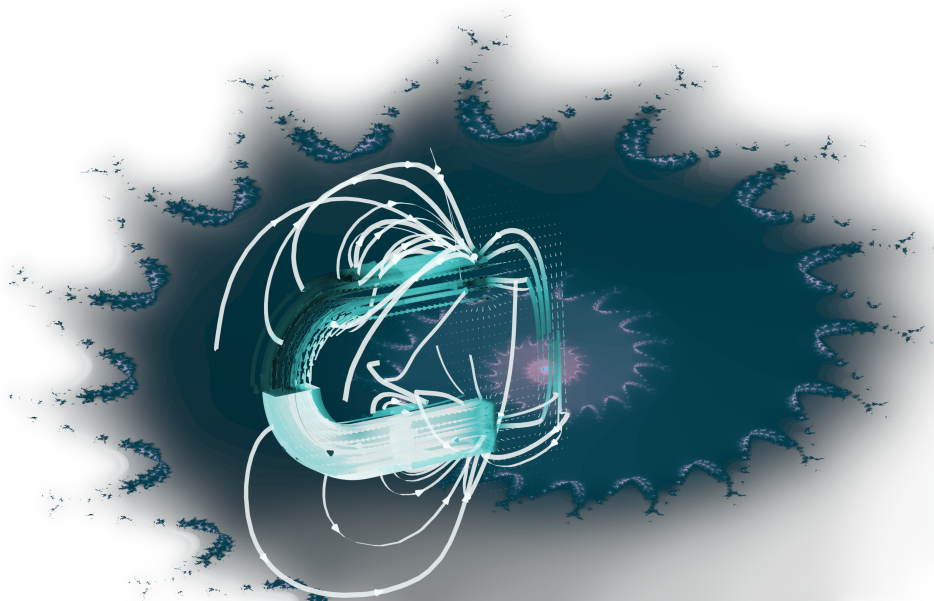


Laboratorium Teorii Pola Elektromagnetycznego

Ćwiczenie C-1

Instrukcja do wykonania ćwiczenia laboratoryjnego



Podstawy działań na wektorach

Rozdział 1

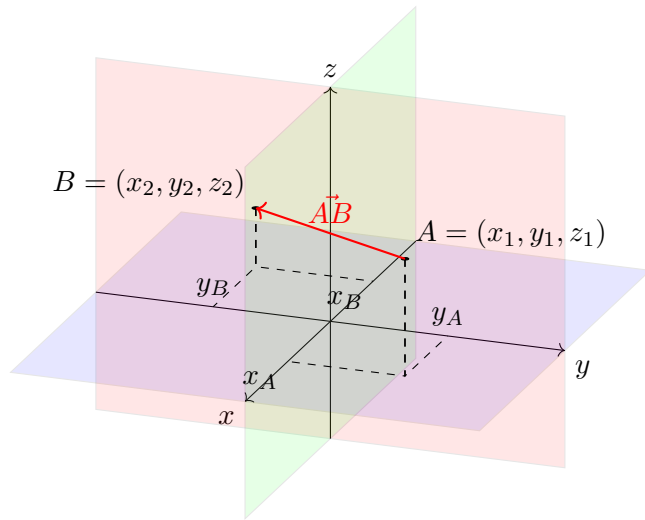
Wektory i operatory wektorowe

1.1 Pojęcie wektora

W matematyce niezwykle ważnym pojęciem jest liczba. Jest ona abstrakcyjnym pojęciem matematycznym, które służy do wyrażania ilości, wielkości, jest wyrażeniem miary. Z punktu widzenia przestrzennego liczba może być definiowana w kontekście wartości, która reprezentuje cechę geometrii lub układu. W dotychczasowych określeniach liczbą można było określić:

- punkt na osi liczbowej i liczba jest postrzegana jako odległość od początku osi liczbowej,
- odległości między punktami w przestrzeni,
- wymiar lub wymiary obiektu w odniesieniu do tej samej jednostki,
- w przestrzeni wielowymiarowej, liczba może być interpretowana jako pojedyncza współrzędna punktu, a w odniesieniu do uporządkowanej krotki jako współrzędne punktu.

