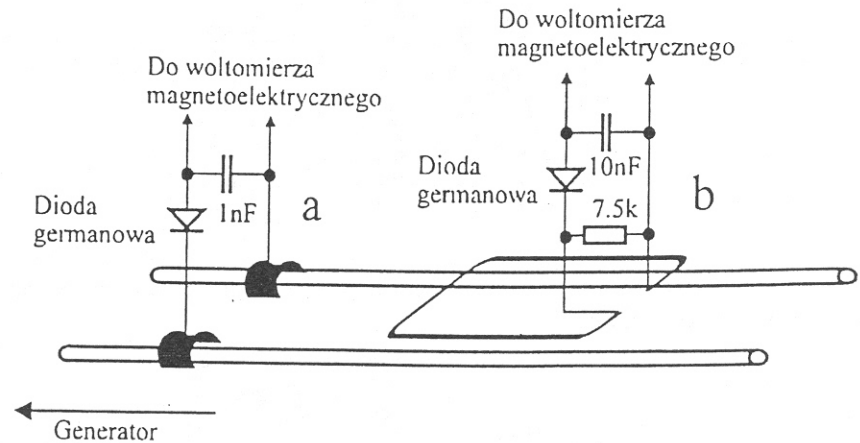
1. Żarówkowy wskaźnik napięcia przedstawiono na rys. 11.8.a. Wskaźnik zasilany jest poprzez sprzężenie pojemnościowe z prętami linii.
2. Żarówkowy wskaźnik prądu przedstawiono na rysunku 11.8.b. Wskaźnik zasilany jest poprzez sprzężenie indukcyjne z prętami linii.
3. Detektor napięcia przedstawiono na rys. 11.9.a. Detektor jest łączony galwanicznie z prętami linii za pomocą styków sprężystych. Detektor współpracuje z woltomierzem magnetoelektrycznym.

4. Detektor prądu przedstawiono na rys. 11.9.b. Detektor jest łączony z pętlą sprzęganą indukcyjnie z prętami linii. Detektor współpracuje z woltomierzem magnetoelektrycznym.

Wskaźniki i detektory umieszczone są w obudowach umożliwiającich przesuwanie wzdłuż prętów linii.



Rys. 11.8 Schematy poglądowe wskaźników żarówkowych.



Rys. 11.9 Schematy poglądowe detektorów.

11.2.2. Obliczenia parametrów modelu linii

Rezystancję jednostkową linii oblicza się ze wzoru (11.46).

$$R = \frac{2}{\gamma_s} \cdot k_d \quad [\Omega/m] \quad (11.46)$$

gdzie: k_d to współczynnik uwzględniający zjawisko naskórkowości (dla przewodu z rurek $k_d \approx 1$).

Jednostkową konduktancję linii przyjmuje się jako $G < 10^{-8}$ S/m.
Jednostkową indukcyjność linii oblicza się ze wzoru (11.47).

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{2d}{d_z} \quad [\text{H/m}] \quad (11.47)$$

Jednostkową pojemność linii oblicza się ze wzoru (11.48).

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{2d}{d_z}} \quad [\text{F/m}] \quad (11.48)$$

Traktując linię długą jako linie bez strat dalsze obliczenia parametrów linii prowadzi się według wzorów (11.49) do (11.51).

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{\omega}{v} \quad \text{lub} \quad \beta = \omega \sqrt{LC} \quad (11.49)$$

gdzie $v = 3 \cdot 10^8$ m/s.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\beta} \quad [\text{m}] \quad (11.50)$$

$$Z_c = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [\Omega] \quad (11.51)$$

11.2.3. Badanie linii długiej w stanie jałowym

Linie zasiloną jak na rys. 11.2 pozostawia się nieobciążoną. Za pomocą wskaźników żarówkowych należy wstępnie sprawdzić położenia strzałek i węzłów fali napięciowej i prądowej. Należy odnotować odległości od końca linii, w których następuje minimum i maksimum jasności świecenia żarówek. Pętlę wskaźnika prądowego należy tak umieszczać aby jej część poprzeczna do prętów linii zwrócona była zawsze w kierunku generatora. Za pomocą detektorów: napięcia a następnie prądu, połączonych z woltomierzem magnetoelektrycznym należy zbadać rozkład wartości względnych napięcia κ_u i prądu κ_i w linii. Wyniki

uzyskane za pomocą wskaźników należy porównać z wynikami otrzymanymi przy użyciu detektorów. W przypadku dużych rozbieżności należy zanalizować przyczyny i powtórzyć błędne pomiary. Wyniki badań należy zanotować w tablicy 11.3.

