

# Teoria Obwodów I – Ćwiczenia 6

- Rachunek zespolony
- Pojęcie impedancji
- Obwody liniowe przy wymuszeniu sinusoidalnym
- Dwójniki szeregowe i równoległe RLC
- Wykresy prądów i napięć

# Liczba zespolona

- Postać algebraiczna

$$\underline{Z} = A + iB, \quad A = Z \cdot \cos(\varphi), \quad B = Z \cdot \sin(\varphi)$$

- Postać wykładnicza

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{i\varphi}, \quad Z = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = \arg(\underline{Z})$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right) & A > 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{B}{A}\right) + \pi & A < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & A = 0 \text{ i } B > 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & A = 0 \text{ i } B < 0 \end{cases}$$

# Działania na liczbach zespolonych

$$\underline{Z_1} = 5 + i10, \quad \underline{Z_2} = 10 - i10, \quad \underline{Z_3} = 20 \cdot e^{i60}$$

- Liczba sprzężona do zespolonej

$$\underline{Z'_1} = 5 - i10, \quad \underline{Z'_2} = 10 + i10, \quad \underline{Z'_3} = 20 \cdot e^{-i60}$$

- Działania

$$i \cdot i = i^2 = -1,$$

$$\underline{Z_1} + \underline{Z_2} = (5 + i10) + (10 - i10) = 15$$

$$\underline{Z_1} - \underline{Z_2} = (5 + i10) - (10 - i10) = -5 + i20$$

$$\begin{aligned} \underline{Z_1} \cdot \underline{Z_2} &= (5 + i10) \cdot (10 - i10) = (5 \cdot 10 + 10 \cdot 10) + i(5 \cdot -10 + 10 \cdot 10) = \\ &= 150 + i50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} &= \frac{5 + i10}{10 - i10} = \frac{(5 + i10) \cdot (10 + i10)}{(10 - i10) \cdot (10 + i10)} = \frac{(50 - 100) + i(50 + 100)}{100 + 100} = \\ &= \frac{-50 + i150}{200} = -0.25 + i0.75 \end{aligned}$$

# Działania na liczbach zespolonych

$$\underline{Z_1} = 20 \cdot e^{i60}, \quad \underline{Z_2} = 10 \cdot e^{-i45}$$

• Działania

$$\underline{Z_1} \cdot \underline{Z_2} = 20 \cdot 10 \cdot e^{i(60-45)} = 200 \cdot e^{i15}$$

$$\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = \frac{20}{10} \cdot e^{i(60+45)} = 2 \cdot e^{i105}$$

$$\sqrt{\underline{Z_1}} = \sqrt{20e^{i60}} = (20e^{i60})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{20}e^{\frac{1}{2} \cdot i60} = 2\sqrt{5}e^{i30}$$

# Impedancja

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + iX = Z \cdot e^{i\varphi}, \text{ gdzie } \varphi = \arg(\underline{Z})$$

$\underline{Z}$  - Impedancja

$\underline{Y}$  - Admitancja

R - Rezystancja

X - Reaktancja

$X_C$  - Reaktancja pojemnościowa -  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

