

Teoria Obwodów I – Ćwiczenia 3

- Przekształcanie obwodów rozgałęzionych:
 - zasada superpozycji,
 - twierdzenie o włączaniu dodatkowych źródeł,
 - twierdzenie o wzajemności,
 - transfiguracja gwiazda-trójkąt.
- Metody analizy obwodów liniowych
 - prawa Kirchhoffa,
 - Prądów oczkowych – „Oczkowa”,
 - Potencjałów węzłowych – „Węzłowa”.
- Zastępcze źródło energii:
 - napięciowego – twierdzenie Thevenina,
 - prądowego – twierdzenie Nortona.

Zasada superpozycji

- Układ rozgałęziony z wieloma źródłami (prądowymi i napięciowymi) rozpatruje się jako serię układów z pojedynczym źródłem (prądowym lub napięciowym).
- Wartości prądów w obwodzie oblicza się jako sumę algebraiczną wartości prądów obliczonych przy wymuszeniach od poszczególnych źródeł
- Nieuwzględniane w danym kroku obliczeniowym pozostałych źródeł:
 - prądowe stanowią przerwę w gałęzi,
 - napięciowe stanowią zwarcie w gałęzi.

Przykład 1

B)

$$I_1 = I_z = 3A$$

$$U_{AB} = I_z \cdot \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = I_z \cdot \frac{2R^2}{3R} = I_z$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{20}{10} = 2A$$

$$I_2 = I_1 + I_3 \rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = 2 - 3 = -1A$$

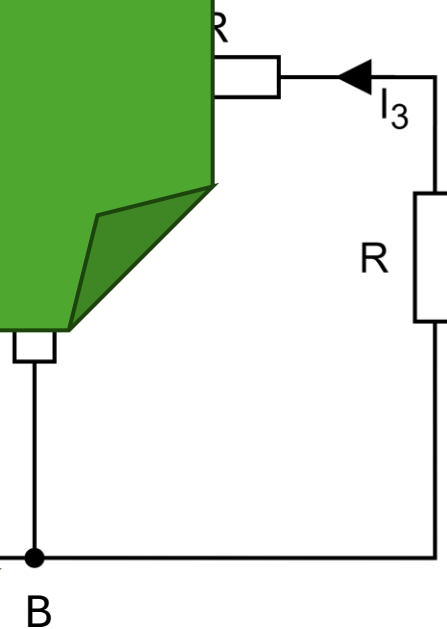
$$I_1 = 3A$$

$$I_2 = I_3 = \frac{E}{R + R + R} = \frac{60}{10 + 10 + 10} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$I_1 = I_1^A + I_1^B = 0 + 3 = 3A$$

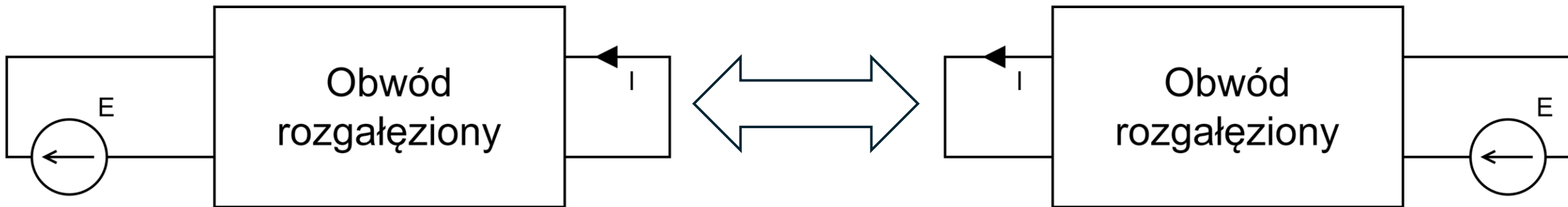
$$I_2 = I_2^A + I_2^B = 2 + 2 = 4A$$

$$I_3 = I_3^A + I_3^B = 2 - 1 = 1A$$



Zasada wzajemności

W obwodzie rozgałęzionym, z jednym źródłem napięciowym, wywołującym w k -tej gałęzi prąd \mathbf{I} , to po przeniesieniu źródła do tej gałęzi, w gałęzi z której przeniesiono źródło popłynie taki sam prąd jaki płynął pierwotnie w gałęzi k -tej.



Włączanie dodatkowych źródeł

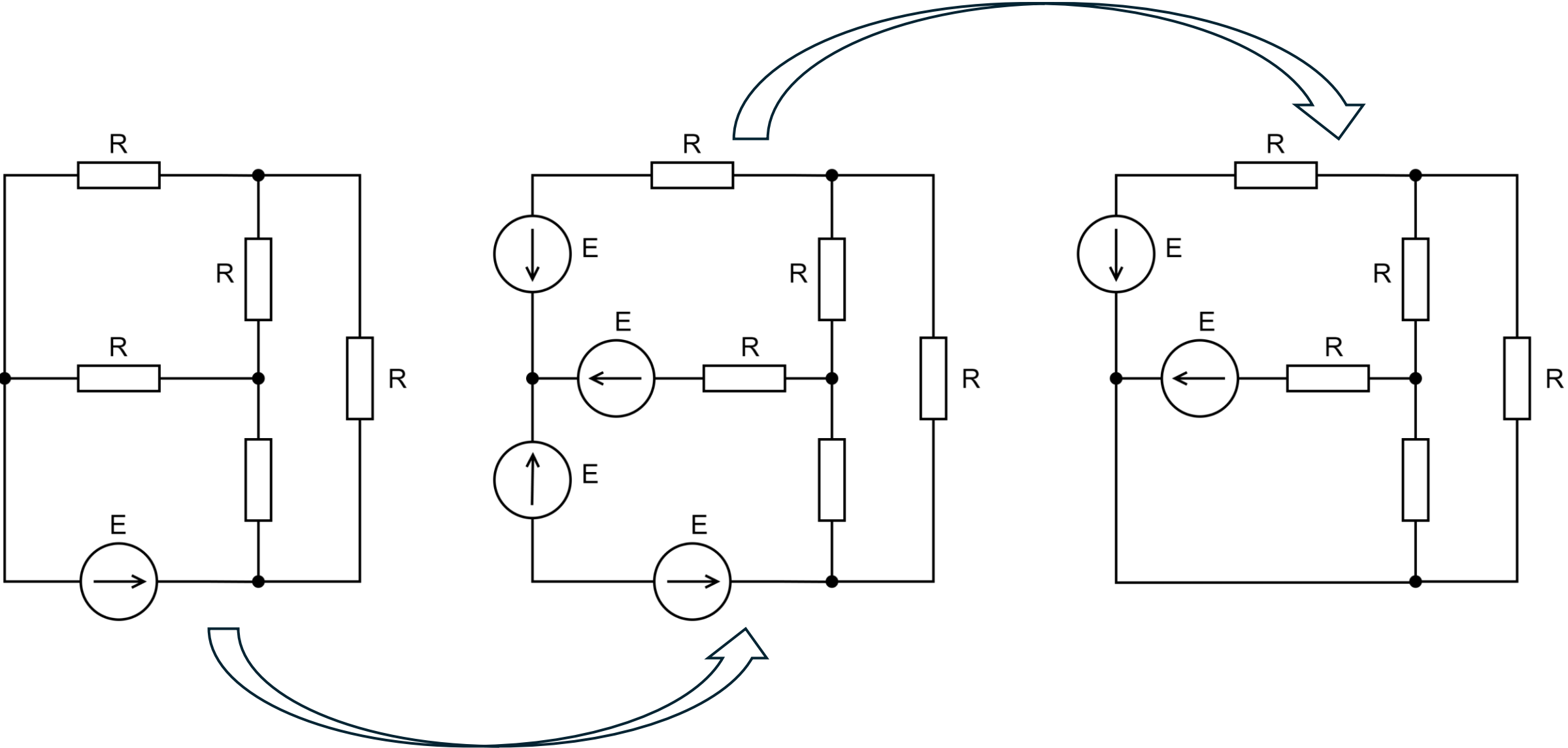
Twierdzenie o włączaniu dodatkowych źródeł napięcia

- W obwodzie rozgałęzionym rozpływ prądów nie zmieni się po włączeniu do każdej gałęzi powiązanej z danym węzłem po jednym idealnym źródle napięciowym o tych samych parametrach (wartości, fazie i zwrocie w stosunku do rozpatrywanego węzła).

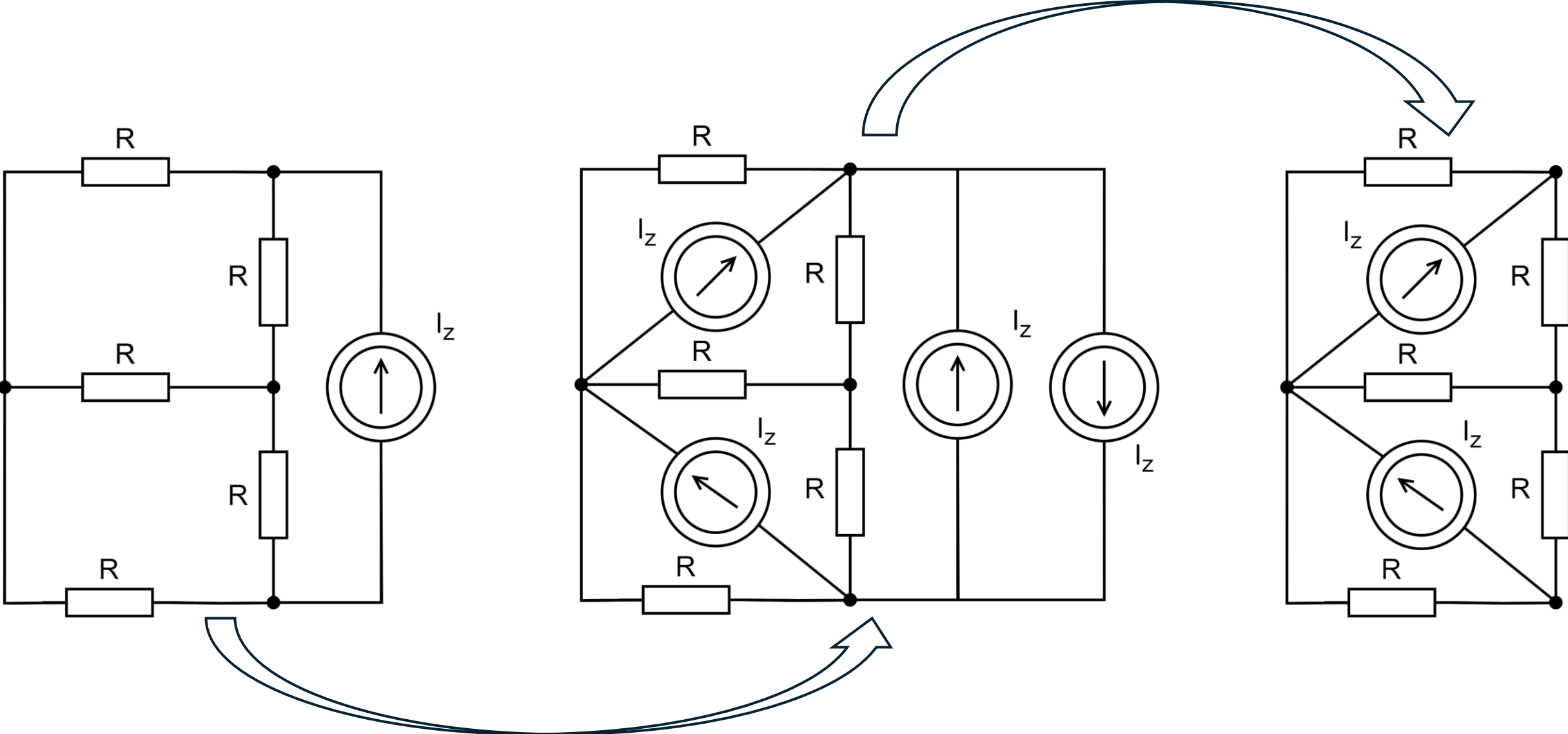
Twierdzenie o włączaniu dodatkowych źródeł prądu

- W obwodzie rozgałęzionym rozpływ prądów nie zmieni się po włączeniu równolegle do każdej gałęzi danego oczka idealnych źródeł prądowych o tych samych parametrach (wartości, fazie i zwrocie względem przyjętego obiegu oczka)