Tablica 11.3

L.p.	Stan pracy linii:				
	x	κ_u	κ_i	Wskaźniki	
	cm	dz.	dz.	napięcia	prądu

W sprawozdaniu należy wykonać wykresy względnych wartości napięcia κ_u i prądu κ_i w funkcji odległości x .

11.2.4. Badanie linii długiej w stanie zwarcia

Wyjście linii zasilonej jak na rys.11.2 należy zewrzeć. Wszystkie badania wykonuje się jak w p. 11.2.3.

11.2.5. Badanie linii długiej obciążonej pojemnością (reaktancyjnie)

Wyjście linii zasilonej jak na rys.11.2 należy obciążyć za pomocą kondensatora o pojemności C . Wszystkie badania wykonuje się jak w p. 11.2.3.

11.2.6. Badanie linii długiej obciążonej impedancją falową

Wyjście linii zasilonej jak na rys.11.2 należy obciążyć opornikiem o rezystancji $R = Z_c$ obliczonej ze wzoru (11.51). Za pomocą detektorów: napięcia a następnie prądu, połączonych z woltomierzem magnetoelektrycznym należy zbadać rozkład wartości względnych napięcia κ_u i prądu κ_i w linii. Wyniki należy zanotować w tablicy 11.4.

Tablica 11.4

L.p.	R=		
	x	κ_u	κ_i
	cm	-	-

W sprawozdaniu należy wykonać wykresy względnych wartości napięcia κ_u i prądu κ_i w funkcji odległości x .

11.2.7. Badanie linii długiej obciążonej rezystancją $R=2Z_c$

Wyjście linii zasilonej jak na rys.11.2 należy obciążyć opornikiem o rezystancji $R=2Z_c$, gdzie Z_c obliczono ze wzoru (11.51). Wszystkie badania wykonuje się jak w p. 11.2.6.

Model linii zasilany jest z generatora lampowego, dlatego przed rozpoczęciem pomiarów należy odczekać kilka minut w celu nagrzania generatora.

Ćwiczenie 12

MOC PRZY PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

12.1 WIADOMOŚCI OGÓLNE

Przez przebiegi odkształcone napięcia i prądu rozumiemy ich odkształcenie od sinusoidy przy zachowaniu okresowości. Teoria mocy przebiegów odkształconych powstała w latach dwudziastych naszego stulecia, a głównymi jej twórcami byli uczoney rumuński C. Budeanu i polski S. Fryze. Zainteresowanie przebiegami odkształconymi powstało w związku z szerokim stosowaniem pieców łukowych, które są nieliniowymi odbiornikami energii elektrycznej o dużych mocach. W ostatnich latach, w związku z rozpowszechnieniem układów tyrystorowych problemy odkształcenia przebiegów napięcia i prądu w sieciach elektroenergetycznych i w urządzeniach z nich zasilanych stały się bardzo ważne i są przedmiotem zainteresowania ogółu elektryków. Sposoby analizy mocy przy przebiegach odkształconych zaproponowane przez C. Budeanu i S. Fryzego znacznie się różnią i obydwa warianty znajdują swoich zwolenników i przeciwników. W Polsce bardziej rozpowszechnione jest podejście wg C. Budeanu i ten wariant zastosujemy w ćwiczeniu.

12.1.1 Rodzaje mocy przy przebiegach sinusoidalnych

Odbiornik energii elektrycznej możemy odwzorować dwójnikiem pasywnym RL, RC bądź też RLC scharakteryzowanym przez rezystancję R i przy danej częstotliwości wymuszającej przez reaktancję X. Jeżeli na zaciskach dwójnika pasywnego istnieje napięcie

$$u = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (12.1)$$

i płynie pod jego wpływem prąd

$$i = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (12.2)$$

to dwójnik pobiera moc chwilową

$$p = ui = UI[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \quad (12.3)$$

Moc chwilowa ma dwie składowe:

- składową stałą $UI\cos\varphi$;
- składową zmienną $UI\cos(2\omega t - \varphi)$

Składowa stała, która jest wartością średnią z mocy chwilowej stanowi moc czynną:

$$P = \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t - \varphi)] = UI\cos\varphi \quad (12.4)$$

Moc czynna P jest średnią za okres mocy chwilowej i równa jest iloczynowi wartości skutecznych napięcia U i prądu I oraz kosinusa kąta przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem i prądem, zwanego współczynnikiem mocy $\cos\varphi$.

Moc czynną mierzymy w watach (W). Moc czynna jest nieujemna.