$X_L$  - Reaktancja indukcyjnościowa -  $X_L = \omega L$

$$\underline{Z} = R + i(X_L - X_C)$$

# Wartość chwilowa a zespolona

$$z(t) = Z_{max} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

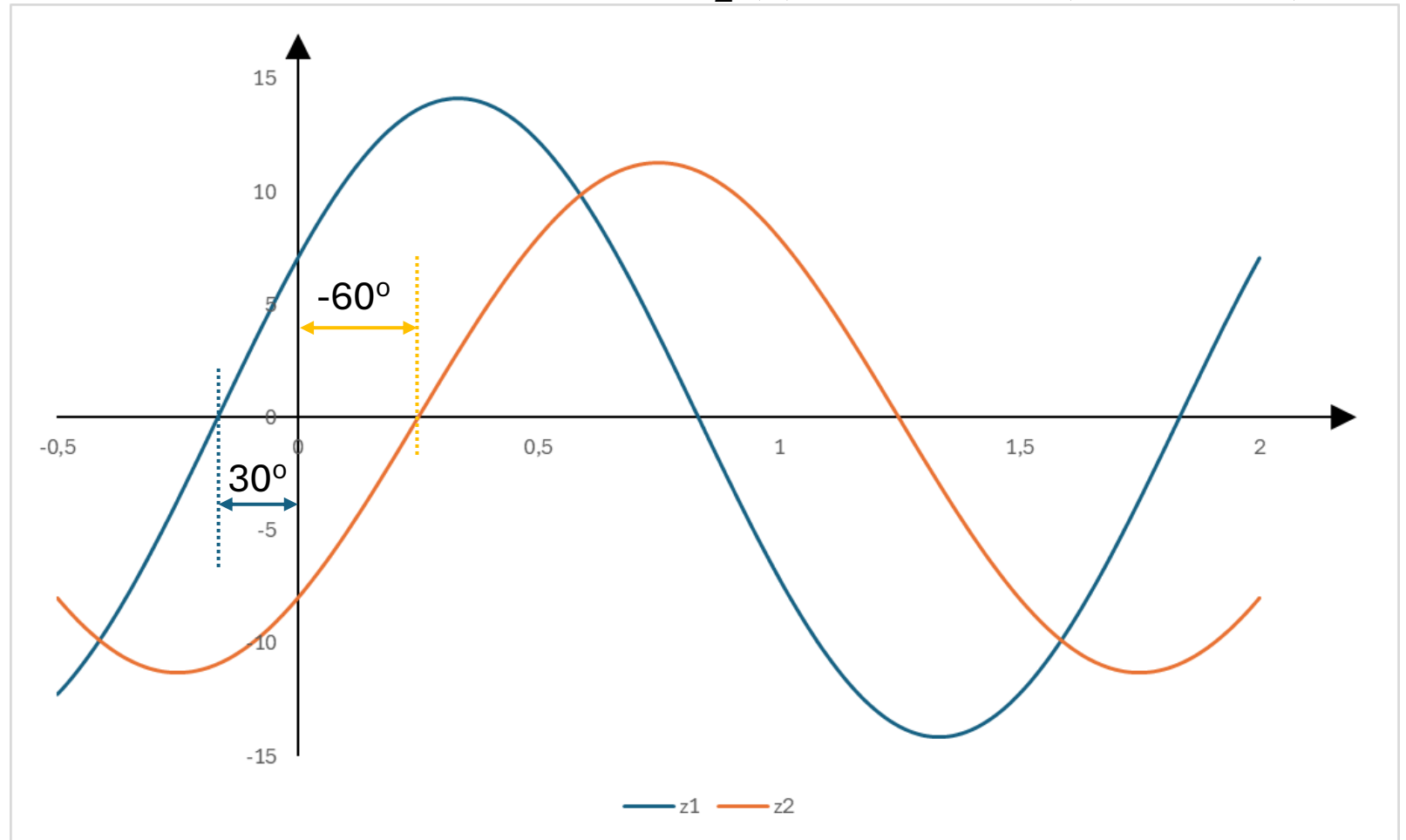
$$z_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$z_2(t) = 8\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ)$$

$$\underline{Z} = \frac{Z_{max}}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$



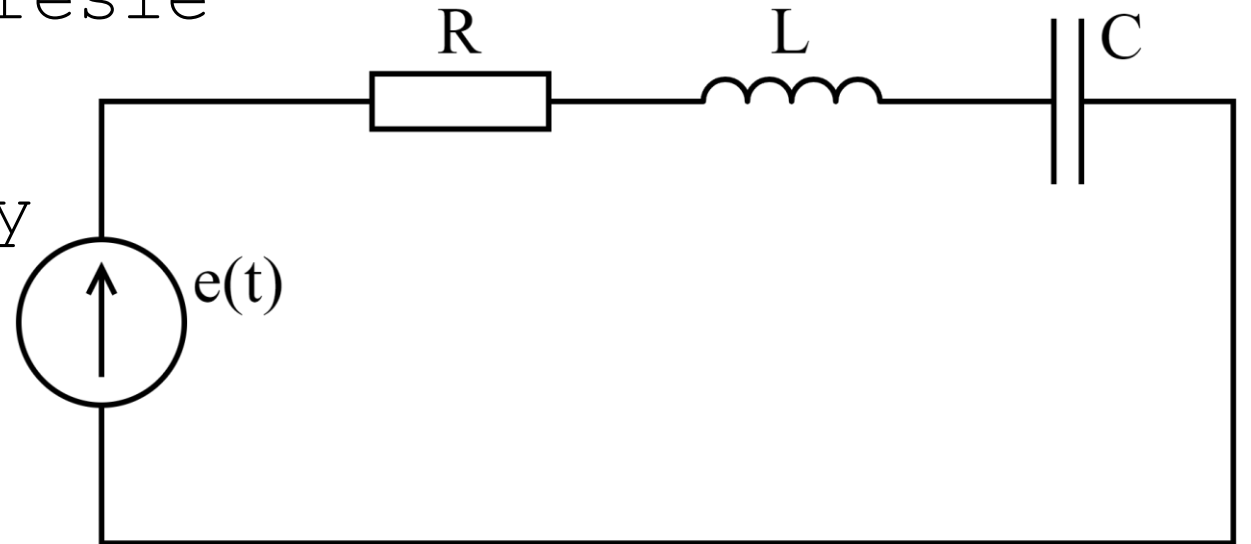
# Dwójnik szeregowy RLC

W układzie dwójnika szeregowego RLC zasilanego z generatora o napięciu  $e(t) = 150\sqrt{2} \sin(1000t + 60) \text{ V}$  wyznaczyć:

- wartość zespoloną, skuteczną i chwilową prądu
- spadki napięć na poszczególnych elementach obwodu
- narysować na wspólnym wykresie przebiegi  $e(t)$  i  $i(t)$
- narysować wykres fazowrowy dla analizowanego obwodu

Dane:

$$R=50\Omega, \quad L=150\text{mH}, \quad C=10\mu\text{F}$$



# Dwójnik szeregowy RLC

$$e(t) = 150\sqrt{2} \sin(1000t + 60) \text{ V} \rightarrow \underline{E} = 150 \cdot e^{i60} = 75 + 75\sqrt{3} \text{ V}$$

$$R=50\Omega, L=150\text{mH}, C=10\mu\text{F}$$

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 150 \cdot 10^{-3} = 150 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 100 \Omega$$

$$\underline{Z} = R + i(X_L - X_C) = 50 + i(150 - 100) = 50 + i50 = 50\sqrt{2} \cdot e^{i45} \Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{150e^{i60}}{50\sqrt{2}e^{i45}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} \approx 2.05 + i0.55 \text{ A}$$

$$i(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \sin(1000t + 15) = 3 \sin(1000t + 15) \text{ A}$$



# Dwójnik szeregowy RLC

$$\underline{I} = \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} \approx 2.05 + i0.55 \text{ A}$$

$$U_R = R \cdot \underline{I} = 50 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} = 75\sqrt{2} e^{i15} \approx 102.45 + i27.45 \text{ V}$$

$$U_C = -iX_C \cdot \underline{I} = -i100 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} = 100e^{-i90} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} = 150\sqrt{2} e^{-i75} = \\ \approx 55 - i205 \text{ V}$$

$$U_L = iX_L \cdot \underline{I} = i150 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} = 150e^{i90} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{i15} = 225\sqrt{2} e^{i105} = \\ \approx -76.67 + i308.82 \text{ V}$$