W matematyce, ściśle powiązany z liczbą a jednocześnie odmiennym abstraktem jest wektor. Określa on wielkość, którą charakteryzuje zarówno moduł (wartość) jak i kierunek, ale nie ma określonego położenia. W fizyce przykładami takich wielkości są prędkość siła, przyspieszenie, itd. W swojej aktualnej postaci wektory pojawiły się pod koniec XIX wieku, kiedy Josiah Willard Gibbs [?] i Oliver Heaviside [?] opublikowali swoje niezależnie prace dotyczące analizy wektorów. Posłużyły im do wyrażenia



Rys. 1.1 Układ współrzędnych trójwymiarowy z naniesionymi punktami A i B oraz wektorem $\vec{AB}$

nowych praw elektromagnetyzmu, odkrytych przez szkockiego fizyka Jamesa Clerka Maxwella. Od tego czasu wektory stały się niezbędne w fizyce, mechanice, elektrotechnice i innych naukach do matematycznego opisu pól wektorowych.

Koncepcja abstrakcyjnej przestrzeni wektorowej jest zdefiniowana za pomocą zestawu postulatów. Zawiera ona znane pojęcia wektorów prędkości, pędu, siły jako przypadków szczególnych. Zaczynając od wprowadzenia notacji wektorowej warto wprowadzić dwie notacje: diadyczną oraz notację stosowaną we współczesnej fizyce - wektory Diraca lub po prostu "ket". Wprowadzone przez Paula A.M. Diraca (1902–1984) w pierwszym wydaniu jego monografii z teorii kwantowej [?].

W fizyce kwantowej powszechnie stosowaną metodą jest notacja bra-ket: $|\psi\rangle$. Służy do opisu stanów kwantowych oraz operacji na nich w przestrzeni Hilberta. Podstawowa postać wektora w notacji ket definiuje zależność (1.2), w której $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ są współczynnikami rozwoju stanu kwantowego $|\psi\rangle$ w bazie przestrzeni Hilberta.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Przestrzeń Hilberta to abstrakcyjna struktura, która stanowi podstawowy fundament dla opisu wielu teorii w fizyce oraz matematyce. Jest to przestrzeń wektorowa wyposażona w iloczyn skalarny, który spełnia warunki, zupełności i przeliczalności bazy ortonormalnej. Jest ona rozszerzeniem przestrzeni euklidesowej na nieskończenie wymiarowy kontekst, który umożliwia opisywanie funkcji falowych, oraz różnych obiektów matematycznych używanych w teorii operatorów liniowych.

Analiza wektorowa i rachunek wektorowy, którego używa się w klasycznej teorii pola, zachowują postać diadyczną wektorów. Dla oznaczonego wektora $\vec{a}$ w przestrzeni trójwymiarowej z bazą $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, można go zapisać w postaci diadycznej jako (1.2), gdzie:

- a_x, a_y, a_z to składowe wektora $\vec{v}$,
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ to wektory bazowe w przestrzeni trójwymiarowej,
- $\otimes$ oznacza iloczyn wektorowy.

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \otimes \vec{i} + a_y \vec{j} \otimes \vec{j} + a_z \vec{k} \otimes \vec{k} \quad (1.2)$$

Wektory można przedstawić graficznie jako skierowane odcinki linii zakończone grotem strzałki (rys. 1.1), których długości są liczbowo równe ich modułom. Wektory są zwykle oznaczane symbolem pogrubionym np. $\mathbf{a}$ lub symbolem ze strzałką $\vec{a}$. Moduł wektora, często nazywany jego wartością jest oznaczany przez a lub $|\vec{a}|$, które reprezentują wielkość jednowymiarową (taką jak zwykła liczba) znaną jako skalar.