Moc pozorna S jest iloczynem wartości skutecznej napięcia U i prądu I

$$S = UI \quad (12.5)$$

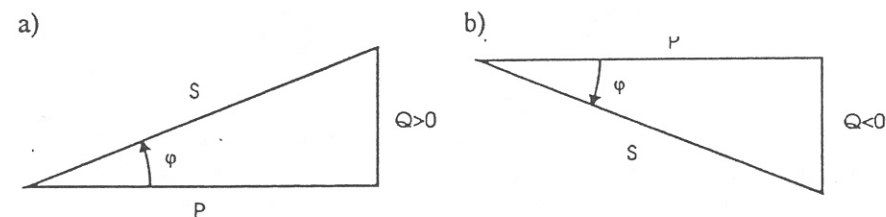
mierzona jest w woltoamperach (IVA) i jest amplitudą mocy chwilowej.

Moc bierna Q jest iloczynem napięcia U , prądu I oraz sinusa kąta przesunięcia fazowego pomiędzy nimi

$$Q = UI\sin\varphi \quad (12.6)$$

Moc bierną mierzymy w warach (Ivar).

Trzy rodzaje mocy, czynną P , bierną Q i pozorną S można zilustrować graficznie tzw. trójkątem mocy.



Rys.12.1. Trójkąty mocy: a) odbiornik o charakterze indukcyjnym, b) odbiornik o charakterze pojemnościowym.

12.1.2 Rodzaje mocy przy przebiegach odkształconych

Niezależnie od charakteru zmienności napięcia u i prądu i oraz dwójnika, jego moc chwilowa p określa równanie (12.3), a moc czynną P równanie (12.4).

Przy przebiegach niesinusoidalnych napięcie u i prąd i są rozwinięciem wykładniczym zespolonych Fouriera tj.

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{U}_k}{2} e^{j\psi_k} e^{jk\omega_1 t} \quad (12.7)$$

$$i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{I}_k}{2} e^{j(\psi\varphi_k)} e^{jk\omega_1 t} \quad (12.8)$$

Moc czynną przy przebiegach odkształconych wyznaczamy z równań (12.3) i (12.4), korzystając z zapisu (12.7) i (12.8) oraz twierdzenia Parsevala:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k \quad (12.9)$$

Z zależności (12.9) wynika, że moc czynną dają tylko harmoniczne napięcia i prądu tych samych rzędów. Całkowita moc czynna jest równa sumie mocy czynnych wszystkich harmonicznych, łącznie z harmoniczną zerową. Iloczyn harmonicznych różnych rzędów nie dają mocy czynnej. Określenie mocy czynnej wg (12.4) i wyrażenie jej równaniem (12.9) nie wzbudza żadnych kontrowersji wśród naukowców zajmujących się tą problematyką.

Moc pozorna podobnie jak przy przebiegach sinusoidalnych definiowana jest jako iloczyn wartości skutecznych napięcia i prądu, określonych przez kwadratowy pierwiastek z sumy wartości skutecznych wszystkich harmonicznych:

$$U_{sk} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \quad (12.10)$$

$$I_{sk} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} \quad (12.11)$$

Moc pozorna

$$S = U_{sk} I_{sk} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{i=0}^{\infty} I_i^2} \quad (12.12)$$

Zastępczy współczynnik mocy określony jest podobnie jak dla przebiegów sinusoidalnych

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (12.13)$$

Stąd moc czynną można wyrazić:

$$P = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi \quad (12.14)$$

Definiowanie mocy pozornej jest jednakowe w obydwu wariantach, natomiast definicja mocy bierniej wg Budeanu i Fryzego jest inna.

W ćwiczeniu wykorzystamy wariant Budeanu.

Moc bierna i moc odkształcenia według C. Budeanu

C. Budeanu zaproponował w 1927 roku aby moc bierną przy przebiegach odkształconych określić analogicznie jak moc czynną tj.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k \quad (12.15)$$

Tak określona moc bierna Q i moc czynna P nie dają mocy pozornej S poza przypadkiem obciążenia czysto rezystancyjnego. Można to zapisać nierównością:

$$P^2 + Q^2 \leq S^2 \quad (12.16)$$

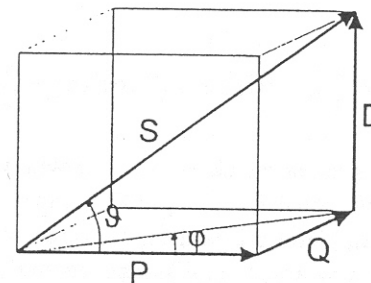
Harmoniczne występujące tylko w prądzie bądź tylko w napięciu nie wpływają na wartość mocy czynnej P ani mocy bierniej Q , natomiast są uwzględnione w mocy pozornej S . Dla przebiegów odkształconych wprowadza się drugi rodzaj mocy bierniej zwany mocą odkształcenia lub też mocą deformacji oznaczony literą T lub D . Zależność (12.16) przyjmuje postać:

$$P^2 + Q^2 = S^2 - D^2 \quad (12.17)$$

a moc odkształcenia można formalnie określić jako:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad (12.18)$$

W interpretacji graficznej zależności (12.18) będzie odpowiadać prostopadłościan mocy (rys.12.2).



