

# Podstawowe zależności wektorowe

## Procedury przeliczeniowe

- biegunowy  $\rightarrow$  kartezjański

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

- cylindryczny  $\rightarrow$  kartezjański

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

- sferyczny  $\rightarrow$  kartezjański

$$(x, y, z) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$$

biegunowy

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{atan2} \left( \frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

cylindryczny

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{atan2} \left( \frac{y}{x} \right) \\ z &= z \end{aligned}$$

sferyczny

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \text{atan2} (y, x) \\ \phi &= \arccos \left( \frac{z}{r} \right) \end{aligned}$$

Procedura obliczenia  $\text{atan2}(y, x)$

- wyznaczenie  $\alpha = \arctan (y, x)$
- potem dobierz  $\theta$  wg. ćwiartki:
  - dla  $x > 0, y \geq 0 : \theta = \alpha$
  - dla  $x < 0, y \geq 0 : \theta = \pi - \alpha$
  - dla  $x < 0, y < 0 : \theta = \pi + \alpha$
  - dla  $x > 0, y < 0 : \theta = 2\pi - \alpha$
- gdy  $x = 0$ :
  - $\theta = \frac{\pi}{2}$  (dla  $y > 0$ )
  - $\theta = \frac{3\pi}{2}$  (dla  $y < 0$ ).

| $\alpha$      | 0  | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
|               | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 180°  |
| $\sin \alpha$ | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     |
| $\cos \alpha$ | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1    |
| $\tan \alpha$ | 0  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -               | 0     |
| $\cot \alpha$ | -  | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | -     |

Dla  $(0, 0)$ :  $r = 0$ ,  $\theta$  nieokreślone.

## Iloczyn skalarny:

$$w = \vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos(\alpha) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

---

## Iloczyn wektorowy:

$$\begin{aligned}\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (1_x(a_y b_z - a_z b_y), 1_y(a_z b_x - a_x b_z), 1_z(a_x b_y - a_y b_x))\end{aligned}$$

---

## Gradient:

Kartezjański

$$\text{grad}V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{1}_z$$

Biegunowy, cylindryczny

$$\text{grad}V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{1}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{1}_z$$

Sferyczny

$$\text{grad}V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{1}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \psi} \vec{1}_\psi$$

- wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji,
  - jego długość = maksymalna szybkość zmiany.
- 

## Dywergencja wektora:

$$\text{div} \cdot \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

## Interpretacja fizyczna

- miara „źródłowości” pola,
  - dodatnia  $\rightarrow$  źródło,
  - ujemna  $\rightarrow$  zlew,
  - zero  $\rightarrow$  pole bezźródłowe (np. pole magnetyczne).
- 

## Rotacja wektora:

$$\begin{aligned}\text{curl} = \text{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} 1_x & 1_y & 1_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\ &= 1_x \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + 1_y \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + 1_z \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

## Interpretacja fizyczna

- mierzy lokalną „wirowość” pola,
  - jeśli rotacja = 0  $\rightarrow$  pole jest bezwirowe (potencjalne).
-