Zarówno interpretacja geometryczna jak i rozważania dotyczące własności wektora, klasyfikują go jako element przestrzeni wielowymiarowej $\mathbb{R}^n$. Oznacza to, że podobnie, jak w przypadku punktu do jego identyfikacji stosowane są współrzędne.

Na rysunku (1.1) przedstawiono dwa punkty: $A=(a_x, a_y, a_z)$ oraz $B=(b_x, b_y, b_z)$.

Def. 1.1.1

WEKTOR w ujęciu geometrycznym w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywa się uporządkowaną parą punktów z których pierwszy punkt jest początkiem a drugi punkt końcem tego wektora.

Zdefiniowanie wektora jako fenomenu geometrycznego skutkuje określeniem jego własności. Współrzędne definiowane są jako różnica współrzędnych punktu końcowego oraz współrzędnych punktu początkowego (1.3).

$$\vec{u} = \vec{AB} = [b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z] = [u_x, u_y, u_z] \quad (1.3)$$

Przyjęta definicja (def. 1.1.1) oraz zdefiniowanie współrzędnych (1.3) pozwala na umieszczenie wektora w abstrakcyjnej strukturze, w przestrzeni afinicznej uogólniającej własności przestrzeni euklidesowych, które są niezależne od pojęć odległości i kąta. W rozumieniu ogólnym przestrzeni $\mathbb{R}^n$, niech $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ będzie n -wymiarową afiniczną przestrzenią liniową nad polem $\mathbb{R}$ ze zdefiniowanymi działaniami iloczynu oraz sumy i bazą wersorów $\{e_\alpha\}$ przestrzeni $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$.

Def. 1.1.2

WEKTOR $\vec{v}$ o współrzędnych $\{x_\alpha\}$ opisany w przestrzeni z bazą $\{e_\alpha\}$ jest produktem iloczynu $\vec{v} = \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \vec{e}_\alpha$, gdzie $\bigvee_{\alpha \in \mathbb{N}} |\vec{e}_\alpha| = 1$, reprezentowanym przez macierz współrzędnych X .

Macierze współrzędnych wektorów będą reprezentowane jako macierze rzędowe, jednowierszowe, a macierze wersorów jako macierze jednokolumnowe (1.4).

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Jeśli mamy dwa punkty A i B w przestrzeni, to wektor $\vec{AB}$ może być zdefiniowany jako różnica wektorowa pomiędzy współrzędnymi tych punktów:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Generalnie pierwsze pojęcie wektora ma przedstawia jego charakter geome-

tryczny w postaci odcinka skierowanego, zakończonego grotem. Ten typ wektora, jeśli został właściwie zdefiniowany, jest szczególnym przykładem ogólniejszego pojęcia. Jednak ogólna koncepcja wektora jest czysto algebraiczna. Definicja podana dla wektora jest taka, że należy on do zbioru spełniającego zadane reguły algebraiczne.

Def. 1.1.3

Zbiór $\vec{V}$ opisany w polu $\mathbb{R}^n$ z bazą $\{e_\alpha\}$ jest przestrzenią wektorową gdy spełnia następujące kryteria:

- (1) istnieje operator definiujący działanie sumy oznaczony jako $\oplus$, który dla każdego $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{V}$:
 - a) jest łączny: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, dla każdego $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \vec{V}$
 - b) jest przemienny: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
 - c) istnieje element $\vec{0} \in \vec{V}$ taki, który $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$,
 - d) dla każdego elementu $\vec{u} \in \vec{V}$ istnieje element $-\vec{u} \in \vec{V}$ taki, który $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
- (2) istnieje operator mnożenia przez skalar (skalowania), w której każdą wartość skalarną $\lambda \in \mathbb{R}$ można połączyć z każdym elementem aby otrzymać element taki, że