Rys.12.2. Prostopadłościan mocy przy przebiegach odkształconych.

Moc odkształcona nie ma interpretacji fizycznej.

Moc bierna według S. Fryzego

Stanisław Fryze, profesor Politechniki Lwowskiej, zaproponował w 1931r., aby przy przebiegach odkształconych podobnie jak w przebiegach sinusoidalnych wyróżniać tylko trzy rodzaje mocy tj. czynną, bierną i pozorną. Moc czynna i pozorna jest tak zdefiniowana jak w wariacie Budeanu natomiast w mocy bierniej Q_F zawarta jest również moc deformacji

$$S^2 = P^2 + Q_F^2 \quad (12.19)$$

Według tej koncepcji wartość chwilowa odkształconego prądu i rozkłada się na dwie składowe:

- składową i_p prądu, która ma taki kształt jak napięcie u ,

- składową i_q prądu, która jest ortogonalna do napięcia, a więc stanowi składową bierną prądu względem napięcia u .

Składową i_p proporcjonalną do napięcia u możemy wyznaczyć z zależności:

$$i_p = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T u i dt}{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} u = \frac{I_{sk} \cos \varphi}{U_{sk}} u \quad (12.20)$$

a składową ortogonalną prądu i_q

$$i_q = i - i_p \quad (12.21)$$

Takiemu rozkładowi wartości chwilowych odpowiada rozkład wartości skutecznych

$$I_{psk}^2 + I_{qsk}^2 = I_{sk}^2 \quad (12.22)$$

a pomnożenie przez kwadrat wartości skutecznej napięcia daje rozkład mocy:

$$U_{sk}^2 I_{psk}^2 + U_{sk}^2 I_{qsk}^2 = U_{sk}^2 I_{sk}^2 \quad (12.23)$$

czyli

$$P^2 + Q_F^2 = S^2 \quad (12.24)$$

Moc bierną Q_F możemy wyznaczyć z zależności:

$$Q_F = U_{sk} I_{sk} \cos \varphi \quad (12.25)$$

gdzie $\cos \varphi$ jest zastępczym współczynnikiem mocy określonym zależnością (12.13).

Definicja mocy biernej wg Fryzego ma wielu zwolenników, jednak w Polsce powszechnie przyjęte jest podejście Budeanu i w wykonaniu ćwiczenia korzystać będziemy z tego wariantu.

12.1.3. Wyższe harmoniczne w układach 3-fazowych

W trójfazowej sieci elektroenergetycznej, którą najczęściej przyjmujemy jako źródło energii elektrycznej, sinusoidalny kształt napięcia jest zagwarantowany normą określającą jakość dostarczonej energii w tym dopuszczalne odkształcenie przebiegów sinusoidalnych. Przy zasilaniu z sieci o napięciu sinusoidalnym odbiorników nieliniowych, przebiegi prądu i napięcia w takich odbiornikach są odkształcone. W praktyce najczęściej są to przebiegi antysymetryczne i w rozkładzie na szereg Fouriera występują harmoniczne nieparzyste.

Jeżeli do symetrycznej sieci trójfazowej o napięciu sinusoidalnym przyłączymy połączony w gwiazdę symetryczny odbiornik nieliniowy, np. trzy jednakowe dławiki z rdzeniem stalowym, to prądy i napięcia fazowe odbiornika będą odkształcone. W prądach nie występują harmoniczne rzędu 3 i ich wielokrotności, ponieważ są jednakowo fazowe i przy braku przewodu zerowego nie mogą się zamknąć.

Ich wartość skuteczna

$$I_{sk} = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + \dots} \quad (12.26)$$

W napięciu fazowym wystąpią wszystkie nieparzyste harmoniczne,

$$U_{fsk} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots} \quad (12.27)$$

natomiast w napięciach przewodowych nie występują harmoniczne podzielne przez trzy

$$U_{psk} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \dots} \quad (12.28)$$

Wynika stąd, że w trójfazowych układach symetrycznych o przebiegach odkształconych

$$U_{psk} \ll \sqrt{3} U_{fsk} \quad (12.29)$$

W układach z elementami ferromagnetycznymi dominującą ważną harmoniczną jest trzecia (około 20% pierwszej) natomiast piąta i wyższe nie przekraczają 5%. Pomiedzy punktem zerowym sieci 0 i punktem neutralnym gwiazdy odbiornika wystąpi napięcie U_{ON} , które jest trzecią harmoniczną.