Włączanie dodatkowych źródeł



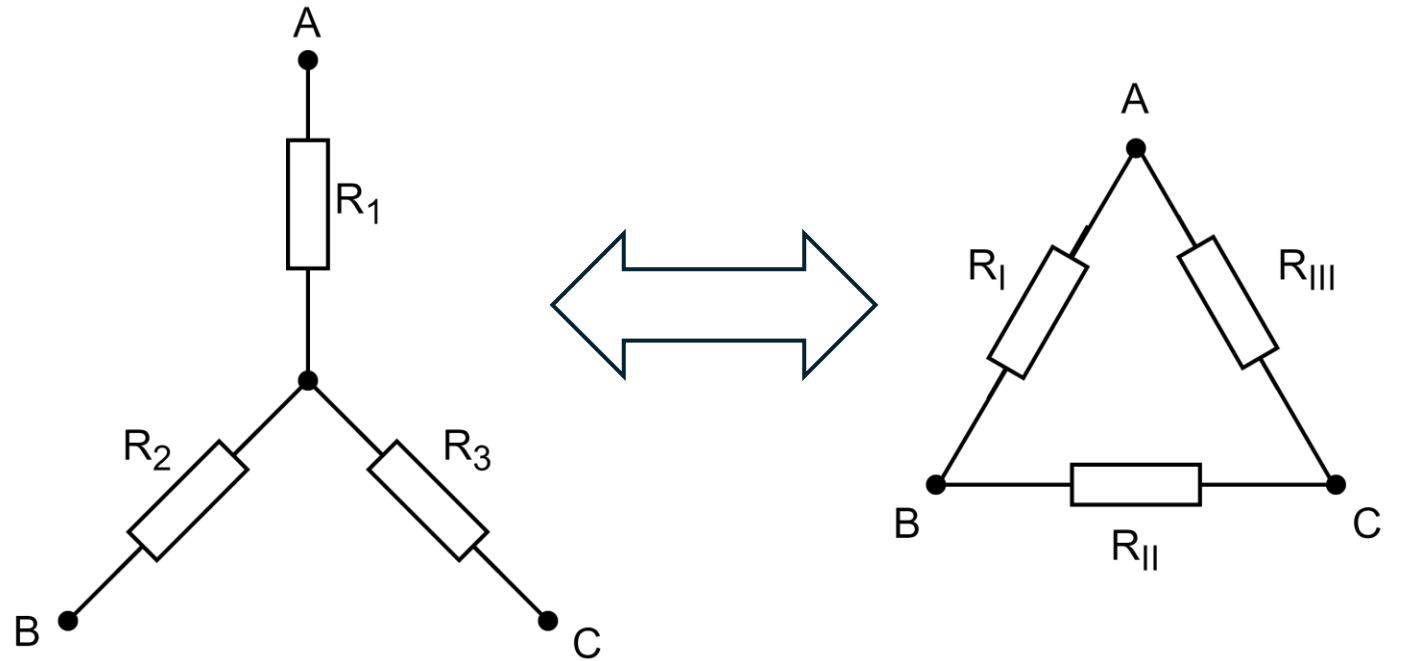
Włączanie dodatkowych źródeł



Transfiguracja gwiazda-trójkąt

$$R_1 = \frac{R_I \cdot R_{III}}{R_I + R_{II} + R_{III}}$$

$$R_I = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$



Metoda praw Kirchhoffa

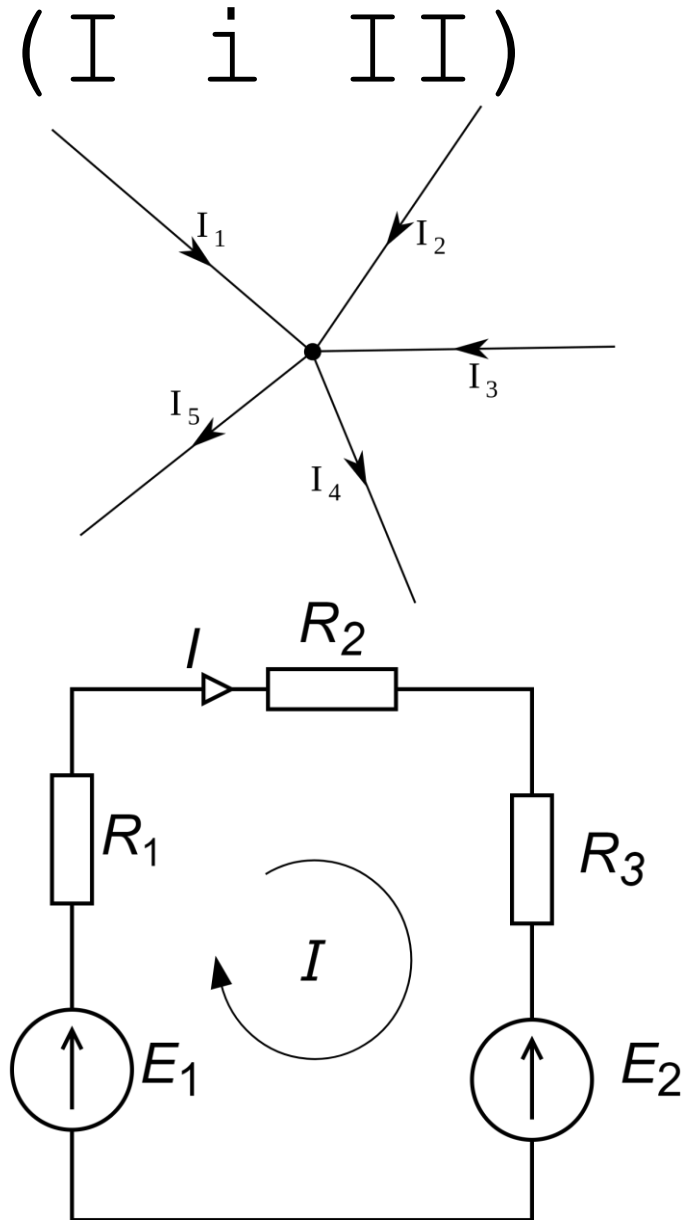
I. Suma natężeń prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5$$

I. W zamkniętym obwodzie suma spadków napięć równa jest sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie.

$$\sum_i U_i = \sum_i E_i$$

$$R_1 I + R_2 I + R_3 I = E_1 - E_2$$

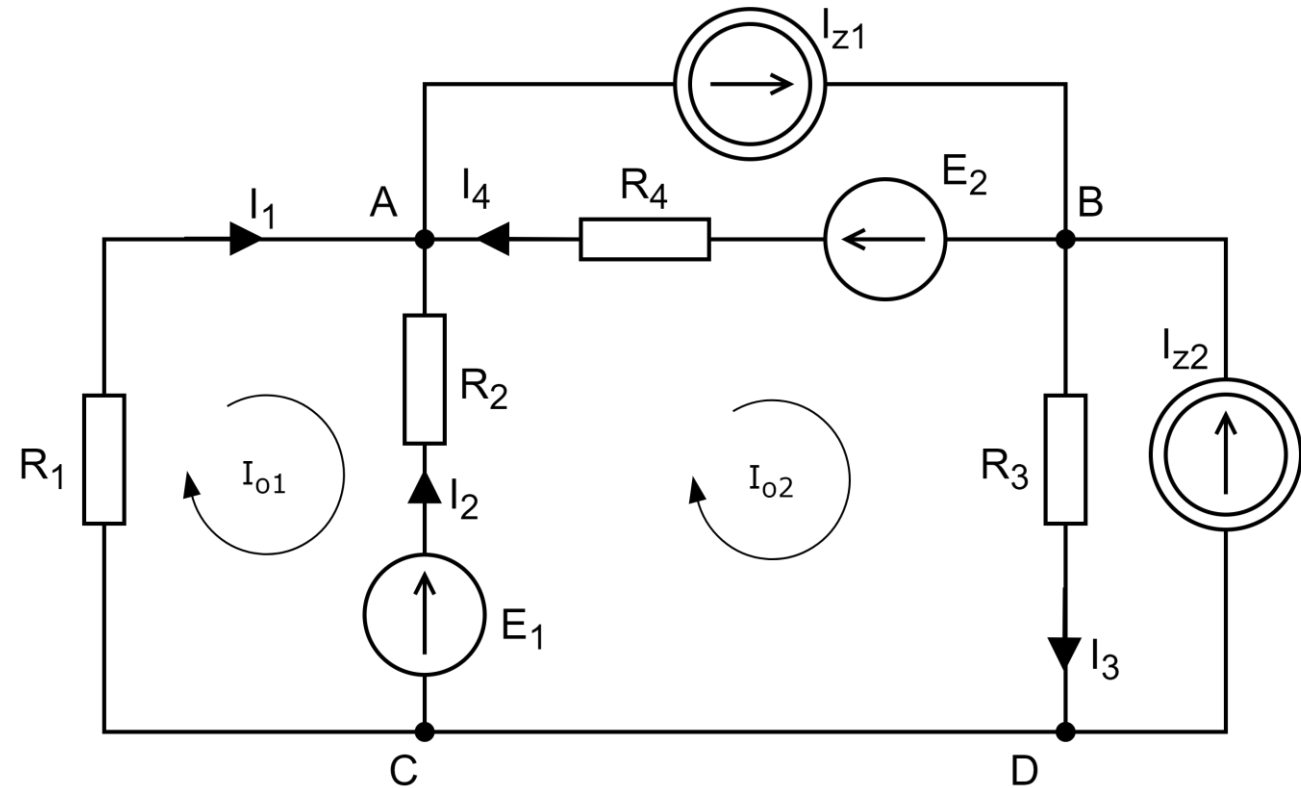


Przykład 2

- Wyznaczyć rozptyw prądów w obwodzie metodą równań Kirchhoffa.

• Dane:

- $R_1 = R_3 = 20\Omega$
- $R_2 = R_4 = 40\Omega$
- $E_1 = 40V$
- $E_2 = 20V$
- $I_{z1} = 2A$
- $I_{z2} = 1A$



- Oczko 1 $\rightarrow I_1 R_1 - I_2 R_2 = -E_1$
- Oczko 2 $\rightarrow R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = -E_2 + E_1$
- Węzeł A $\rightarrow I_1 + I_2 + I_4 = I_{z1}$
- Węzeł B $\rightarrow -I_4 - I_3 = -I_{z1} - I_{z2}$
- ~~Węzeł C/D $\rightarrow I_1 - I_2 + I_3 = I_{z2}$~~

Przykład 2

$$\begin{cases} I_1 R_1 - I_2 R_2 = -E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_1 - E_2 \\ I_1 + I_2 + I_4 = I_{z1} \\ I_4 + I_3 = I_{z1} + I_{z2} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{-E_1 + R_2 I_2}{R_1} \quad I_2 = \frac{E_1 - E_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3}{R_2}$$

$$I_4 = I_{z1} - I_1 - I_2$$

$$I_3 = I_{z1} + I_{z2} - I_{z1} + I_1 + I_2 = I_{z2} + I_1 + I_2$$

Przykład 2

$$I_1 = \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} + R_4 \left(I_{z1} - \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} - I_2 \right)$$
$$= -E_2 + E_1 - R_3 \left(I_{z2} + \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} + I_2 \right)$$

$$I_4 = I_{z1} - \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} - I_2$$

$$I_3 = I_{z2} + \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} + I_2$$

Przykład 2

$$R_2 I_2 = -E_2 + E_1 - R_3 \left(I_{z2} + \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} + I_2 \right) + R_4 \left(I_{z1} - \frac{R_2 I_2 - E_1}{R_1} - I_2 \right)$$

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2 + E_1 \frac{R_4 + R_3}{R_1} - R_3 I_{z2} + R_4 I_{z1}}{R_2 + \frac{R_2 R_3}{R_1} + R_4 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_1}}$$

$$= \frac{40 - 20 + 40 \frac{40 + 20}{20} - 20 \cdot 1 + 40 \cdot 2}{40 + \frac{40 \cdot 20}{20} + 40 + 20 + \frac{40 \cdot 40}{20}}$$

$$= \frac{40 - 20 + 40 \cdot 3 - 20 + 80}{40 + 40 + 40 + 20 + 80} = \frac{200}{220} = \frac{20}{22} = \frac{10}{11} A$$

Przykład 2

$$I_2 = \frac{10}{11} A$$

$$I_1 = \frac{-E_1 + R_2 I_2}{R_1} = \frac{-40 + 40 \cdot \frac{10}{11}}{20} = -\frac{40}{220} = -\frac{2}{11} A$$

$$I_3 = I_{z2} + I_1 + I_2 = 1 - \frac{2}{11} + \frac{10}{11} = \frac{19}{11} = 1 \frac{8}{11} A$$

$$I_4 = I_{z1} - I_1 - I_2 = 2 + \frac{2}{11} - \frac{10}{11} = \frac{14}{11} = 1 \frac{3}{11} A$$

Przykład 2 - Metoda wyznaczników

$$\begin{cases} I_1 R_1 - I_2 R_2 = -E_1 \\ R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_3 I_3 = -E_2 + E_1 \\ I_1 + I_2 + I_4 = I_{z1} \\ I_4 + I_3 = I_{z1} + I_{z2} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 20 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 20I_1 - 40I_2 + 0 + 0 = -40 \\ 0 + 40I_2 + 20I_3 - 40I_4 = -20 + 40 = 20 \\ I_1 + I_2 + 0 + I_4 = 2 \\ 0 + 0 + I_3 + I_4 = 2 + 1 \end{cases}$$

Przykład 2 – Metoda wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 20 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4400$$

Przykład 2 – Metoda wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 20 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} -40 & -40 & 0 & 0 \\ 20 & 40 & 20 & -40 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 800$$
$$I_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{800}{4400} = -\frac{2}{11} A$$

Przykład 2 – Metoda wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 20 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$I_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{4000}{4400} = \frac{10}{11} A$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & -40 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4000$$

Przykład 2 – Metoda wyznaczników

$$\begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 20 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{7600}{4400} = 1 \frac{8}{11} A$$
$$W_3 = \begin{vmatrix} 20 & -40 & -40 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7600$$

Przykład 2 – Metoda wyznaczników

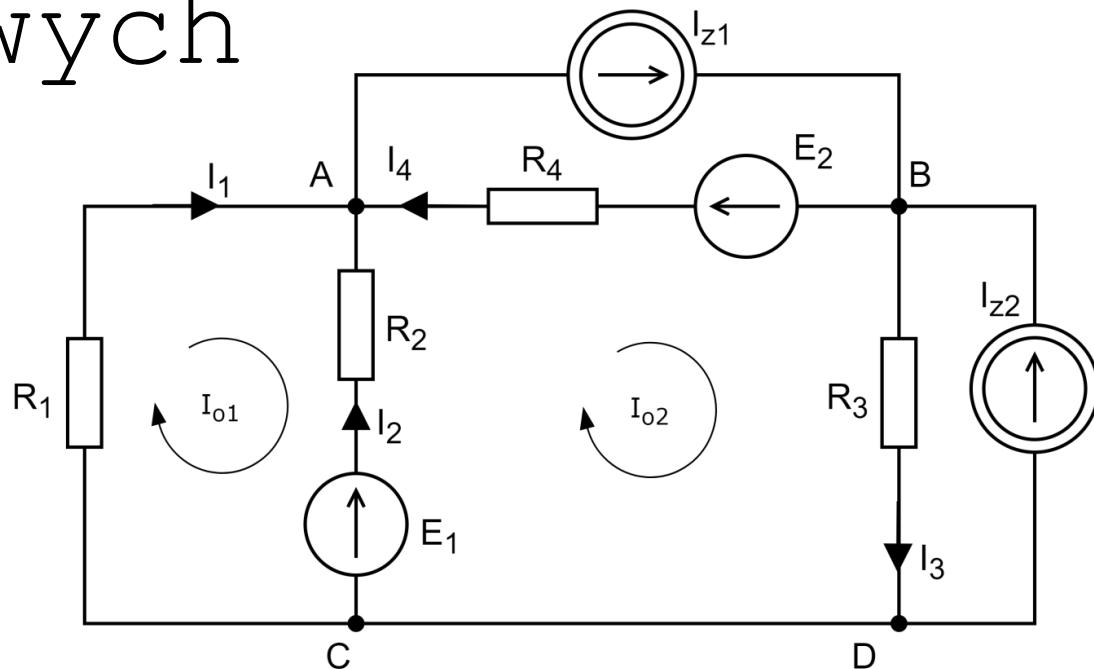
$$\begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 20 & -40 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 20 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$W_4 = \begin{vmatrix} 20 & -40 & 0 & -40 \\ 0 & 40 & 20 & 20 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5600$$
$$I_4 = \frac{W_4}{W} = \frac{5600}{4400} = 1 \frac{3}{11} A$$

Metoda prądów oczkowych

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = -E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_1 - E_2 \\ I_1 + I_2 + I_4 = I_{z1} \\ I_4 + I_3 = I_{z1} + I_{z2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1^0 = I_1 \\ I_2^0 = I_3 \\ I_4 = I_{z1} + I_{z2} - I_2^0 \\ I_2 = I_{z1} - I_1^0 - I_4 = I_2^0 - I_1^0 - I_{z2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} R_1 I_1^0 - R_2 (I_2^0 - I_1^0 - I_{z2}) = -E_1 \\ R_2 (I_2^0 - I_1^0 - I_{z2}) + R_3 I_2^0 - R_4 (I_{z1} + I_{z2} - I_2^0) = E_1 - E_2 \end{cases}$$

Metoda prądów oczkowych

$$\begin{cases} R_1 I_1^0 - R_2 (I_2^0 - I_1^0 - I_{z2}) = -E_1 \\ R_2 (I_2^0 - I_1^0 - I_{z2}) + R_3 I_2^0 - R_4 (I_{z1} + I_{z2} - I_2^0) = E_1 - E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 I_1^0 - R_2 I_2^0 + R_2 I_1^0 + R_2 I_{z2} = -E_1 \\ R_2 I_2^0 - R_2 I_1^0 - R_2 I_{z2} + R_3 I_2^0 - R_4 I_{z1} - R_4 I_{z2} + R_4 I_2^0 = E_1 - E_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_1^0 - R_2 I_2^0 = -E_1 - R_2 I_{z2} \\ -R_2 I_1^0 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2^0 = E_1 - E_2 + R_2 I_{z2} + R_4 I_{z1} + R_4 I_{z2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (20 + 40) I_1^0 - 40 I_2^0 = -40 - 40 \cdot 1 \\ -40 I_1^0 + (40 + 20 + 40) I_2^0 = 40 - 20 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 1 \end{cases}$$