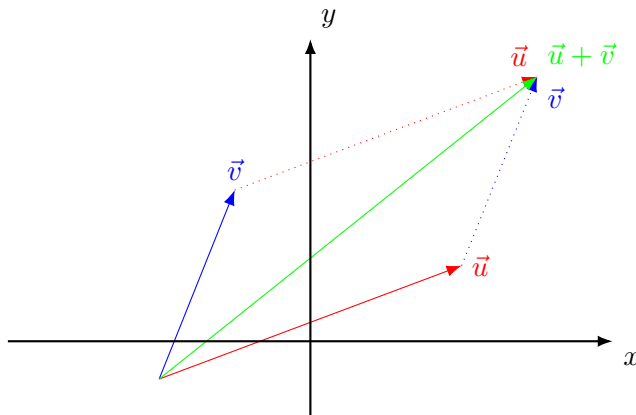
Dla przestrzeni wektorów, zdefiniowanych zarówno definicją (def. 1.1.1) oraz definicją (def. 1.1.2), określono działania sumy, iloczynu oraz skalowania. Mnożenie wektora przez liczbę skalarną zmienia moduł wektora, ale nie jego kierunek, z wyjątkiem tego, że mnożenie przez liczbę ujemną zmienia zwrot.

1.2 Działania na wektorach

Dodawanie wektorów:

Dla dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, zdefiniowanych w przestrzeni z bazą $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, sumą jest działanie zdefiniowane równaniem (1.6)

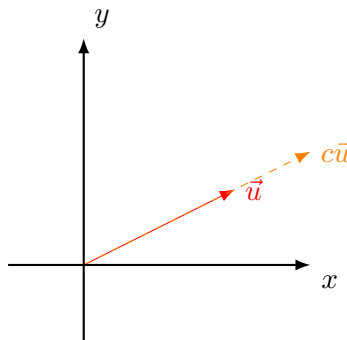
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_i \vec{i} + u_j \vec{j} + u_k \vec{k}) + (v_i \vec{i} + v_j \vec{j} + v_k \vec{k}) = (u_i + v_i) \vec{i} + (u_j + v_j) \vec{j} + (u_k + v_k) \vec{k} \quad (1.6)$$



Rys. 1.2 Ilustracja sumowania dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz ich sumy $\vec{u} + \vec{v}$.

Dodawanie wektorów jest działaniem dodawania odpowiednio każdej składowej wektorów składowych. W rezultacie otrzymujemy nowy wektor, który ma składowe równoległe do składowych wektorów pierwotnych (1.2).

Mnożenie wektora przez skalar:



Rys. 1.3 Ilustracja skalowania wektora $\vec{u}$ do wektora przeskalowanego $c\vec{u}$.

Jeśli zdefiniujemy wektor $\vec{u}$ w bazie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oraz skalar c , to wynik mnożenia wektora przez skalar prezentuje równanie (1.7)

$$c\vec{u} = c(u_i\vec{i} + u_j\vec{j} + u_k\vec{k}) = (cu_i)\vec{i} + (cu_j)\vec{j} + (cu_k)\vec{k} \quad (1.7)$$

Iloczyn skalarny:

Iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w bazie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jest zdefiniowany równaniem (1.8), które w konsekwencji prowadzi do zależności (1.9).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_i \vec{i} + u_j \vec{j} + u_k \vec{k}) \cdot (v_i \vec{i} + v_j \vec{j} + v_k \vec{k}) = u_i v_i + u_j v_j + u_k v_k \quad (1.8)$$