W układzie gwiazdowym bez przewodu zerowego są silnie odkształcone tylko napięcia fazowe, natomiast napięcia przewodowe i prądy nie zawierające trzeciej harmonicznej są znacznie mniej odkształcone i często można je przyjąć jako sinusoidalne.

Jeżeli punkty neutralne sieci i odbiornika połączyć przewodem zerowym popłynie w nich prąd zawierający harmoniczne trzecie i ich wielokrotności

$$I_{Nsk} = 3\sqrt{I_3^2 + I_9^2 + \dots} \quad (12.30)$$

a prądy w przewodach fazowych są odkształcone również trzecią harmoniczną

$$I_{fsk} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + \dots} \quad (12.31)$$

Przy połączeniu odbiornika w trójkąt w prądach fazowych wystąpią wszystkie harmoniczne

$$I_{fsk} = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_9^2 + \dots} \quad (12.32)$$

natomiast w prądach przewodowych nie wystąpią trzecie harmoniczne

$$I_{psk} = \sqrt{3}\sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots} \quad (12.33)$$

i będzie

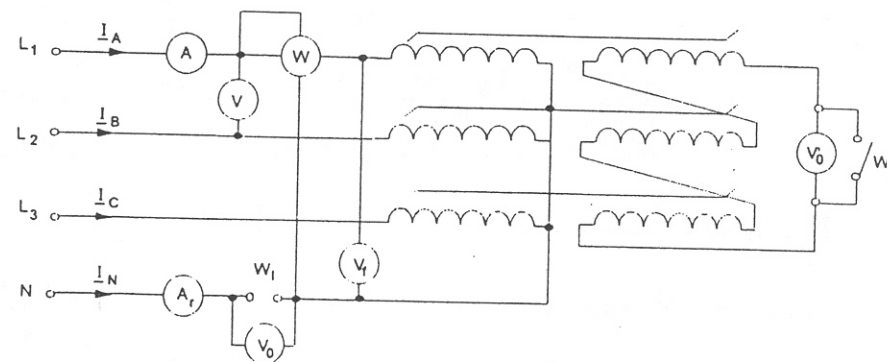
$$I_{psk} < \sqrt{3}I_{psk} \quad (12.34)$$

Trzecie harmoniczne prądu zamkną się wewnątrz trójkąta.

12.2. WYKONANIE ĆWICZENIA

Pomiary mocy przy przebiegach odkształconych wykonamy w układzie trójfazowym złożonym z trzech jednofazowych transformatorów o znacznym nasyceniu rdzeni, połączonych po stronie pierwotnej w gwiazdę a po stronie wtórnej w otwarty trójkąt. Układ taki stanowi magnetyczny potrajacz częstotliwości.

Ćwiczenie wykonamy przy założeniu że odkształcenie wprowadza tylko trzecia harmoniczna, natomiast odkształcenia harmonicznych rzędu 5 i wyższe są pomijalnie małe. Pomiary wykonujemy w układzie jak na rys. 12.3 i notujemy w tabelicy 12.1.



Rys.12.3. Układ połączeń

Tablica 12.1

Lp.	Łącznik	U _f	U	U ₀	I ₁	I ₀	P _w	P	S	S'	Q	D	cosφ
		V	V	V	A	A	W	W	VA	VA	Var	Var	-
1.	W1-otw. W2-otw.												
2.	W1-zamk. W2-otw.												
3.	W1-otw. W2-zamk.												

Zasilając układ z sieci 3 fazowej dokonujemy pomiarów wielkości U_f , U , U_0 , I_1 , I_0 , P_w , oraz obliczamy wartości pozostałych wielkości ujętych w tabelicy z zależności podanych w wiadomościach ogólnych ćwiczenia.

Moc czynna układu

$$P = 3P_w$$

Moc pozorna układu przy odkształconym przebiegu

$$S = 3U_f I_f$$

Moc pozorna przy przebiegach sinusoidalnych

$$S = \sqrt{3}U_p I$$

Moc odkształcenia

$$D = \sqrt{S^2 - S'^2}$$

Moc bierna

$$Q = \sqrt{S'^2 - P^2}$$

Współczynnik mocy

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$

Pomiary i obliczenia należy wykonać dla trzech różnych wartości napięć. Porównać pomiary w układzie bez przewodu zerowego i z przewodem zerowym. Narysować w skali prostopadłościan mocy dla jednej wartości napięcia zasilającego.