Metoda prądów oczkowych

$$\begin{cases} (20 + 40)I_1^0 - 40I_2^0 = -40 - 40 \cdot 1 \\ -40I_1^0 + (40 + 20 + 40)I_2^0 = 40 - 20 + 40 \cdot 1 + 40 \cdot 2 + 40 \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60I_1^0 - 40I_2^0 = -80 \\ -40I_1^0 + 100I_2^0 = 180 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 100 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -80 \\ 180 \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 100 \end{vmatrix} = 60 \cdot 100 - 40 \cdot 40 = 4400$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} -80 & -40 \\ 180 & 100 \end{vmatrix} = -80 \cdot 100 + 180 \cdot 40 = -800$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 60 & -80 \\ -40 & 180 \end{vmatrix} = 60 \cdot 180 - 80 \cdot 40 = 7600$$

Metoda prądów oczkowych

$$I_1^0 = \frac{W_1}{W} = -\frac{800}{4400} = -\frac{2}{11} A$$

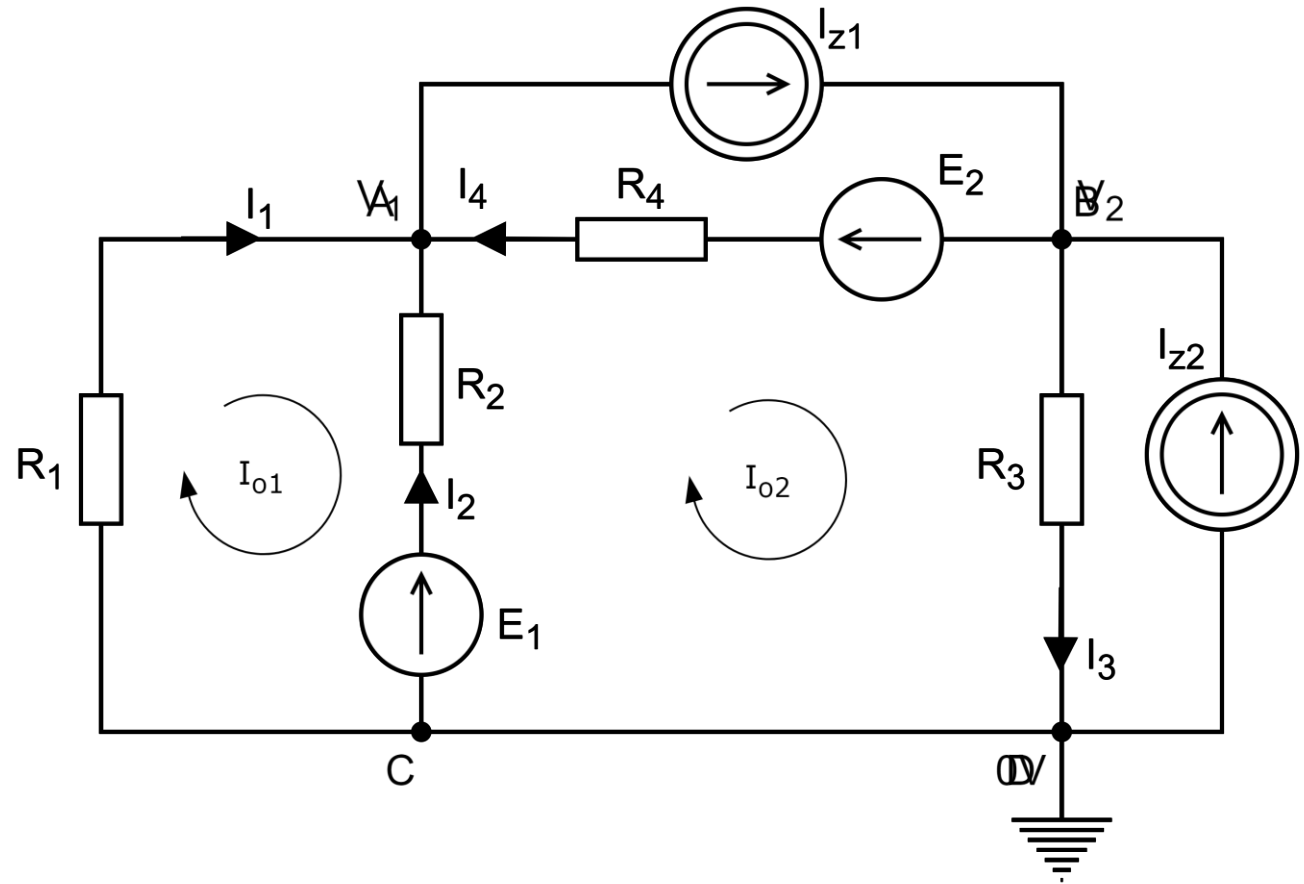
$$I_2^0 = \frac{W_2}{W} = \frac{7600}{4400} = 1\frac{8}{11} A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = I_1^0 = -\frac{2}{11} A \\ I_3 = I_2^0 = 1\frac{8}{11} A \\ I_4 = I_{z1} + I_{z2} - I_2^0 = 2 + 1 + 1\frac{8}{11} = \frac{14}{11} = 1\frac{3}{11} A \\ I_2 = I_2^0 - I_1^0 - I_{z2} = 1\frac{8}{11} + \frac{2}{11} - 1 = \frac{10}{11} A \end{array} \right.$$

Metoda potencjałów węzłowych

- $I_1 = -G_1 V_1$
- $I_2 = G_2 (E_1 - V_1)$
- $I_3 = G_3 V_2$
- $I_4 = G_4 (E_2 + (V_2 - V_1))$

- $I_1 + I_2 + I_4 = I_{z1}$
- $I_3 + I_4 = I_{z1} + I_{z2}$



Metoda potencjałów węzłowych

- $I_1 = -G_1 V_1$

- $I_2 = G_2(E_1 - V_1) = G_2 E_1 - G_2 V_1$

- $I_3 = G_3 V_2$

- $I_4 = G_4(E_2 + (V_2 - V_1)) = G_4 E_2 + G_4 V_2 - G_4 V_1$

- $I_1 + I_2 + I_4 = I_{z1}$

- $I_3 + I_4 = I_{z1} + I_{z2}$

- $-G_1 V_1 + G_2 E_1 - G_2 V_1 + G_4 E_2 + G_4 V_2 - G_4 V_1 = I_{z1}$

- $G_3 V_2 + G_4 E_2 + G_4 V_2 - G_4 V_1 = I_{z1} + I_{z2}$

Metoda potencjałów węzłowych

- $-G_1V_1 + G_2E_1 - G_2V_1 + G_4E_2 + G_4V_2 - G_4V_1 = I_{z1}$

- $G_3V_2 + G_4E_2 + G_4V_2 - G_4V_1 = I_{z1} + I_{z2}$

- $-(G_1 + G_2 + G_4)V_1 + G_4V_2 = I_{z1} - G_2E_1 - G_4E_2$

- $-G_4V_1 + (G_3 + G_4)V_2 = I_{z1} + I_{z2} - G_4E_2$

- $-(0.05 + 0.025 + 0.025)V_1 + 0.025V_2 = 2 - 0.025 \cdot 40 - 0.025 \cdot 20$

- $-0.025V_1 + (0.05 + 0.025)V_2 = 2 + 1 - 0.025 \cdot 20$

Metoda potencjałów węzłowych

- $-(0.05 + 0.025 + 0.025)V_1 + 0.025V_2 = 2 - 0.025 \cdot 40 - 0.025 \cdot 20$
- $-0.025V_1 + (0.05 + 0.025)V_2 = 2 + 1 - 0.025 \cdot 20$

- $-0.1V_1 + 0.025V_2 = 0.5$
- $-0.025V_1 + 0.075V_2 = 2.5$

$$\begin{vmatrix} -0.1 & 0.025 \\ -0.025 & 0.075 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{vmatrix}$$

Metoda potencjałów węzłowych

$$W = \begin{vmatrix} -0.1 & 0.025 \\ -0.025 & 0.075 \end{vmatrix} = -0.0068750$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0.5 & 0.025 \\ 2.5 & 0.075 \end{vmatrix} = -0.025$$

$$V_1 = \frac{W_1}{W} = 3.6363636$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} -0.1 & 0.5 \\ -0.025 & 2.5 \end{vmatrix} = -0.2375$$

$$V_2 = \frac{W_2}{W} = 34.545455$$

Metoda potencjałów węzłowych

$$V_1 = 3.6363636$$

$$V_2 = 34.545455$$

$$\bullet I_1 = -G_1 V_1 = -0.05 \cdot 3.6363636 = -\frac{2}{11} A$$

$$\bullet I_2 = G_2 (E_1 - V_1) = 0.025 \cdot (40 - 3.6363636) = \frac{10}{11} A$$

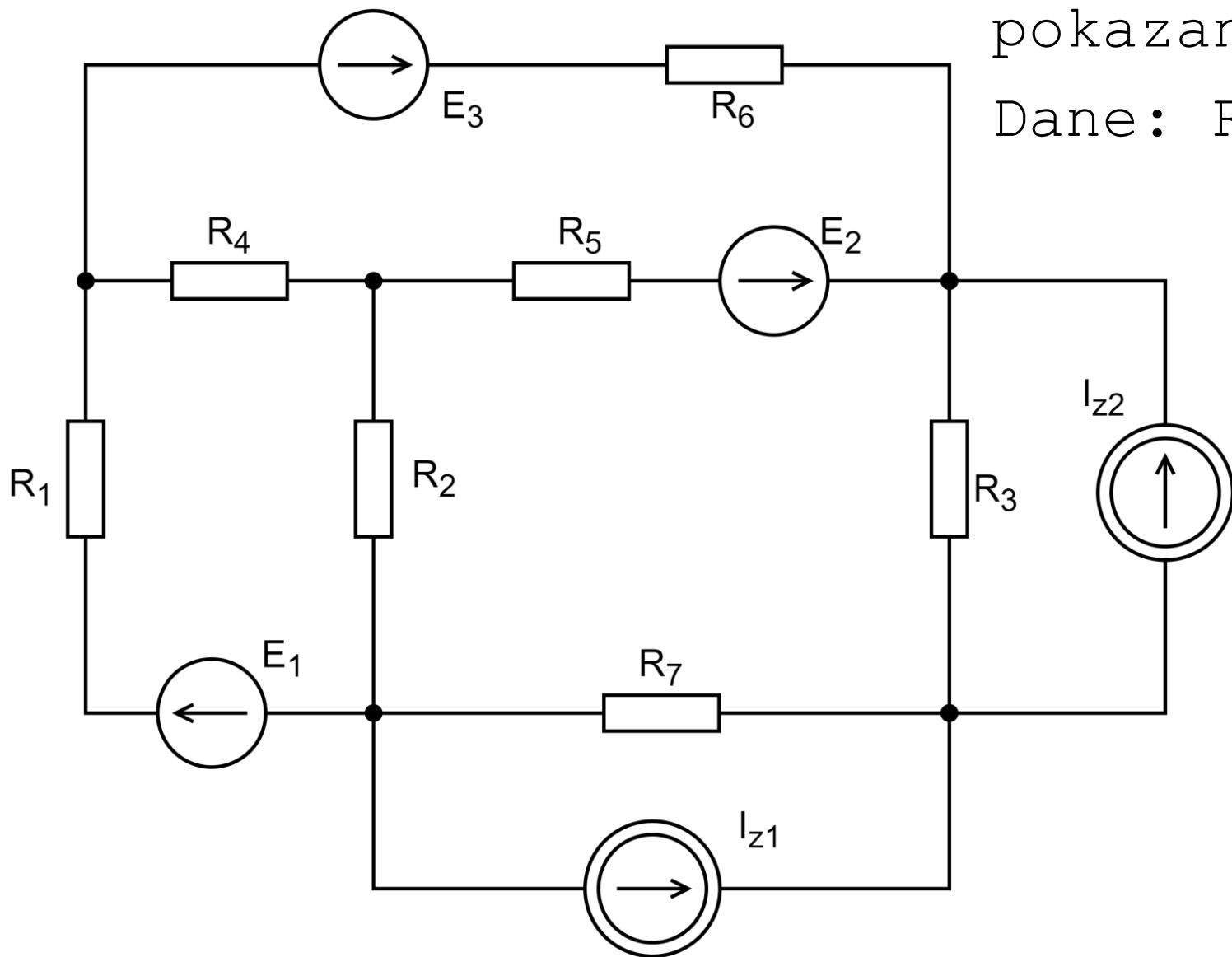
$$\bullet I_3 = G_3 V_2 = 0.05 \cdot 34.545455 = 1 \frac{8}{11} A$$

$$\bullet I_4 = G_4 (E_2 + (V_2 - V_1)) = 0.025 * (20 + 34.545455 - 3.6363636) = 1 \frac{3}{11} A$$

Zadanie 1

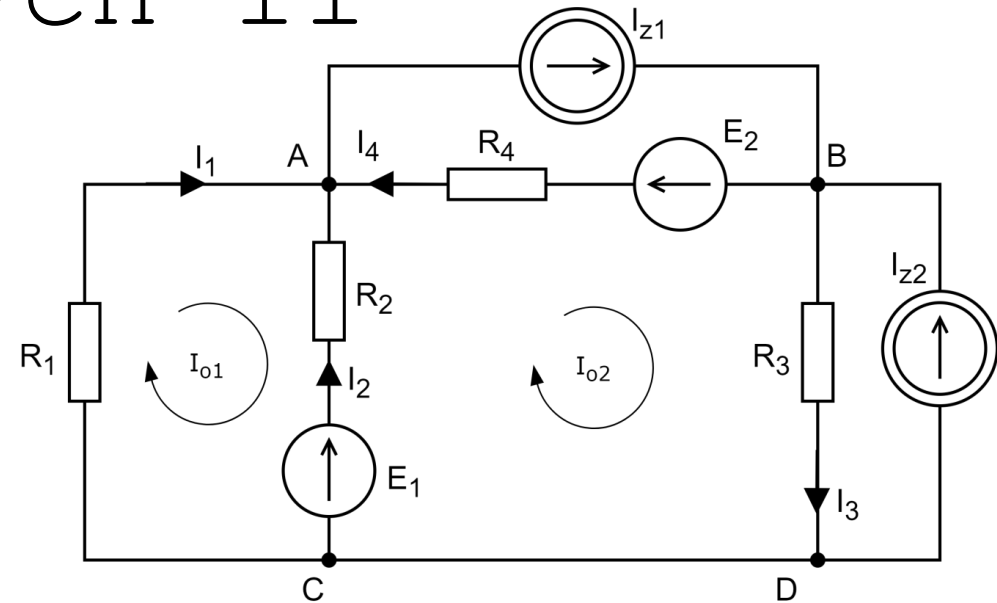
Obliczyć wartości prądów gałęziowych w obwodzie pokazanym na rysunku.