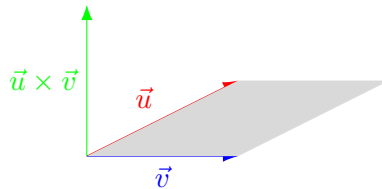
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \varphi \quad (1.9)$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest liczbą rzeczywistą, otrzymana przez pomnożenie modułów wektorów składowych oraz cosinus kąta między nimi. Iloczyn skalarny przedstawia projekcję jednego wektora na drugi, pomnożoną przez długość drugiego wektora.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w bazie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jest dany przez:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_i & u_j & u_k \\ v_i & v_j & v_k \end{vmatrix} = (u_j v_k - u_k v_j) \vec{i} - (u_i v_k - u_k v_i) \vec{j} + (u_i v_j - u_j v_i) \vec{k}$$

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest operacją, która tworzy trzeci wektor prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory składowe. Moduł tego wektora jest proporcjonalna do pola powierzchni równoległoboku, które jest definiowane przez te dwa wektory.



Rys. 1.4 Ilustracja iloczynu wektorowego dwóch wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w płaszczyźnie, wraz z powierzchnią równoległoboku wyznaczonego przez te wektory

1.3 Zadania

Zad. 1.3.1

Oblicz sumę wektorów:

- w układzie kartezjańskim (x, y) : $\vec{v}_1 = (3, -2)$ i $\vec{v}_2 = (-1, 4)$;
- w układzie biegunowym (r, θ) : $\vec{v}_1 = (2, \pi/3)$ i $\vec{v}_2 = (3, \pi/6)$;
- w układzie cylindrycznym (r, θ, z) : $\vec{v}_1 = (2, \pi/4, 1)$ i $\vec{v}_2 = (3, \pi/2, -2)$;
- w układzie sferycznym (r, θ, ϕ) : $\vec{v}_1 = (2, \pi/4, \pi/3)$ i $\vec{v}_2 = (3, \pi/2, \pi/6)$.

Przedstaw wektory wynikowe w cylindrycznym układzie współrzędnych.

Zad. 1.3.2

Znajdź sumę trzech wektorów:

- w układzie kartezjańskim: $\vec{v}_1 = (1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-3, 5)$, i $\vec{v}_3 = (4, -1)$,
- w układzie biegunowym: $\vec{v}_1 = (3, \pi/4)$, $\vec{v}_2 = (2, \pi/6)$, i $\vec{v}_3 = (4, \pi/3)$,
- w układzie cylindrycznym: $\vec{v}_1 = (2, \pi/4, 3)$, $\vec{v}_2 = (3, \pi/2, 2)$, i $\vec{v}_3 = (1, \pi/3, -1)$,
- w układzie sferycznym: $\vec{v}_1 = (3, \pi/4, \pi/6)$, $\vec{v}_2 = (2, \pi/3, \pi/2)$, i $\vec{v}_3 = (4, \pi/2, \pi/4)$.

Przedstaw algebraicznie i geometrycznie wektory wynikowe w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Zad. 1.3.3

Dodaj dwa wektory w przestrzeni trójwymiarowej:

- w układzie kartezjańskim (x, y, z) : $\vec{v}_1 = (1, 2, -3)$ i $\vec{v}_2 = (-2, 3, 1)$.
- w układzie sferycznym (r, θ, ϕ) : $\vec{v}_1 = (2, \pi/4, \pi/3)$ i $\vec{v}_2 = (3, \pi/2, \pi/6)$.

Zad. 1.3.4

Dodaj dwa wektory zdefiniowane w różnych układach współrzędnych:

- $\vec{v}_1 = (3, -2)$ reprezentowany w układzie kartezjańskim oraz $\vec{v}_2 = (2, \pi/4, \pi/3)$ reprezentowany w układzie sferycznym.
- $\vec{v}_1 = (3, \pi/4)$ reprezentowany w układzie biegunowym oraz $\vec{v}_2 = (4, \pi/3, 2)$ reprezentowany w układzie cylindrycznym.
- $\vec{v}_1 = (1, 2, -3)$ w układzie kartezjańskim oraz $\vec{v}_2 = (2, \pi/3)$ w układzie biegunowym.
- $\vec{v}_1 = (3, \pi/4, \pi/6)$ w układzie sferycznym oraz $\vec{v}_2 = (2, \pi/4, 3)$ w układzie cylindrycznym.