Ćwiczenie 13

SYNTEZA DWÓJNIKÓW PASYWNYCH

13.1 WIADOMOŚCI OGÓLNE

13.1.1. Wstęp

Problem syntezy dwójnika liniowego pasywnego polega na wyznaczeniu modelu strukturalnego, łącznie z wartościami elementów, odpowiadającego zadanej funkcji $F(s)$. O ile w zagadnieniu analizy danemu dwójnikowi można przyporządkować tylko jedną funkcję immitancji $Z(s)$ lub $Y(s)$, to w zagadnieniu syntezy danej funkcji immitancji odpowiada szereg różnych modeli.

Aby dana funkcja $F(s)$ mogła być realizowana w sensie modelu fizycznego, musi być ona funkcją wymierną rzeczywistą dodatnią. Niech funkcja $F(s)$, zwana też immitancją lub funkcją przejścia, dana będzie w postaci ilorazu dwóch funkcji rzeczywistych wymiernych o współczynnikach a_k i b_k dodatnich

$$F(s) = \frac{N(s)}{M(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (13.1)$$

Funkcja ta jest wymierną rzeczywistą dodatnią i może być zrealizowana przez model fizyczny gdy spełnia następujące warunki:

1. Wszystkie współczynniki wielomianów są rzeczywiste i dodatnie
2. Bieguny i zera leżą w lewej półpłaszczyźnie lub na osi urojonej a residua w tych biegunach są dodatnie
3. Bieguny i zera leżące na osi urojonej są pojedyncze łącznie z punktem $s=\infty$, a residua w tych biegunach są dodatnie
4. Stopień licznika i mianownika różnią się co najwyżej o jeden
5. Część rzeczywista na osi urojonej spełnia warunek $\operatorname{Re} F(j\omega) \geq 0$

Warunki te nie uwzględniają możliwości technicznych realizowania układów RLC ze względu na ograniczoną wartość tych elementów.

Jest szereg metod pozwalających na realizację funkcji $F(s)$ spełniających warunki funkcji wymiernej rzeczywistej dodatniej. Wszystkie metody polegają na rozkładzie wielomianów określających daną funkcję i z jego postaci wyciągnięcia wniosków o strukturze odpowiadającego jej modelu.

W przypadku syntezy dwójników liniowych pasywnych istnieją dwie podstawowe metody syntezy:

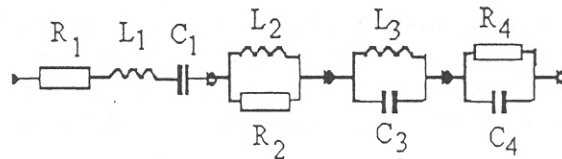
a) metoda Fostera, polegająca na kolejnym wydzielaniu biegunów i zer oraz rozkładzie danej immitancji na ułamki proste i przyporządkowaniu tym ułamkom elementarnych obwodów RL, RC, LC oraz RLC,

b) metoda Cauera, bazująca na rozwinięciu zadanej immitancji w ułamek łańcuchowy i w konsekwencji przyporządkowaniu mu układu drabinkowego elementów.

Metody te nazywamy kanonicznymi.

13.1.2. Metoda Fostera

Mając dane bieguny immitancji rozkładamy $Z(s)$ na ułamki proste i poszczególnym składnikom otrzymanej sumy przyporządkowujemy odpowiednie elementy R, L, C lub ich połączenia



Rys.13.1. Przykład realizacji impedancji $Z(s)$.

Impedancja połączenia z rys.13.1 ma postać:

$$Z(s) = R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC_1} + \frac{R_2 s}{s + \frac{L_2}{R_2}} + \frac{\frac{1}{C_3} s}{s^2 + \frac{1}{L_3 C_3}} + \frac{\frac{1}{C_4}}{s + \frac{1}{R_4 C_4}} \quad (13.2)$$

co odpowiada ogólnej postaci wyrażenia:

$$Z(s) = k_1 + k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \frac{k_2 s}{s + \delta_2} + \frac{2k_3 s}{s^2 + \omega_3^2} + \frac{k_4}{s + \delta_4} \quad (13.3)$$