Dane: $R_x = 50\Omega$, $E_x = 100V$, $I_{z_x} = 5A$



Metoda prądów oczkowych II

$$\begin{array}{ll}
 I_1 = I_I & I_1 = I_I \\
 I_2 = I_{II} - I_I - I_{z1} & I_2 = I_{II} - I_I - 1 \\
 I_3 = I_{II} + I_{z2} & I_3 = I_{II} + 1 \\
 I_4 = -I_{II} + I_{z1} + I_{z2} & I_4 = -I_{II} + 2 + 1
 \end{array}$$



$$\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -E_1 \\ E_1 - E_2 + R_4 I_{z1} - R_3 I_{z2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 20 + 40 & -40 \\ -40 & 40 + 20 + 40 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 40 - 20 + 40 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 100 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 \\ 80 \end{vmatrix}$$

Metoda prądów oczkowych II

$$W = \begin{vmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 100 \end{vmatrix} = 4400 \quad W_1 = \begin{vmatrix} -40 & -40 \\ 80 & 100 \end{vmatrix} = -800$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 60 & -40 \\ -40 & 80 \end{vmatrix} = 3200$$

$$I_1 = I_I = \frac{W_1}{W} = \frac{-800}{4400} = -\frac{2}{11}$$

$$I_2 = I_{II} - I_I - 1 = 1 \frac{8}{11} + \frac{2}{11} - 1 = \frac{10}{11}$$

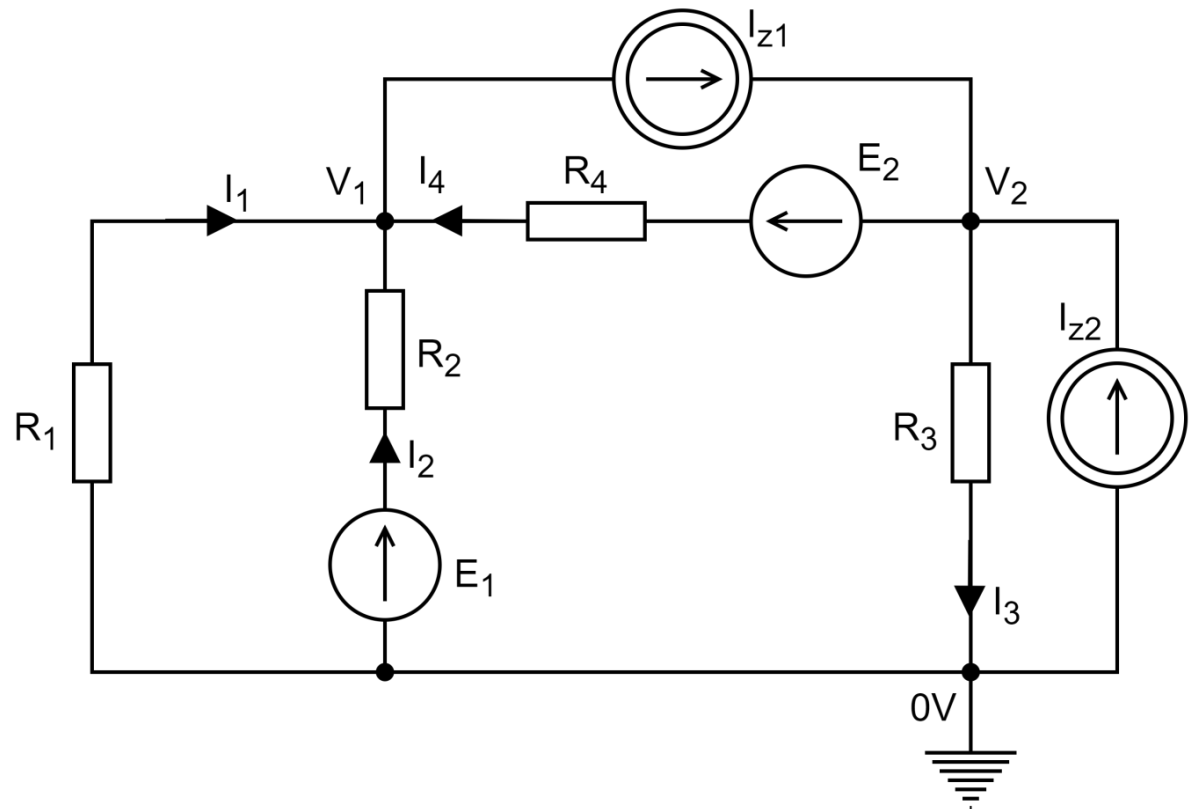
$$I_3 = I_{II} + 1 = \frac{W_2}{W} + 1 = \frac{3200}{4400} + 1 = 1 \frac{8}{11}$$

$$I_4 = -I_{II} + 2 + 1 = -1 \frac{8}{11} + 2 + 1 = 1 \frac{3}{11}$$

Metoda potencjałów węzłowych II

$$\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_3 + G_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_2 E_1 + G_4 E_2 - I_{z1} \\ -G_4 E_2 + I_{z1} + I_{z2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = G_1(0 - V_1) \\ I_2 = G_2(0 - V_1 + E_1) \\ I_3 = G_3(V_2 - 0) \\ I_4 = G_4(V_2 - V_1 + E_2) \end{cases}$$



Metoda potencjałów węzłowych II

$$\begin{vmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_3 + G_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_2 E_1 + G_4 E_2 - I_{z1} \\ -G_4 E_2 + I_{z1} + I_{z2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.05 + 0.025 + 0.025 & -0.025 \\ -0.025 & 0.05 + 0.025 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.025 \cdot 40 + 0.025 \cdot 20 - 2 \\ -0.025 \cdot 20 + 1 + 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.1 & -0.025 \\ -0.025 & 0.075 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5 \\ 2.5 \end{vmatrix}$$

Metoda potencjałów węzłowych II

$$\begin{vmatrix} 0.1 & -0.025 \\ -0.025 & 0.075 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.5 \\ 2.5 \end{vmatrix}$$

$$W = \det \begin{vmatrix} 0.1 & -0.025 \\ -0.025 & 0.075 \end{vmatrix} = 0.0068750$$

$$W_1 = \det \begin{vmatrix} -0.5 & -0.025 \\ 2.5 & 0.075 \end{vmatrix} = 0.025 \quad V_1 = \frac{W_1}{W} = 3.63$$

$$W_2 = \det \begin{vmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.025 & 2.5 \end{vmatrix} = 0.2375 \quad V_2 = \frac{W_2}{W} = 34.54$$

Metoda potencjałów węzłowych II

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = -G_1 V_1 = -0.05 \cdot 3.63 = 0.90925 \approx -\frac{2}{11} \\ I_2 = G_2 (E_1 - V_1) = 0.025(40 - 3.63) = 0.9091 \approx \frac{10}{11} \\ I_3 = G_3 V_2 = 0.05 \cdot 34.54 = 1.727 \approx 1\frac{8}{11} \\ I_4 = G_4 (E_2 + V_2 - V_1) = 0.025(20 + 34.54 - 3.63) = 1.17275 \approx 1\frac{3}{11} \end{array} \right.$$

Zadanie 2

Wyznaczyć rozkład prądów w obwodzie pokazanym na rysunku. Dane do zadania:

$$R_1 = R_4 = 5\Omega$$

$$R_2 = 3\Omega$$

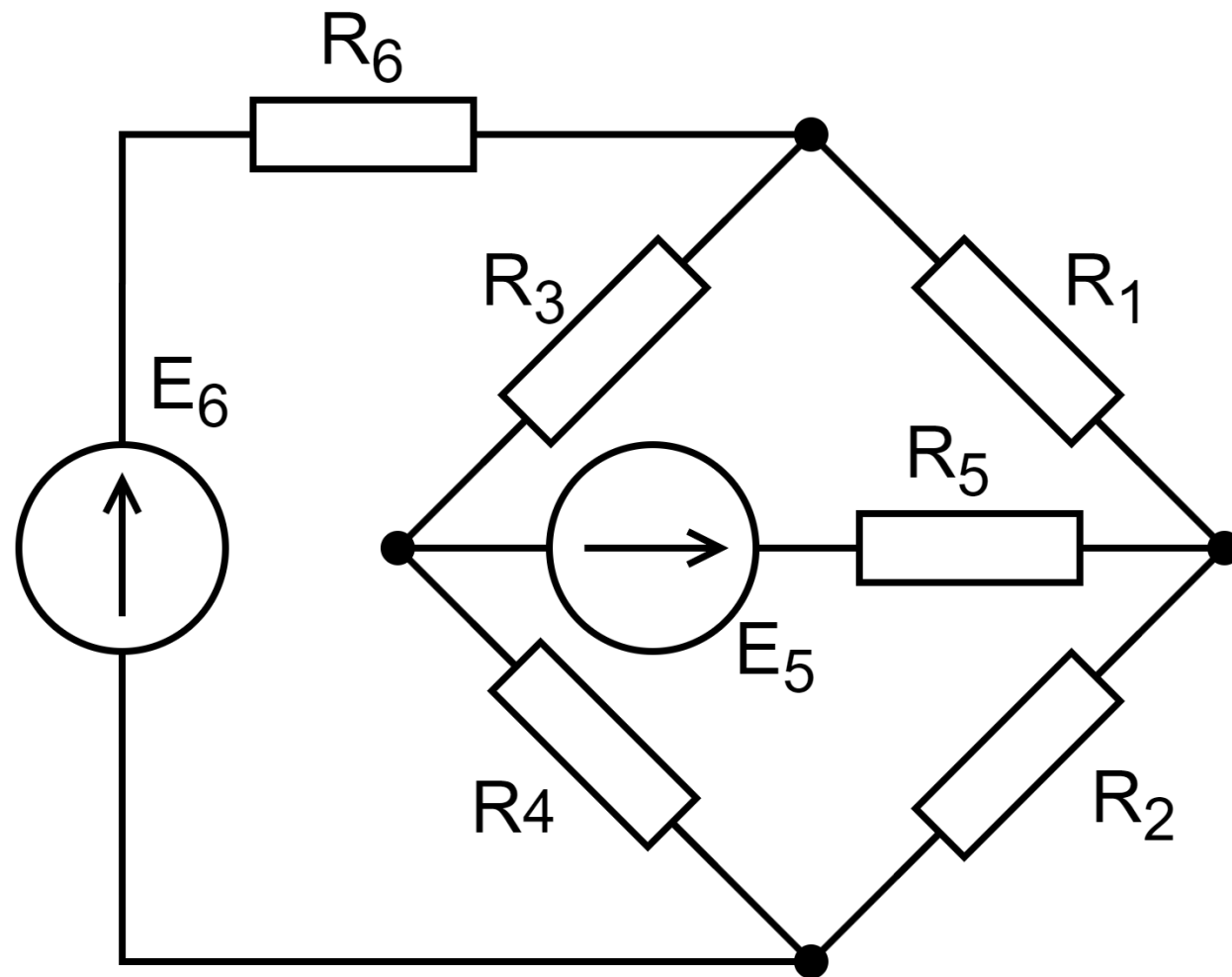
$$R_3 = 2\Omega$$

$$R_5 = 1\Omega$$

$$R_6 = 0.5\Omega$$

$$E_5 = 11V$$

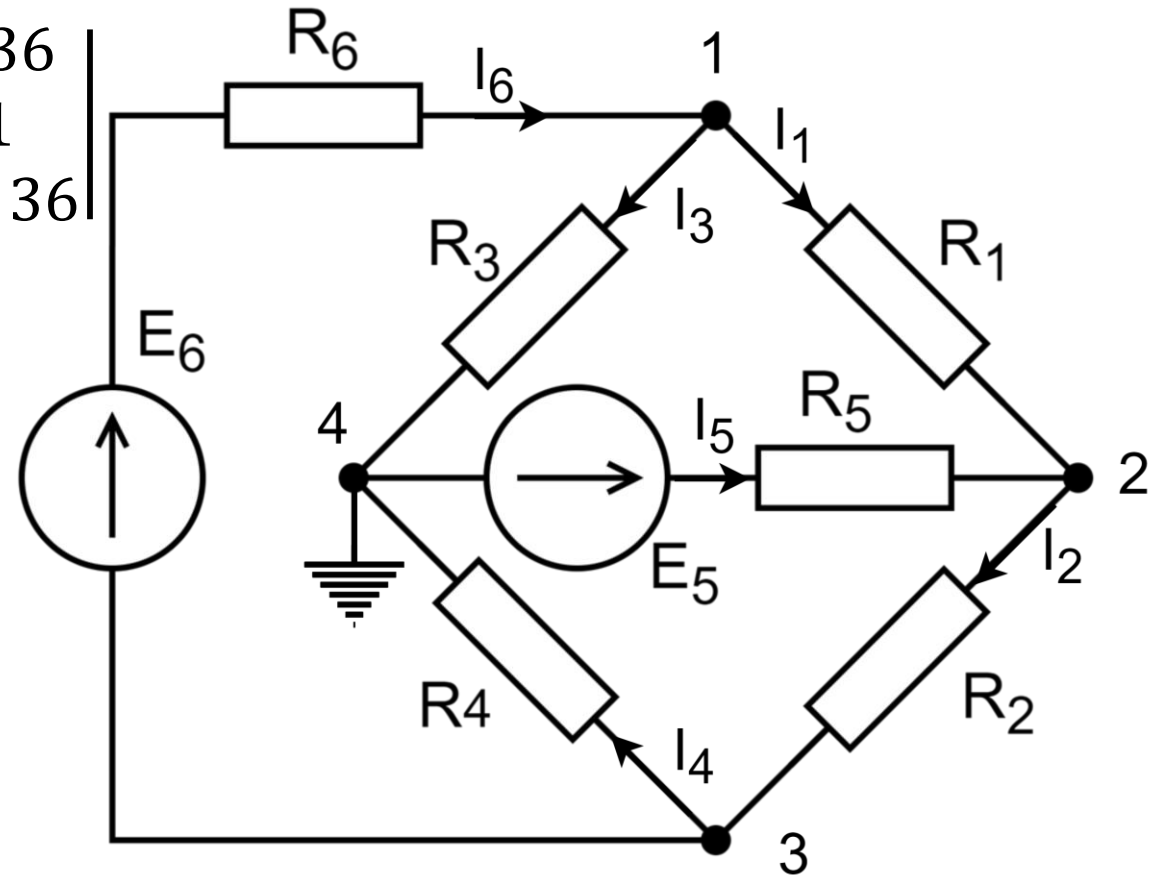
$$E_6 = 36V$$



$$\begin{vmatrix} G_6 + G_1 + G_3 & -G_1 & -G_6 \\ -G_1 & G_5 + G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_6 & -G_2 & G_6 + G_2 + G_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_6 E_6 \\ G_5 E_5 \\ -G_6 E_6 \end{vmatrix} \quad \text{Zadanie 2a}$$

$$\begin{vmatrix} 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -2 \\ -\frac{1}{5} & 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & -\frac{1}{3} & 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 36 \\ 11 \\ -2 \cdot 36 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} & -2 \\ -\frac{1}{5} & 1 \frac{8}{15} & -\frac{1}{3} \\ -2 & -\frac{1}{3} & 2 \frac{8}{15} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 72 \\ 11 \\ -72 \end{vmatrix}$$



Zadanie 2a

$$W=3.68667$$

$$W_1=58.986667$$

$$W_2=22.12$$

$$W_3=-55.3$$

$$V_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{35.94667}{3.686667} = 16$$

$$V_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{26.68}{3.686667} = 6$$

$$V_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{-20.5}{3.686667} = -15$$