- $\vec{v}_1 = (2, \pi/4, 1)$ w układzie cylindrycznym. $\vec{v}_2 = (-1, 4, 2)$ w układzie kartezjańskim.
- $\vec{v}_1 = (2, \pi/4, \pi/3)$ w układzie sferycznym oraz $\vec{v}_2 = (3, \pi/6)$ w układzie biegunowym.
- $\vec{v}_1 = (3, \pi/4)$ w układzie biegunowym oraz $\vec{v}_2 = (1, -2, 3)$ w układzie kartezjańskim,
- $\vec{v}_1 = (3, \pi/4, \pi/3)$ w układzie sferycznym i $\vec{v}_2 = (2, \pi/2, 1)$ w układzie cylindrycznym,
- $\vec{v}_1 = (1, 2, -3)$ w układzie kartezjańskim, $\vec{v}_2 = (2, \pi/3, \pi/4)$ w układzie sferycznym,
- $\vec{v}_1 = (2, \pi/3)$ w układzie biegunowym oraz $\vec{v}_2 = (3, \pi/4, 2)$ w układzie cylindrycznym.

Zad. 1.3.5

Wykonaj mnożenie skalarne dla wektorów opisanych w układzie współrzędnych:

- kartezjańskim: $\vec{a} = (2, 3, -1)$ oraz $\vec{b} = (4, -2, 5)$
- cylindrycznym: $\vec{u} = (3, \pi/4, 2)$ oraz $\vec{v} = (2, 3\pi/4, -1)$
- sferycznym: $\vec{p} = (5, \pi/3, 2\pi/3)$ oraz $\vec{q} = (3, \pi/4, \pi/2)$

Zad. 1.3.6

Wykonaj mnożenie wektorowe dla wektorów opisanych w układzie współrzędnych:

- kartezjańskim: $\vec{A} = (1, 2, 3)$ oraz $\vec{B} = (4, 5, 6)$
- cylindrycznym: $\vec{V} = (2, \pi/6, 3)$ oraz $\vec{W} = (4, \pi/3, 5)$
- sferycznym: $\vec{P} = (3, \pi/4, \pi/3)$ oraz $\vec{Q} = (2, \pi/6, \pi/2)$

Zad. 1.3.7

Oblicz kąt między wektorami w układzie współrzędnych:

- kartezjańskim: $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (4, -2, 5)$
- cylindrycznym: $\vec{u} = (3, \pi/4, 2)$, $\vec{v} = (2, 3\pi/4, -1)$
- sferycznym: $\vec{p} = (5, \pi/3, 2\pi/3)$, $\vec{q} = (3, \pi/4, \pi/2)$

Zad. 1.3.8

Dla podanych funkcji wektorowych, zdefiniowanych w różnych układach współrzędnych, oblicz:

- rotację pola wektorowego,
- dywergencję pola wektorowego,
- określić czy pole jest potencjalne oraz
- określić czy pole jest solenoidalne.

Przykłady funkcji wektorowych:

1. $\vec{r}(x, y, z) = a$
2. $\vec{r}(x, y, z) = \vec{i}$
3. $\vec{r}(x, y, z) = x \sin(y) \vec{i} + y \sin(x) \vec{j}$
4. $\vec{r}(x, y, z) = -x \vec{i} - y \vec{j} - z \vec{k}$
5. $\vec{r}(x, y, z) = z \vec{i} + z^2 \vec{j}$
6. $\vec{r}(x, y, z) = -(x + y + z) \vec{i}$
7. $\vec{r}(x, y, z) = \sin(x) \vec{i} + y \vec{j}$
8. $\vec{r}(x, y, z) = xy \vec{i} + 2yz \vec{j}$
9. $\vec{r}(x, y, z) = z^2 \vec{i} + 3z^2 \vec{j} + 5z^2 \vec{k}$
10. $\vec{r}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \vec{i} + (x^2 + y^2 + z^2) \vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2) \vec{k}$
11. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = a$
12. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \hat{\rho}$
13. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{\rho} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{\theta} + \cos(\theta) \hat{\phi}$
14. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{\rho} + \rho \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{\theta} + \rho \cos(\theta) \hat{\phi}$
15. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \rho \hat{\rho}$
16. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \sin(\theta) \hat{\rho} + \rho \cos(\theta) \hat{\theta}$
17. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin(\phi) \hat{\phi}$
18. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin(\theta) \hat{\rho} + \rho^2 \cos(\theta) \hat{\theta}$
19. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = (\rho^2 + \theta^2 + \phi^2) \hat{\rho} + (\rho^2 + \theta^2 + \phi^2) \hat{\theta} + (\rho^2 + \theta^2 + \phi^2) \hat{\phi}$
20. $\vec{r}(\rho, \theta, \phi) = a \sin(\omega\theta) \cos(\omega\phi) \hat{\rho} + a \sin(\omega\theta) \sin(\omega\phi) \hat{\theta} + a \cos(\omega\theta) \hat{\phi}$

$$21. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \cos(\theta) \vec{i} + \rho \sin(\theta) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$22. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho^2 \sin(2\theta) \vec{i} + \rho^2 \cos(2\theta) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$23. \vec{r}(\rho, \theta, z) = e^\rho \cos(\theta) \vec{i} + e^\rho \sin(\theta) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$24. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \sqrt{\rho} \cos(\theta) \vec{i} + \sqrt{\rho} \sin(\theta) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$25. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \sin(\theta) \cos(\rho) \vec{i} + \rho \sin(\theta) \sin(\rho) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$26. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho^2 \cos(\theta) \vec{i} + \rho^2 \sin(\theta) \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

$$27. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \cos(\rho) \cos(\theta) \vec{i} + \cos(\rho) \sin(\theta) \vec{j} + \sin(\rho) \vec{k}$$

$$28. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho \cos^2(\theta) \vec{i} + \rho \sin^2(\theta) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$29. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \vec{i} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \vec{j} + z \vec{k}$$

$$30. \vec{r}(\rho, \theta, z) = \rho^2 \sin(3\theta) \vec{i} + \rho^2 \cos(3\theta) \vec{j} + z^3 \vec{k}$$

Zad. 1.3.9

Dla podanych funkcji skalarnych, zdefiniowanych w różnych układach współrzędnych, oblicz gradient pola oraz pochodne cząstkowe.

$$1. f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

$$2. f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$$

$$3. f(x, y, z) = \sin(x) \cos(y) + \sin(z)$$

$$4. f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$5. f(x, y, z) = \sinh(x) \cosh(y)$$

$$6. f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z$$

$$7. f(x, y, z) = \tanh(x + y - z)$$

$$8. f(x, y, z) = 2x^3 - 3xy + 4z^3$$

$$9. f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$10. f(x, y, z) = \cos(x + y) \sin(z)$$

$$11. f(\rho, \theta, \phi) = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$12. f(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin^2(\theta) + \phi^2$$

13. $f(\rho, \theta, \phi) = e^{-\rho} \sin(\theta)$

14. $f(\rho, \theta, \phi) = \log(\rho + \sin^2(\theta))$

15. $f(\rho, \theta, \phi) = \cos(\rho) \sin(\theta) \cos(\phi)$

16. $f(\rho, \theta, z) = \rho + z$

17. $f(\rho, \theta, z) = \rho^2 + z^2$

18. $f(\rho, \theta, z) = e^{-\rho} \sin(\theta)$

19. $f(\rho, \theta, z) = \log(\rho + z)$

20. $f(\rho, \theta, z) = \cos(\rho) \sin(\theta) \cos(z)$