Z porównania współczynników stojących przy odpowiadających sobie wyrazach zależności 1 i 2 można obliczyć wartości elementów R, L i C. A zatem, głównym problemem w syntezie metodą Fostera staje się znalezienie biegunów immitancji i jej rozkład na ułamki proste. Współczynniki k występujące w tym rozkładzie obliczamy korzystając z metody residuów

$$k_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{Z(s)}{s} \right] - \text{odpowiadający indukcyjności } L = k_\infty$$

$$k_0 = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot Z(s)] - \text{odpowiadający pojemności } C_0 = \frac{1}{k_0}$$

$$2k_k = \lim_{s \rightarrow j\omega_k} \left[Z(s) \cdot \frac{s^2 + \omega_k^2}{s} \right] - \text{odpowiadający indukcyjności i pojemności}$$

(obwód LC z rys.13.1)

$$k_i = \lim_{s \rightarrow \delta_i} \left[\frac{Z(s)}{s} \cdot (s - \delta_i) \right] - \text{odpowiadający obwodowi RL}$$

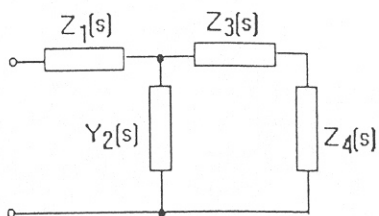
$$k_j = \lim_{s \rightarrow \delta_j} [Z(s) \cdot (s - \delta_j)] - \text{odpowiadający obwodowi RC}$$

W przypadku syntezy immitancji $Z(s)$ wydziela się kolejno bieguny w nieskończoności i zerze (jeśli istnieją), a następnie od funkcji $Z(s)$ odejmuje się wydzieloną funkcję $Z_1(s)$

$$Z(s) - Z_1(s) = Z^1(s),$$

otrzymując nową funkcję $Z^1(s)$ o obniżonym stopniu. Po wyodrębnieniu $Z_1(s)$, poszukuje się nadal biegunów i zer funkcji $Z^1(s)$. Jeżeli znamy zero tej nowej funkcji, to wygodniej jest realizować nie $Z_2(s)$ lecz $Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)}$, dla której

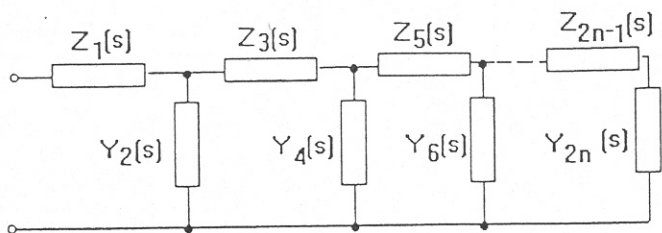
zera impedancji są biegunami. Wyodrębniamy bieguny admitancji $Y^1(s)$, a w schemacie Fostera dochodzi gałąź poprzeczna złożona z odpowiadających im elementów. Obniżając w ten sposób każdorazowo stopień wielomianu dochodzimy do wyrażenia, które odpowiada bezpośrednio jednemu ze znanych połączeń RL, RC lub LC. Przykładowo, na rys.13.2 przedstawiono schemat realizujący zadaną funkcję $Z(s)$, w której wydzielono $Z_1(s)$, $Y_2(s)$, $Z_3(s)$ oraz $Z_4(s)$.



Rys.13.2. Schemat realizujący zadaną funkcję \$Z(s)\$.

13.1.3. Metoda Cauera

Metoda polega na realizacji zadanej funkcji \$Z(s)\$ lub \$Y(s)\$ przez układ drabinkowy, którego elementy uzyskujemy z dzielenia wielomianów określających \$Z(s)\$ metodą ułamka łańcuchowego.



Rys.13.3. Układ drabinkowy realizacji funkcji immitancji metodą Cauera.

Układ z rys.13.3 można opisać ułamkiem łańcuchowym o postaci:

$$Z(s) = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{\dots Y_{2n}}}}}} \quad (13.4)$$

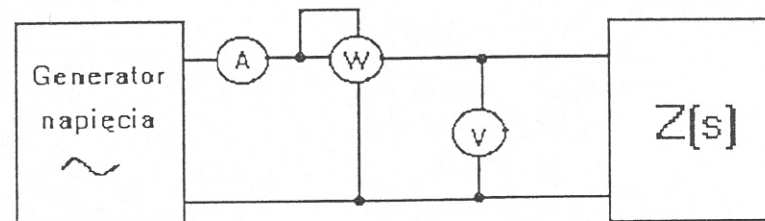
Metoda ta wydaje się być bardzo dobra, gdyż unikamy tu podstawowej trudności metody Fostera, t.j. wyszukiwania biegunów i zer immitancji. Tak jest w istocie, ale tylko w przypadku, gdy impedancje \$Z\$ i admittance \$Y\$ występujące w ułamku łańcuchowym (13.4) przedstawiają sobą idealne elementy \$R, L\$ lub \$C\$. Jeżeli impedancje \$Z_{2n-1}\$ i \$Y_{2n}\$ przedstawiają elementy \$RL, RC\$ lub \$LC\$ to przedstawienie \$Z(s)\$ przez układ drabinkowy metodą Cauera wymaga wielokrotnych prób.