Zadanie 2a

$$I_1 = G_1(V_1 - V_2) = \frac{1}{5}(16 - 6) = 2A$$

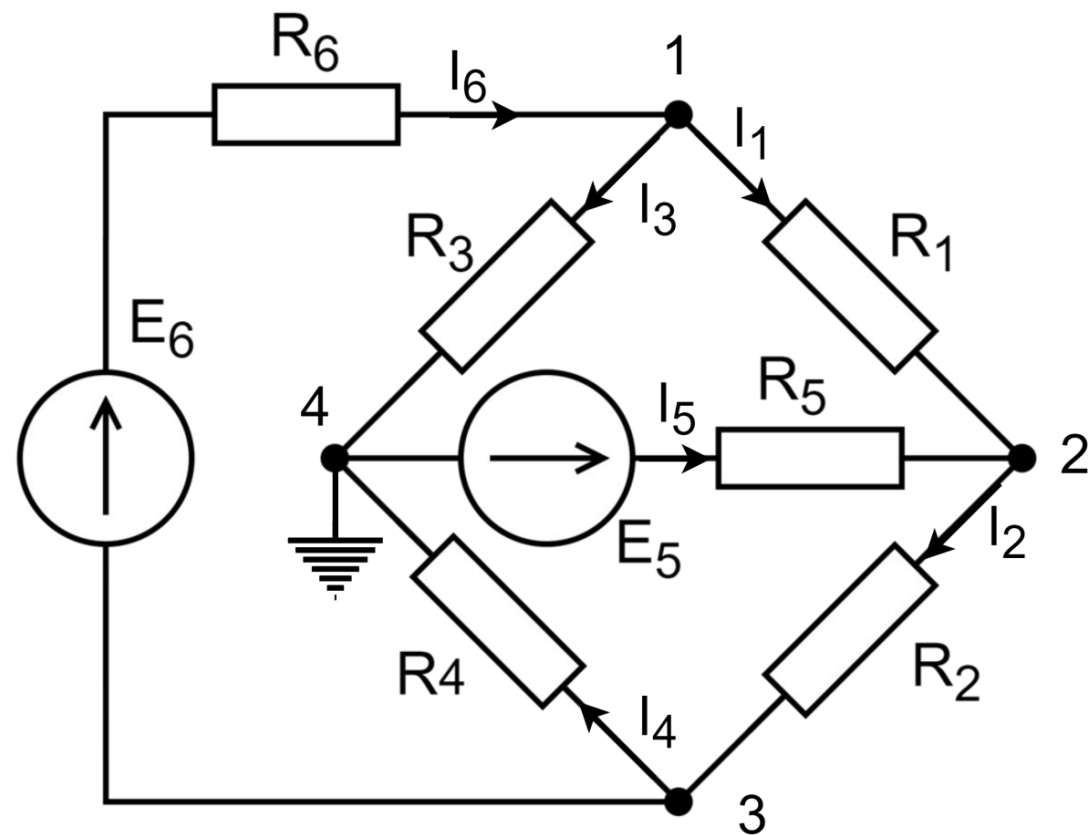
$$I_2 = G_2(V_2 - V_3) = \frac{1}{3}(6 + 15) = 7A$$

$$I_3 = G_3(V_1 - 0) = \frac{1}{2}(16) = 8A$$

$$I_4 = G_4(V_3 - 0) = \frac{1}{5}(-15) = -3A \quad I_6 - I_1 - I_3 = 10 - 2 - 8 = 0$$

$$I_5 = G_5(E_5 + 0 - V_2) = 11 - 6 = 5A$$

$$I_6 = G_6(E_6 + V_3 - V_1) = 2(36 - 15 - 16) = 10A$$

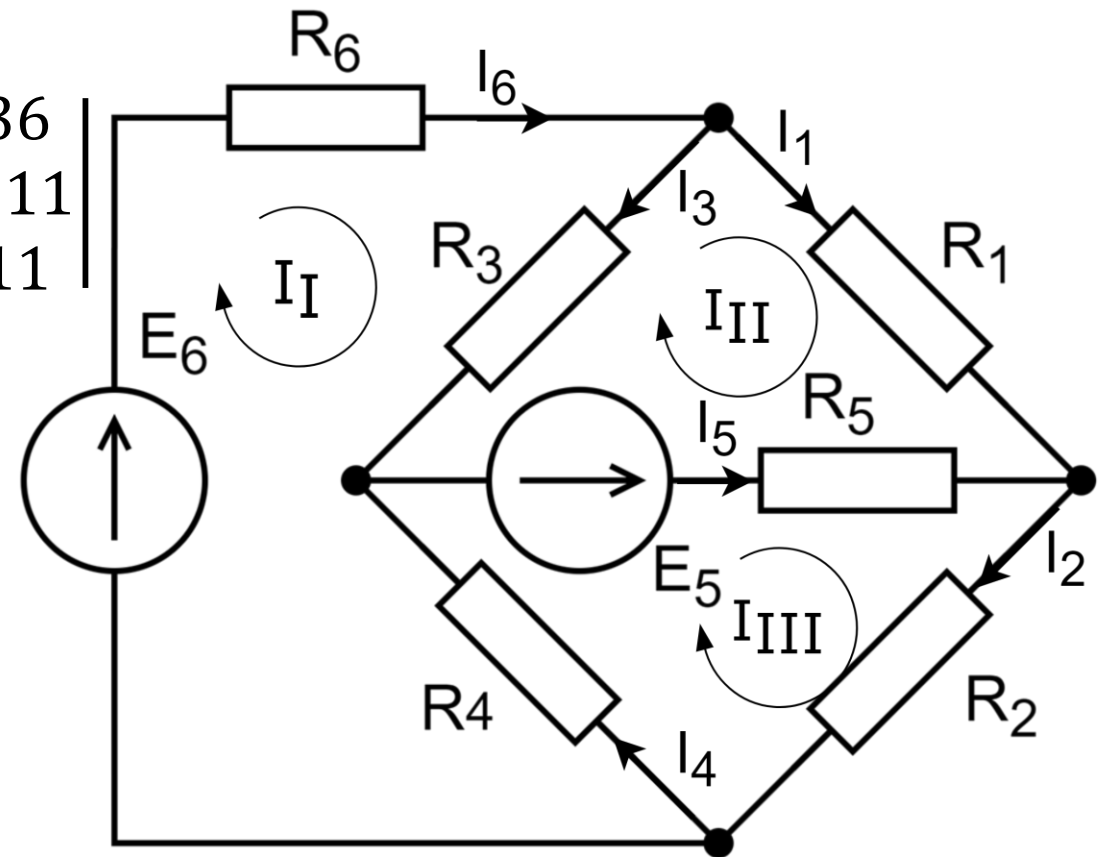


Zadanie 2b

$$\begin{vmatrix} R_6 + R_4 + R_3 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_5 + R_1 + R_3 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4 + R_2 + R_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_6 \\ -E_5 \\ E_5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0.5 + 5 + 2 & -2 & -5 \\ -2 & 1 + 5 + 2 & -1 \\ -5 & -1 & 5 + 3 + 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 \\ -11 \\ 11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7.5 & -2 & -5 \\ -2 & 8 & -1 \\ -5 & -1 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 \\ -11 \\ 11 \end{vmatrix}$$



Zadanie 2b

$$\begin{vmatrix} 7.5 & -2 & -5 \\ -2 & 8 & -1 \\ -5 & -1 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 \\ -11 \\ 11 \end{vmatrix}$$

$$W = 276.5$$

$$W_1 = 2765$$

$$W_2 = 553$$

$$W_3 = 1935.5 \quad I_I = \frac{W_1}{W} = 10 \text{ A}$$

$$I_{II} = \frac{W_2}{W} = 2 \text{ A}$$

$$I_{III} = \frac{W_3}{W} = 7 \text{ A}$$

$$I_6 = I_I = 10 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{II} = 2 \text{ A}$$

$$I_2 = I_{III} = 7 \text{ A}$$

$$I_3 = I_6 - I_1 = 10 - 2 = 8 \text{ A}$$

$$I_4 = I_2 - I_6 = 7 - 10 = -3 \text{ A}$$

$$I_{5a} = I_3 + I_4 = 8 - 3 = 5 \text{ A}$$

$$I_{5b} = I_2 + I_1 = 7 - 2 = 5 \text{ A}$$

Zadanie 3a

Obliczyć rozptyw prądów w podanym obwodzie.

Dane:

$$R_1 = 5\Omega$$

$$R_2 = 2\Omega$$

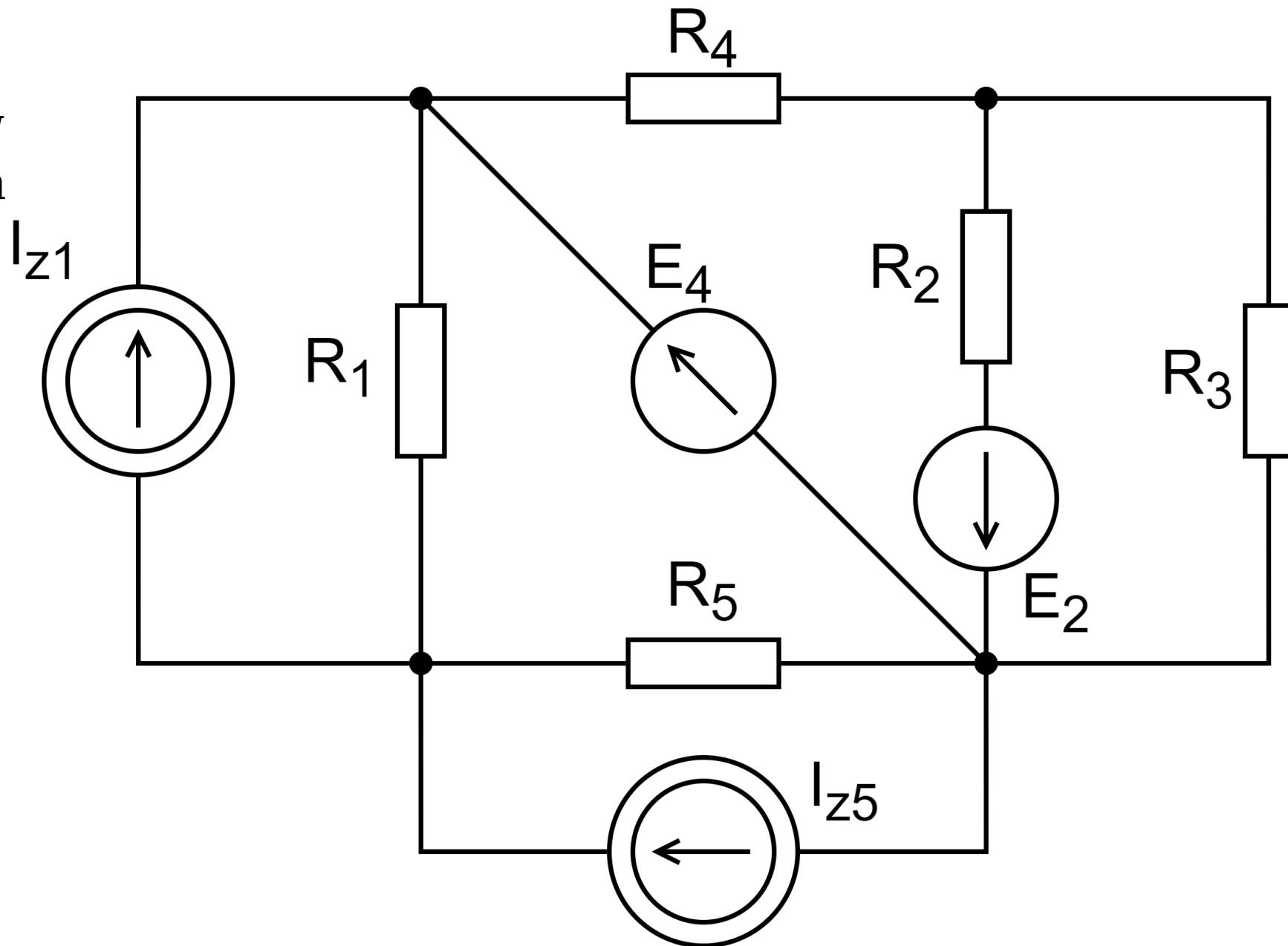
$$R_3 = 10\Omega$$

$$R_4 = 2\Omega$$

$$R_5 = 5\Omega$$

$$I_{z1} = 1A, \quad I_{z5} = 2A$$

$$E_2 = 10V, \quad E_4 = 20V$$



Zadanie 3a

$$V_2 = E_4$$

$$I_1 = G_1(V_1 - V_2) = G_1(V_1 - E_4)$$

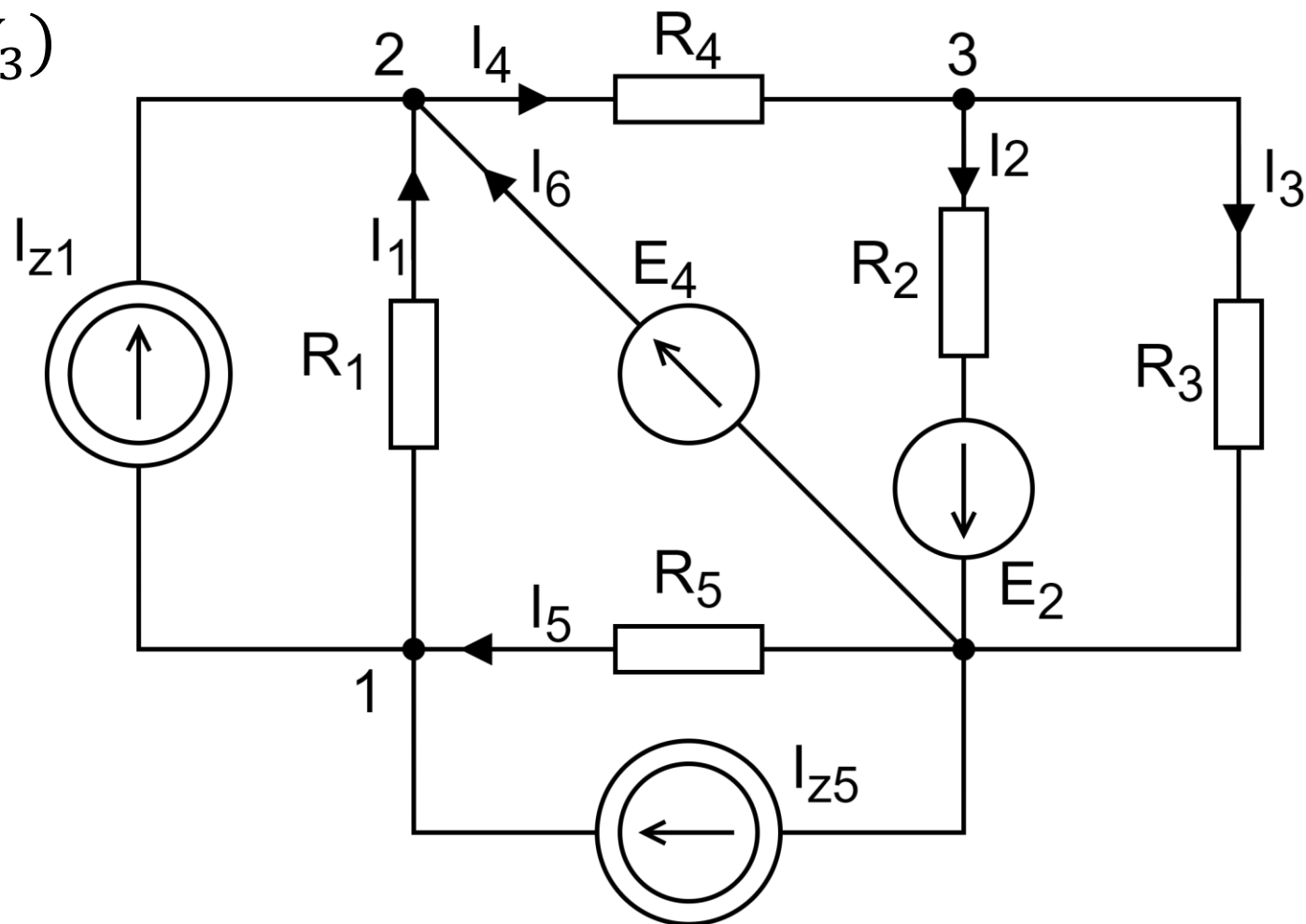
$$I_2 = G_2(E_2 + V_3 - 0) = G_2(E_2 + V_3)$$

$$I_3 = G_3(V_3 - 0) = G_3V_3$$

$$I_4 = G_4(V_2 - V_3) = G_4(E_4 - V_3)$$

$$I_5 = G_5(0 - V_1) = -G_5V_1$$

$$\begin{cases} I_{z5} + I_5 - I_{z1} - I_1 = 0 \\ I_{z1} + I_1 + I_6 - I_4 = 0 \\ I_4 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$



Zadanie 3a

$$V_2 = E_4$$

$$I_1 = G_1(V_1 - V_2) = G_1(V_1 - E_4)$$

$$I_2 = G_2(E_2 + V_3 - 0) = G_2(E_2 + V_3)$$

$$I_3 = G_3(V_3 - 0) = G_3V_3$$

$$I_4 = G_4(V_2 - V_3) = G_4(E_4 - V_3)$$

$$I_5 = G_5(0 - V_1) = -G_5V_1$$

$$\begin{cases} I_{z5} + I_5 - I_{z1} - I_1 = 0 \\ I_{z1} + I_1 + I_6 - I_4 = 0 \\ I_4 - I_2 - I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{z5} - G_5V_1 - I_{z1} - G_1(V_1 - E_4) = 0 \\ I_{z1} + G_1(V_1 - E_4) + I_6 - G_4(E_4 - V_3) = 0 \\ G_4(E_4 - V_3) - G_2(E_2 + V_3) - G_3V_3 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 3a

$$\begin{cases} I_{z5} - G_5 V_1 - I_{z1} - G_1 (V_1 - E_4) = 0 \\ I_{z1} + G_1 (V_1 - E_4) + I_6 - G_4 (E_4 - V_3) = 0 \\ G_4 (E_4 - V_3) - G_2 (E_2 + V_3) - G_3 V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (G_5 + G_1) V_1 = I_{z5} - I_{z1} + G_1 E_4 \\ G_1 V_1 + G_4 V_3 + I_6 = G_1 E_4 + G_4 E_4 - I_{z1} \\ (G_4 + G_2 + G_3) V_3 = G_4 E_4 - G_2 E_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) V_1 = 2 - 1 + \frac{1}{5} 20 \\ \frac{1}{5} V_1 + \frac{1}{2} V_3 + I_6 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) 20 - 1 \\ \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) V_3 = \frac{1}{2} 20 - \frac{1}{2} 10 \end{cases}$$

Zadanie 3a

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)V_1 = 2 - 1 + \frac{1}{5}20 \\ \frac{1}{5}V_1 + \frac{1}{2}V_3 + I_6 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)20 - 1 \\ \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)V_3 = \frac{1}{2}20 - \frac{1}{2}10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}V_1 = 5 \\ \frac{1}{5}V_1 + \frac{1}{2}V_3 + I_6 = 13 \\ \frac{11}{10}V_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = 12.5 \\ I_6 = 13 - \frac{1}{5}12.5 - \frac{1}{2}4.54 = 8.23 \\ V_3 = 4.54 \end{cases}$$

Zadanie 3a

$$\begin{cases} V_1 = 12.5 \\ I_6 = 8.23 \\ V_3 = 4.54 \end{cases}$$

$$I_1 = G_1(V_1 - E_4) = \frac{1}{5}(12.5 - 20) = -1.5$$

$$I_2 = G_2(E_2 + V_3) = \frac{1}{2}(10 + 4.54) = 7.27$$

$$I_3 = G_3V_3 = \frac{1}{10}4.54 = 0.454$$

$$I_4 = G_4(E_4 - V_3) = \frac{1}{2}(20 - 4.54) = 7.73$$

$$I_5 = -G_5V_1 = -\frac{1}{5}12.5 = -2.5$$

$$I_{z5} + I_5 = I_{z1} + I_1$$

$$I_{z1} + I_1 + I_6 = I_4$$

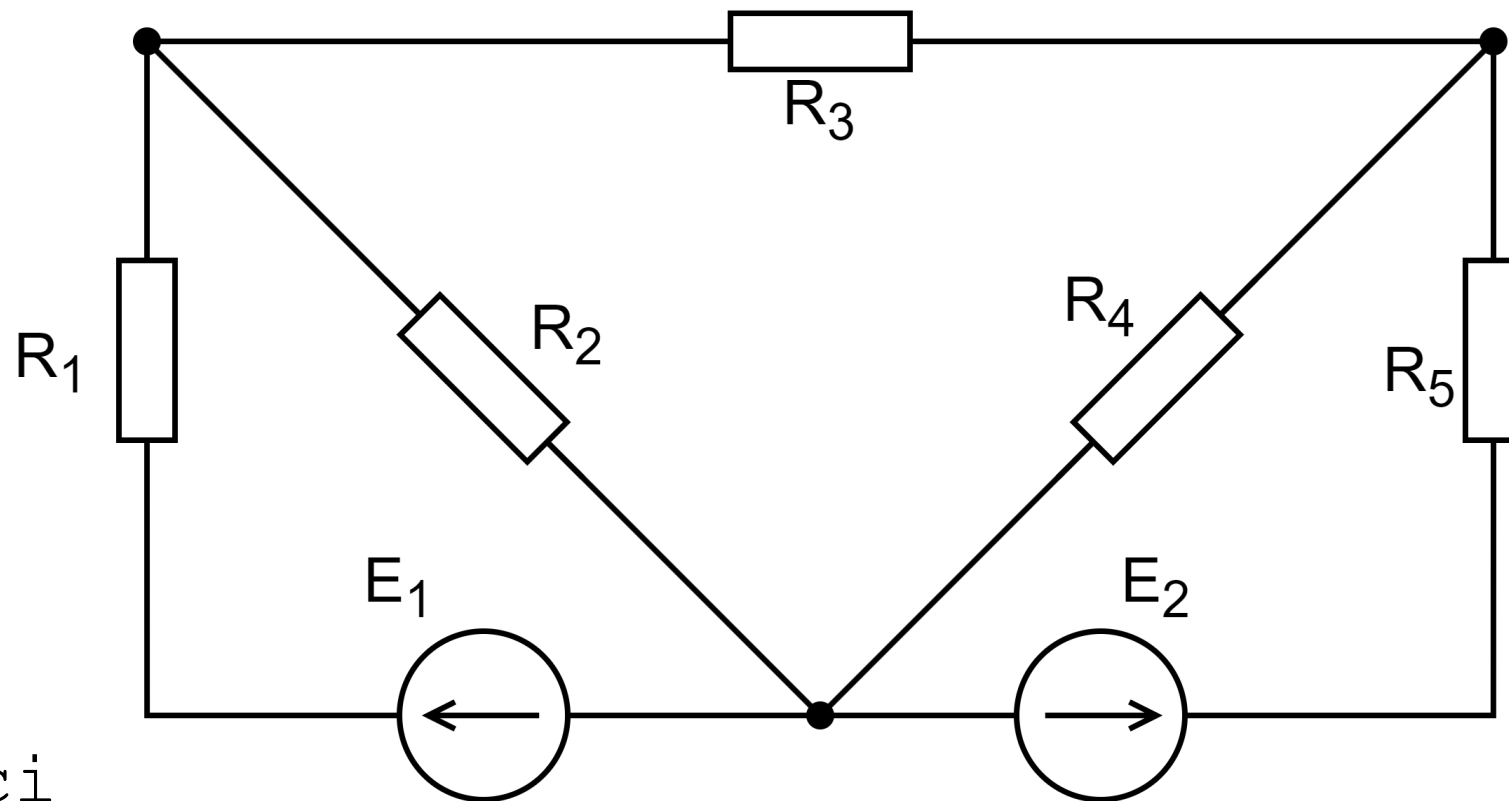
$$I_4 = I_2 + I_3$$

$$2 - 2.5 - 1 + 1.5 = 0$$

$$1 - 1.5 + 8.23 - 7.73 = 0$$

$$7.73 - 7.27 - 0.454 = 0.006$$

Zadanie 3b



Wyznaczyć wartości prądów w obwodzie.

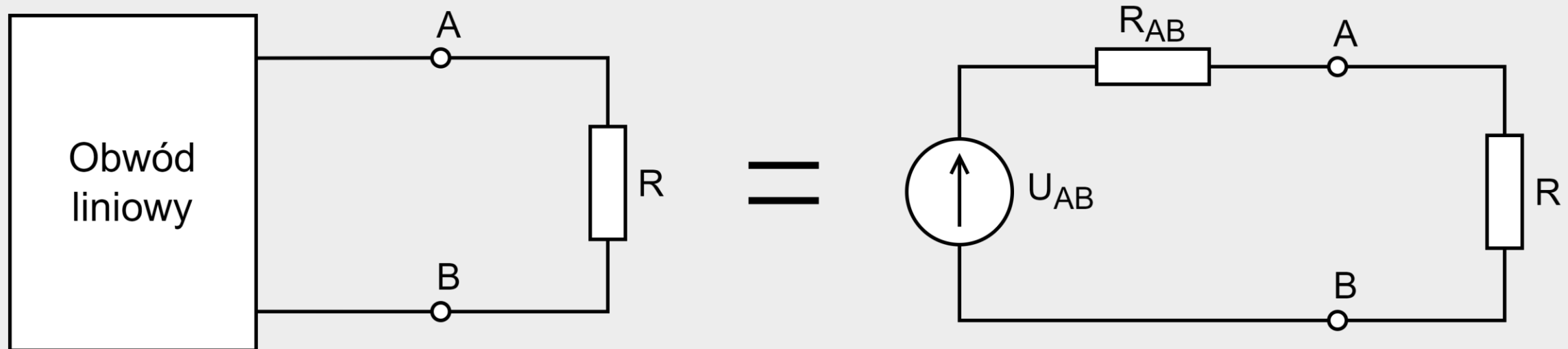
$$R_1=3\Omega, \quad R_2=5\Omega, \quad R_3=4\Omega, \quad R_4=2\Omega, \quad R_5=1\Omega$$

$$E_1=6V, \quad E_2=2V$$

Zastępcze źródła energii

Twierdzenie Thevenina

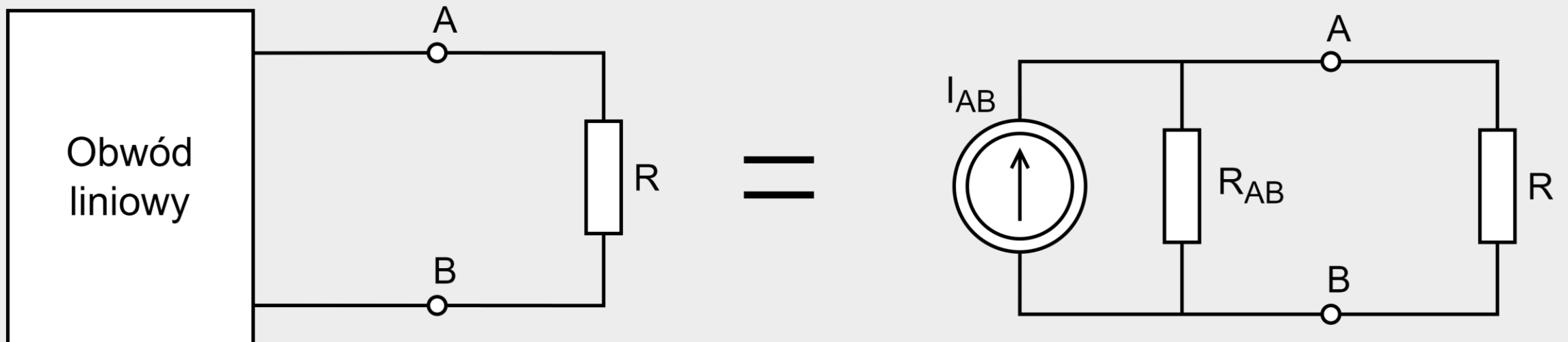
Dowolny, aktywny obwód liniowy można zastąpić od strony wybranych zacisków gałęzi AB uproszczonym obwodem równoważnym, złożonym z szeregowego połączenia jednego idealnego źródła napięcia i impedancji zastępczej obwodu.



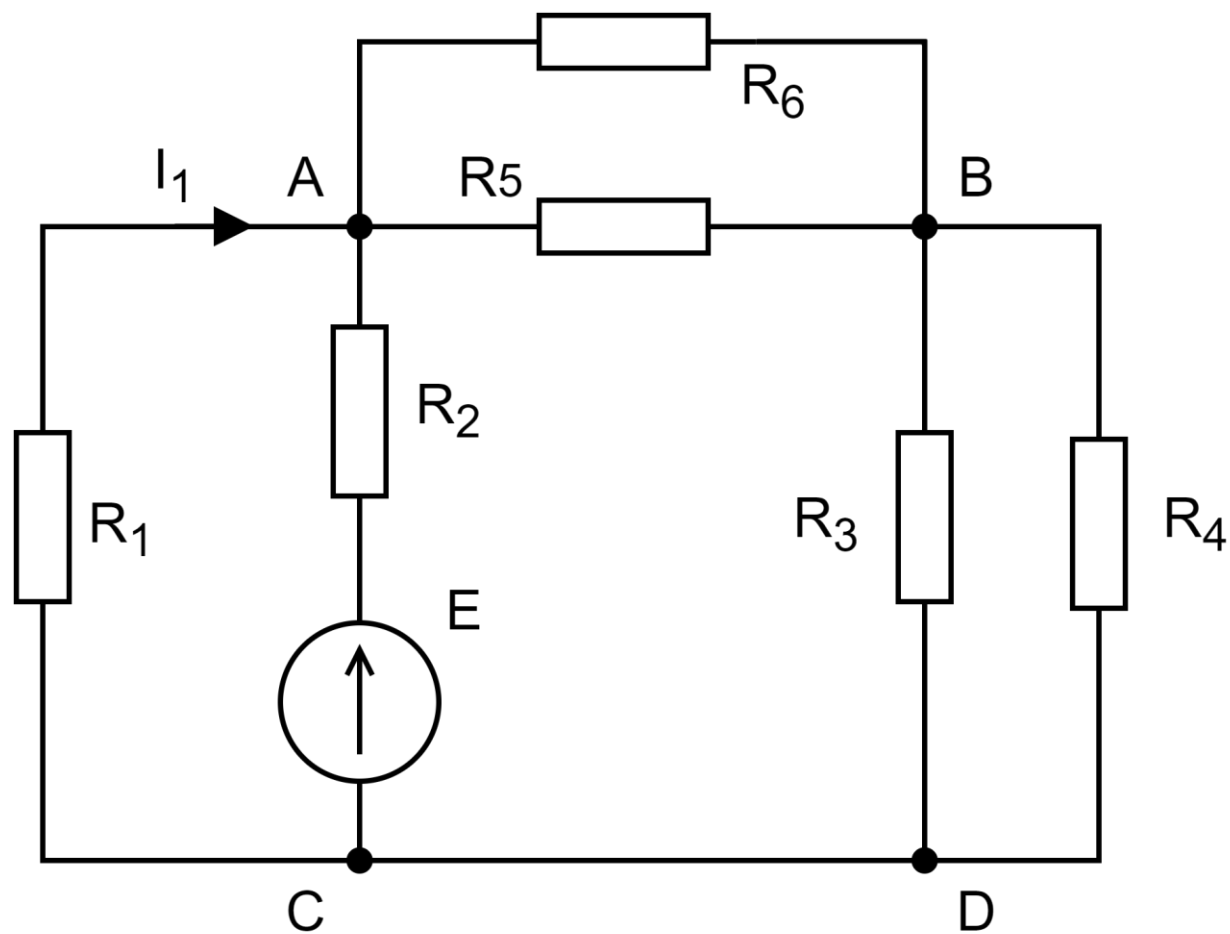
Zastępcze źródła energii

Twierdzenie Nortona

Dowolny aktywny obwód liniowy można od strony wybranych zacisków **AB** zastąpić obwodem równoważnym, złożonym z równoległego połączenia idealnego źródła prądu i impedancji zastępczej obwodu.