13.2 WYKONANIE ĆWICZENIA

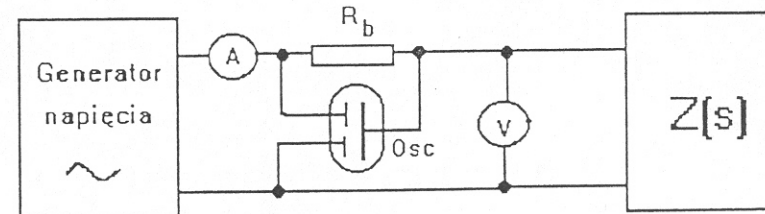
1. Dla zadanej przez prowadzącego ćwiczenie immitancji \$Z(s)\$ dokonać syntezy dwójnika w oparciu o elementy pasywne \$R, L, C\$ stosując metodę Cauera i Fostera z wykorzystaniem programu komputerowego synteza.pas. Wyniki obliczeń w postaci charakterystyk amplitudowych i fazowych zamieścić w sprawozdaniu.

2. Zbudować zadany dwójnik i wyznaczyć charakterystyki amplitudowe i fazowe \$Z(j\omega) = f_1(\omega)\$ \$\arg Z(j\omega) = f_2(\omega)\$ przy stałej amplitudzie napięcia zasilającego i zmiennej częstotliwości \$f\$. Charakterystyki wyznaczyć w układzie pomiarowym z rys.13.4.a) lub b).

a)



b)



Rys.13. 4 Układy do pomiaru charakterystyk amplitudowych i fazowych dwójnika pasywnego

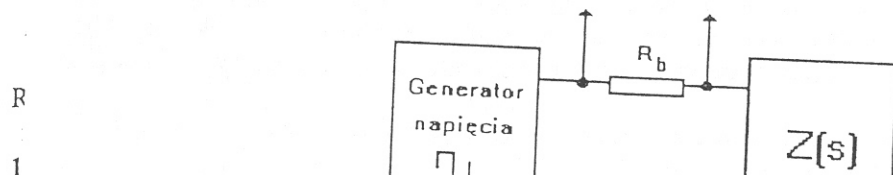
Układ pomiarowy z rysunku 13.4.b) pozwala na bezpośrednie odczytanie kąta fazowego immitancji z oscyloskopu. Wyniki pomiarów zamieścić w Tabelicy 13.1.

Tabelica 13.1

\$I_p\$	\$f\$	\$U\$	\$I\$	\$\varphi\$	\$ Z \$	\$\varphi_{teoret}\$	\$ Z \$
-	Hz	V	A	-	\$\Omega\$	-	\$\Omega\$
1							
2							
3							
...							

3. Dla zbudowanego dwójnika pasywnego zbadać jego odpowiedź w postaci prądu na wejściu na skok jednostkowy napięcia wejściowego w układzie pomiarowym z rys.13.5.

Naszycować zaobserwowane na oscyloskopie przebiegi.



Rys.13.5 Układ pomiarowy do badania odpowiedzi skokowej dwójnika.

W sprawozdaniu należy:

- przedstawić na jednym wykresie charakterystyki amplitudowo- fazowe badanego dwójnika zmierzone i obliczone
- wykreślić odpowiedź dwójnika na skok jednostkowy i porównać z przebiegiem teoretycznym.

LITERATURA

- [1]. Bolkowski St.: Elektrotechnika Teoretyczna. Teoria obwodów elektrycznych, Tom I, WNT Warszawa 1986,
- [2]. Kurzawa St.: Liniowe obwody elektryczne, PWN Warszawa 1974,
- [3]. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika Teoretyczna. Analiza i synteza elektrycznych obwodów liniowych, PWN Warszawa 1984,
- [4]. G.J.Atabiekow: Nieliniowe obwody elektryczne, WNT, W-wa 1965
- [5]. T.Cholewicki: Elektrotechnika teoretyczna, tom II, WNT W-wa 1972
- [6]. M.Krakowski: Elektrotechnika teoretyczna, tom I, Obwody liniowe i nieliniowe, - PWN W-wa 1980
- [7]. R.Kurdziel: Podstawy elektrotechniki, WNT 1972
- [8]. T. Janowski: Magnetyczne potrajace częstotliwości - Wyd. PI.Lub. 1990