Przykład 3



Wyznaczyć wartość prądu I_1 w oparciu o metody:

- Thevenina
- Nortona

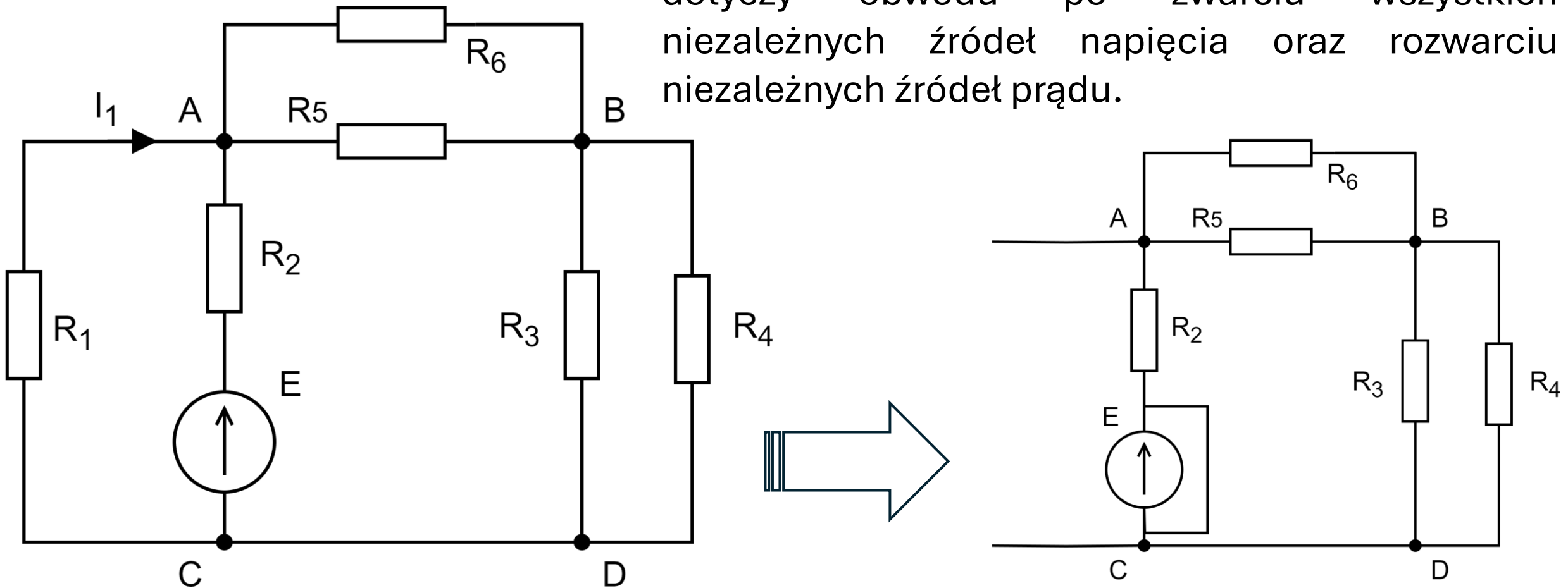
Dane:

- $R_1 = R_3 = R_5 = 25\Omega$
- $R_2 = R_4 = R_6 = 50\Omega$
- $E = 50V$

Przykład 3a

Twierdzenie Thevenina

1. Wartość źródła zastępczego oblicza się na podstawie analizy obwodu oryginalnego jako napięcie panujące na zaciskach AC.
2. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AC dotyczy obwodu po zwarceniu wszystkich niezależnych źródeł napięcia oraz rozwarciu niezależnych źródeł prądu.



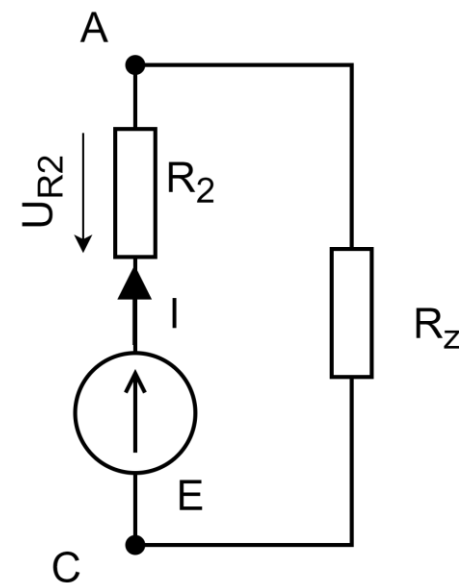
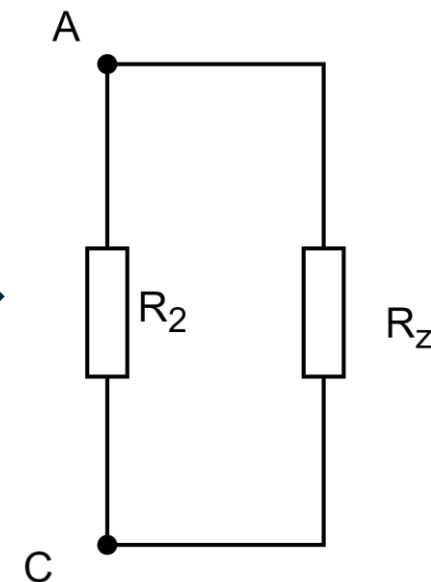
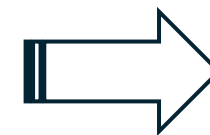
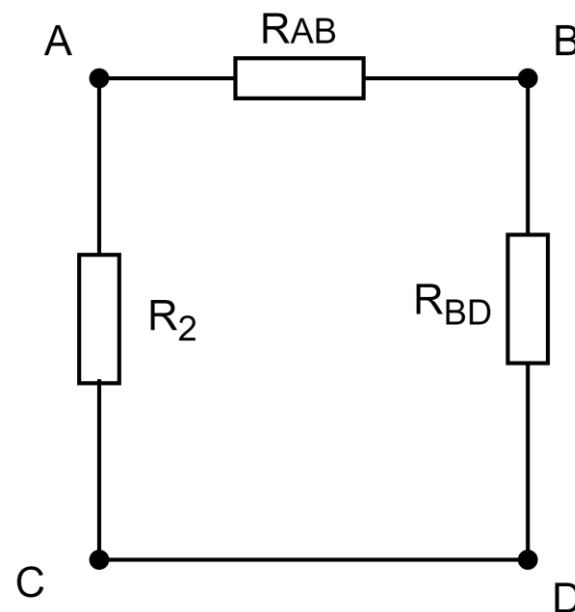
Przykład 3a

$$R_{AB} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = \frac{25 \cdot 50}{25 + 50} = \frac{50}{3} \Omega = R_{BD}$$

$$R_Z = R_{AB} + R_{BD} = 2 \cdot \frac{50}{3} = \frac{100}{3} \Omega$$

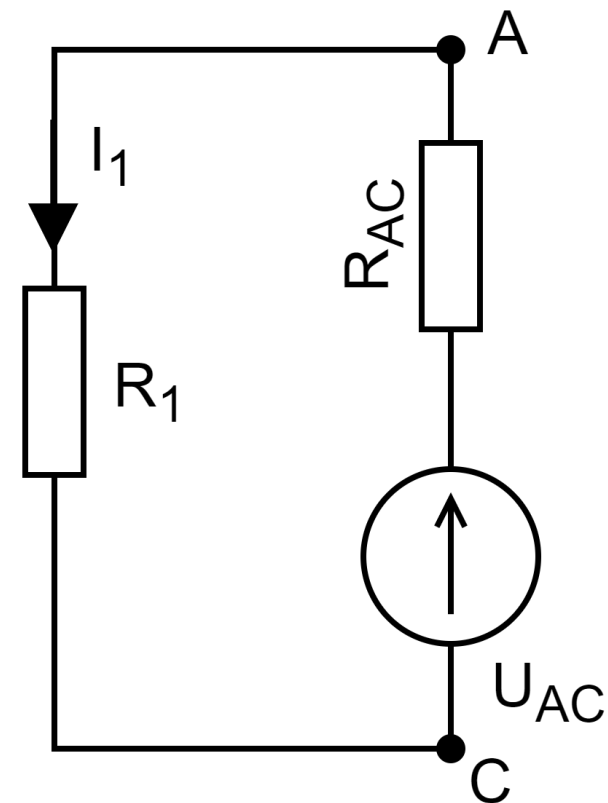
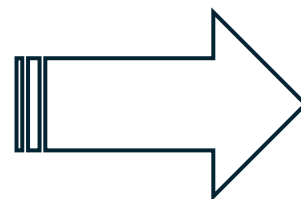
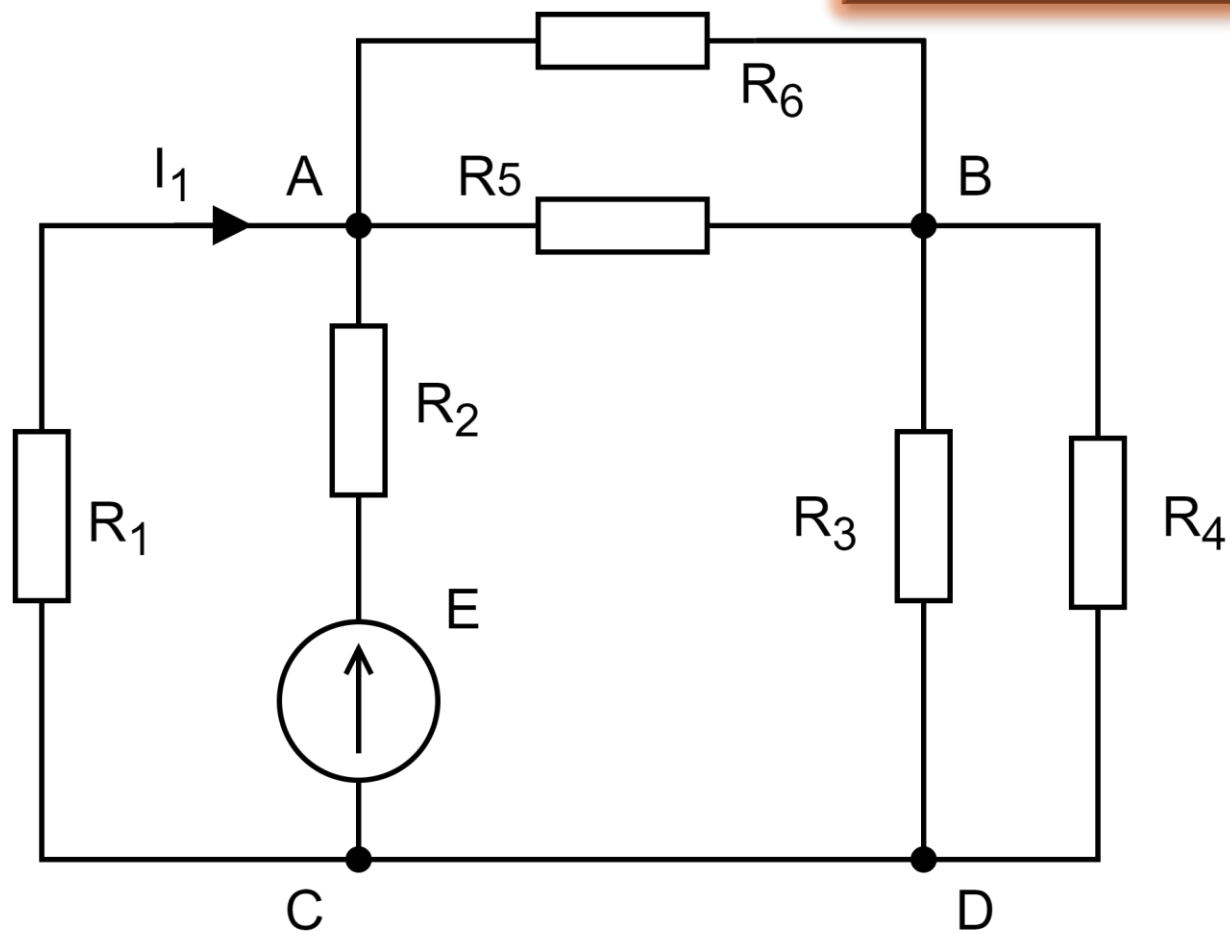
$$R_{AC} = \frac{R_2 \cdot R_Z}{R_2 + R_Z} = \frac{50 \cdot \frac{100}{3}}{50 + \frac{100}{3}} = 20 \Omega$$

$$\begin{aligned} U_{AC} &= E - U_{R2} = E - R_2 \cdot I = E - R_2 \left(\frac{E}{R_2 + R_Z} \right) = \\ &= 50 - 50 \left(\frac{50}{50 + \frac{100}{3}} \right) = 50 - 50 \cdot \frac{3}{5} = 50 - 30 = 20V \end{aligned}$$



Przykład 3a

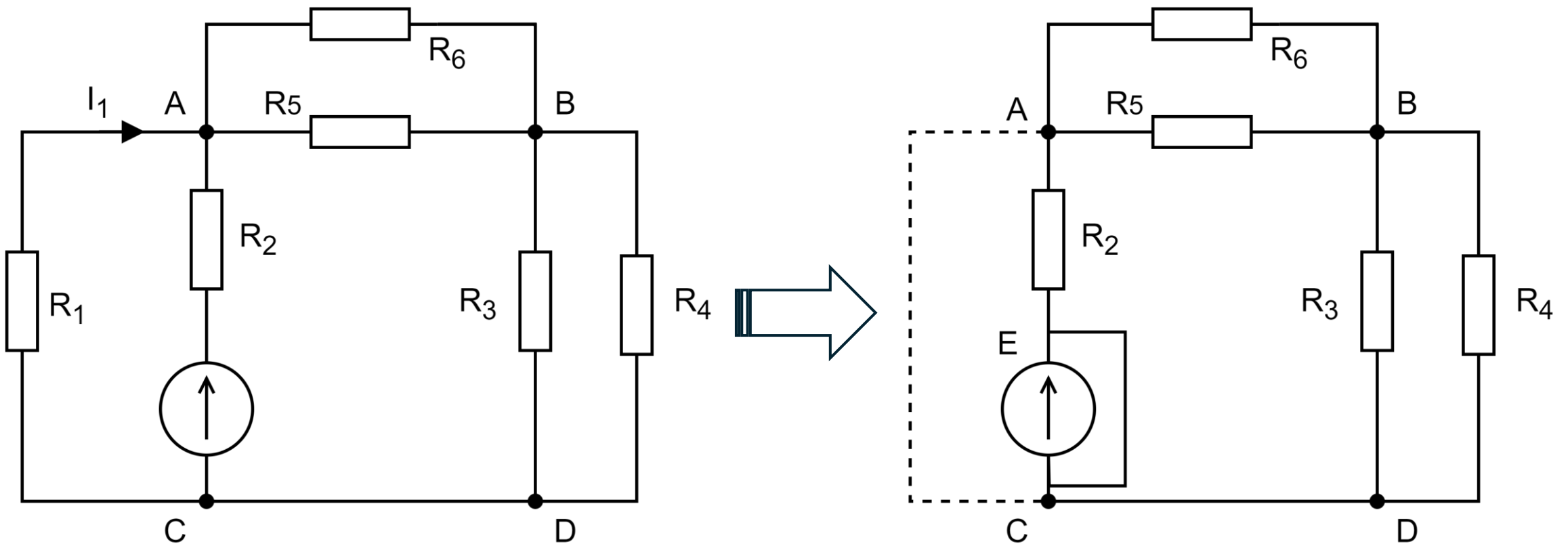
$$I_1 = \frac{U_{AC}}{R_1 + R_{AC}} = \frac{20}{25 + 20} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} \approx 0.44A$$



Przykład 3b

Twierdzenie Nortona

1. Wartość źródła zastępczego oblicza się w obwodzie oryginalnym jako prąd zwarcia gałęzi AC.
2. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AC dotyczy obwodu po zwarceniu wszystkich źródeł napięcia oraz rozwarciu źródeł prądu.



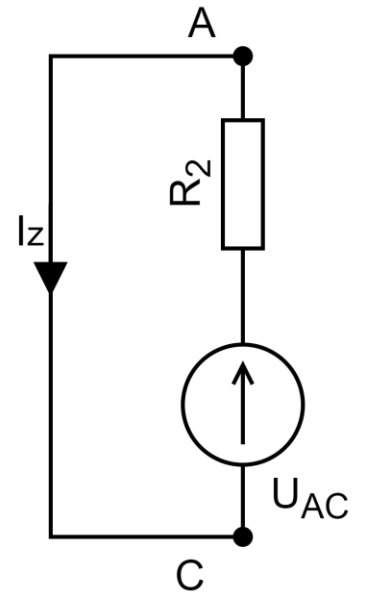
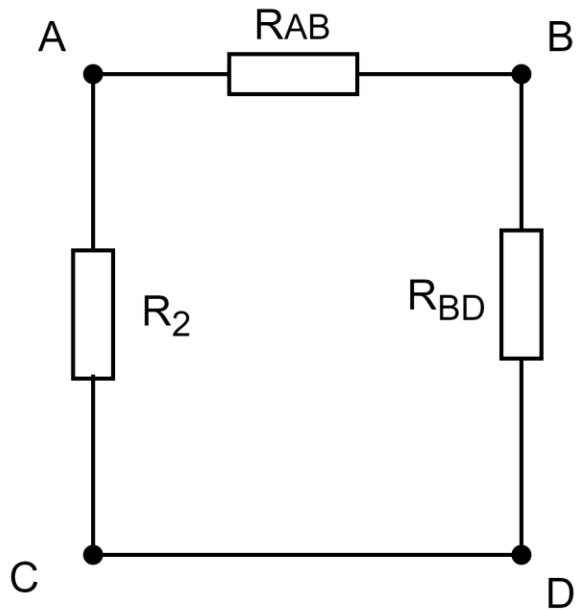
Przykład 3b

$$R_{AB} = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = \frac{25 \cdot 50}{25 + 50} = \frac{50}{3} \Omega = R_{BD}$$

$$R_Z = R_{AB} + R_{BD} = 2 \cdot \frac{50}{3} = \frac{100}{3} \Omega$$

$$R_{AC} = \frac{R_2 \cdot R_Z}{R_2 + R_Z} = \frac{50 \cdot \frac{100}{3}}{50 + \frac{100}{3}} = 20 \Omega$$

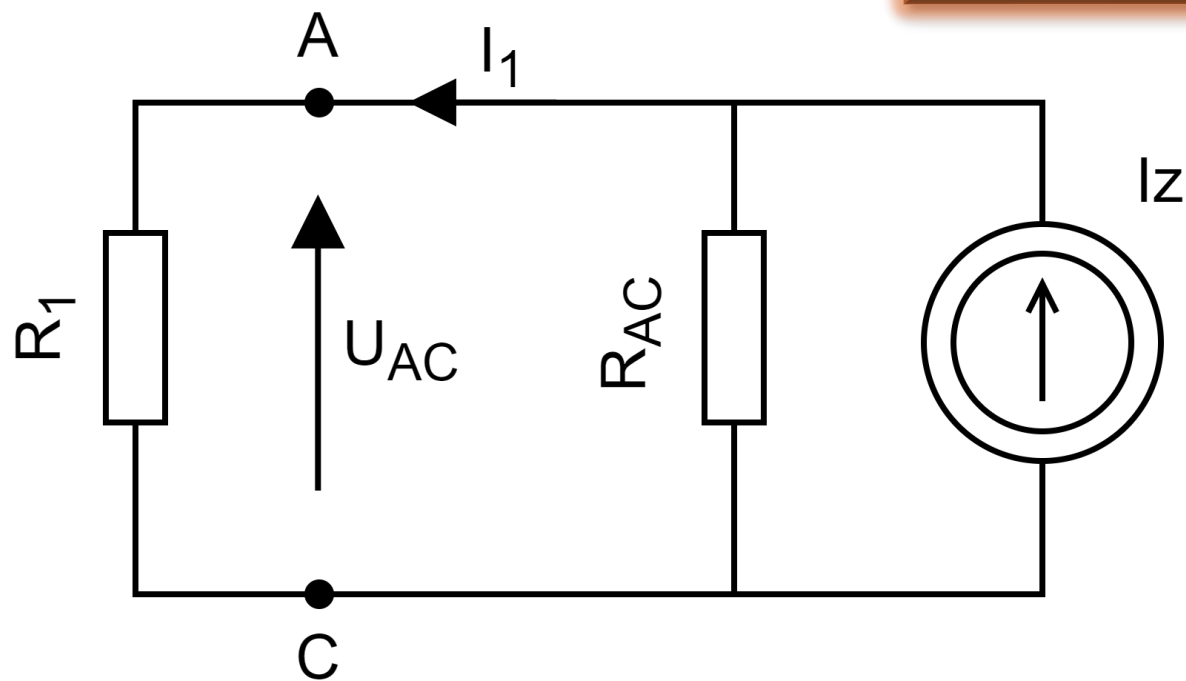
$$I_Z = \frac{E}{R_2} = \frac{50}{50} = 1 A$$



Przykład 3b

$$U_{AC} = I_z \cdot \frac{R_{AC} \cdot R_1}{R_1 + R_{AC}} = 1 \cdot \frac{25 \cdot 20}{25 + 20} = \frac{100}{9} V$$

$$I_1 = \frac{U_{AC}}{R_1} = \frac{100}{9} \cdot \frac{1}{25} = \frac{4}{9} \approx 0.44 A$$



Zadanie 4

W oparciu o twierdzenie

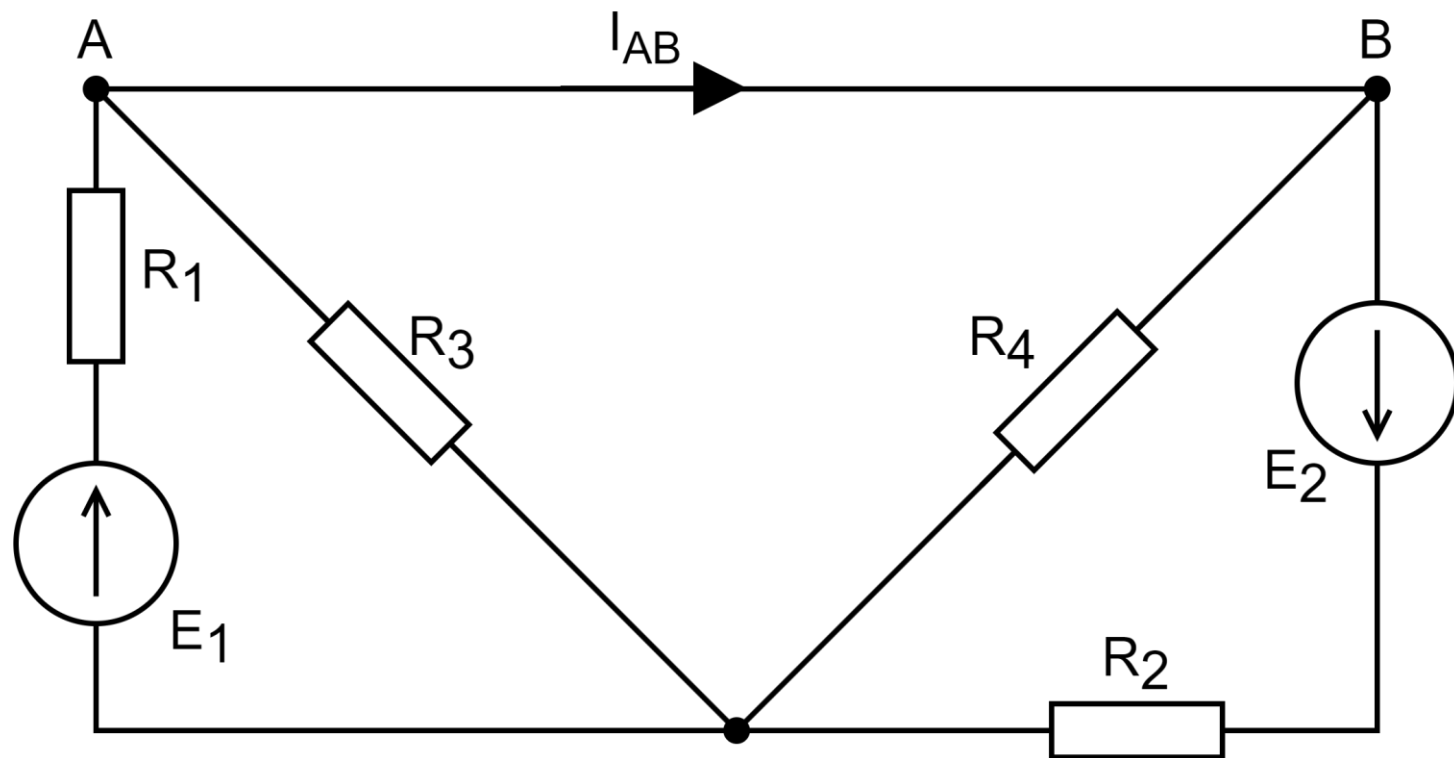
a) Thevenina,

b) Nortona,

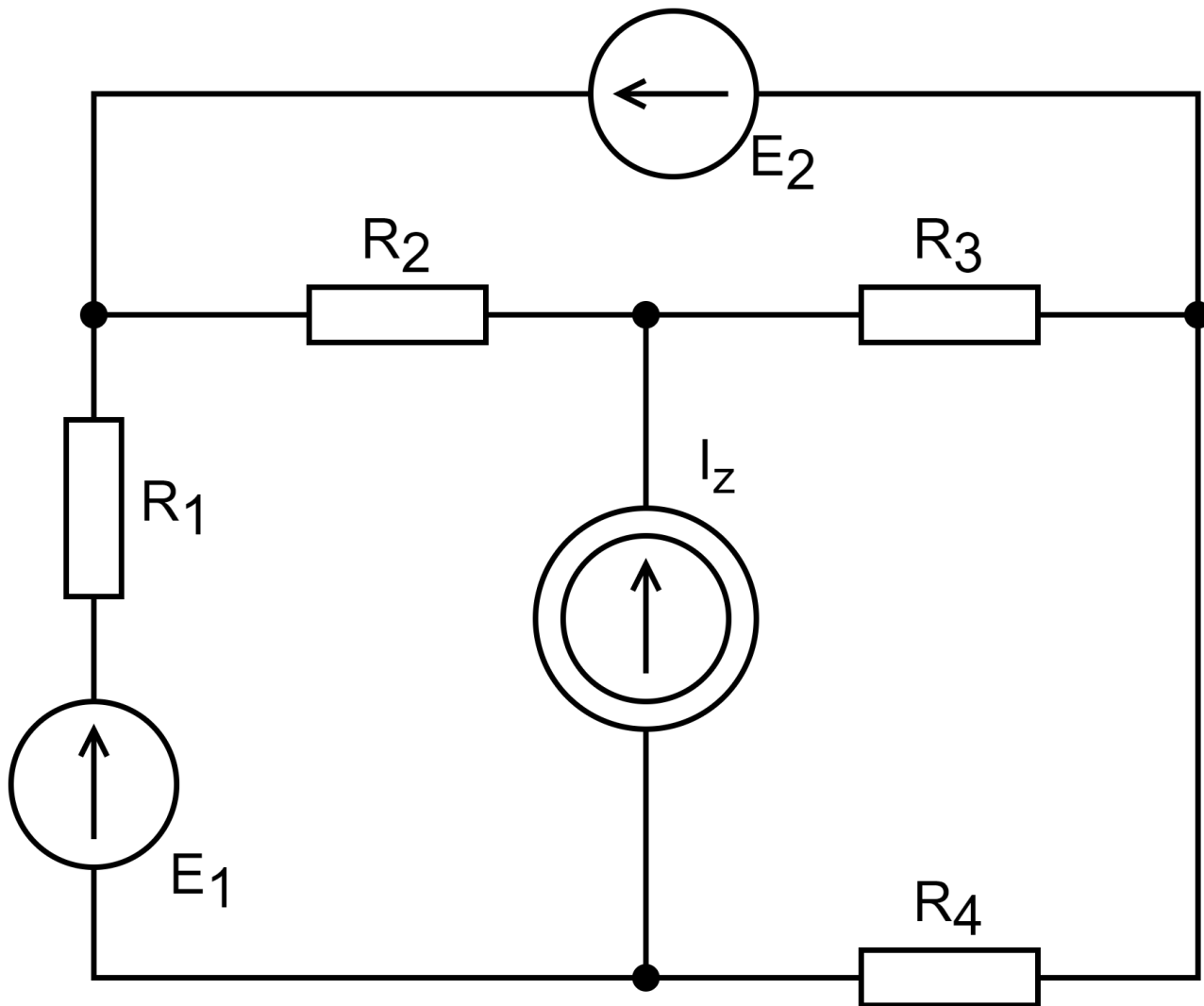
obliczyć wartość prądu I_{AB} .

Dane:

- $E_1 = 100 \text{ V}$
- $E_2 = 50 \text{ V}$
- $R_1 = 50 \ \Omega$
- $R_2 = 10 \ \Omega$
- $R_3 = 25 \ \Omega$
- $R_4 = 20 \ \Omega$



Zadanie 5



Wyznaczyć rozpływ prądów w obwodzie pokazanym na rysunku. Parametry poszczególnych elementów układu:

- $R_1 = 50\Omega$
- $R_2 = R_3 = 25\Omega$
- $R_4 = 40\Omega$
- $E_1 = 20V$
- $E_2 = 40V$
- $I_z = 2A$