# Dwójnik szeregowy RLC

Przebiegi wartości chwilowych napięcia i prądu

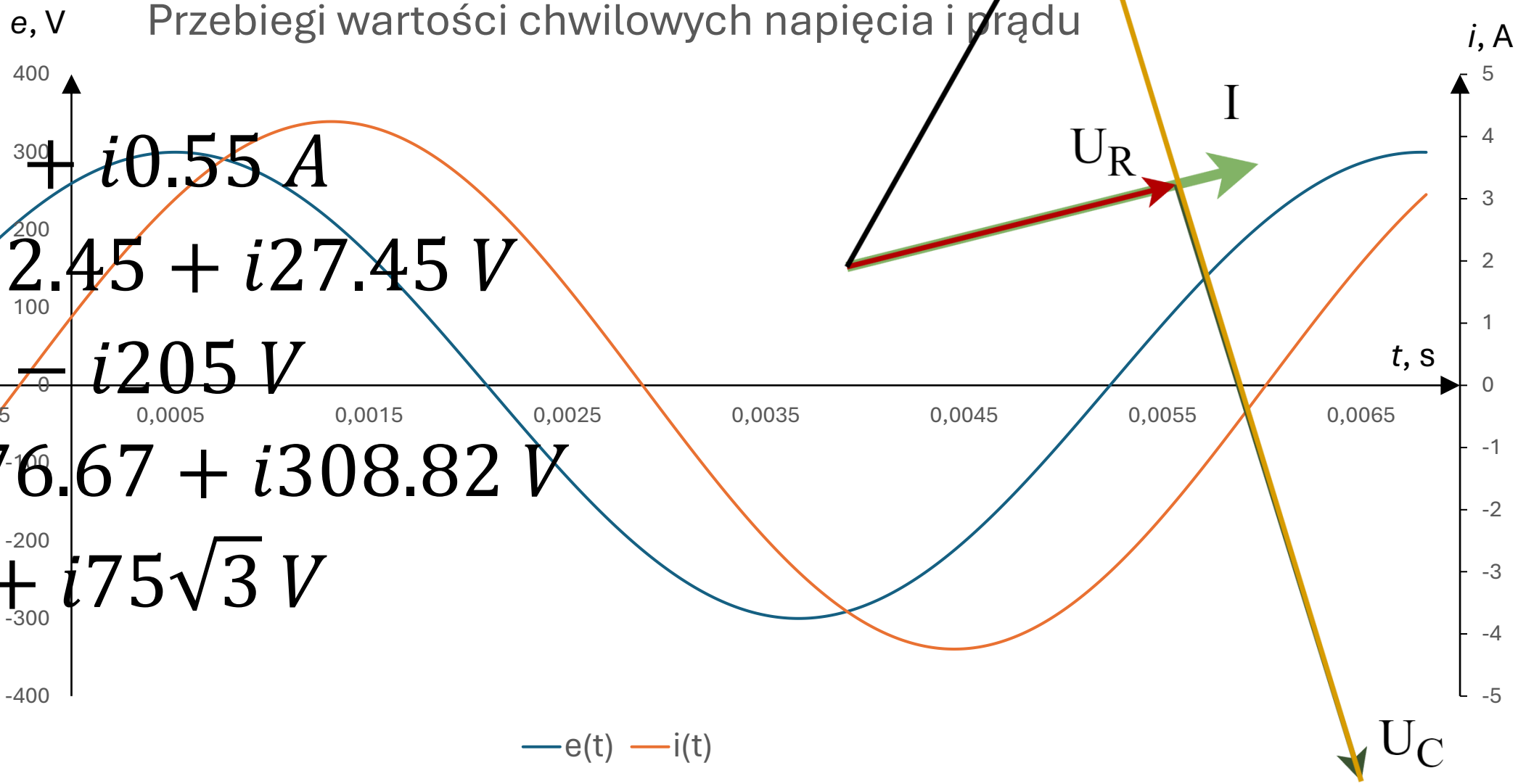
$$\underline{I} \approx 2.05 + i0.55 \text{ A}$$

$$\underline{U}_R \approx 102.45 + i27.45 \text{ V}$$

$$\underline{U}_C \approx 55 - i205 \text{ V}$$

$$\underline{U}_L \approx -76.67 + i308.82 \text{ V}$$

$$\underline{E} = 75 + i75\sqrt{3} \text{ V}$$



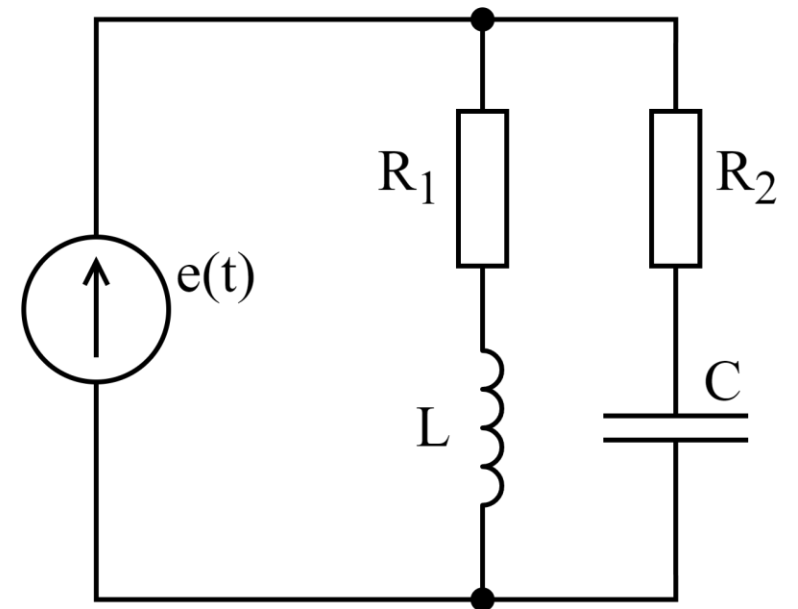
# Dwójnik równoległy RLC

W układzie dwójnika szeregowego RLC zasilanego z generatora o napięciu  $e(t) = 200 \sin(1000t - 30) V$  wyznaczyć:

- wartość zespoloną, skuteczną i chwilową prądu głównego
- wartości skuteczne i zespolone prądów w gałęziach obwodu
- spadki napięć na poszczególnych elementach obwodu
- narysować na wspólnym wykresie przebiegi  $e(t)$  i  $i(t)$
- narysować wykres fazowowy dla analizowanego obwodu

Dane:

$$R_1 = 50 \Omega, \quad R_2 = 200 \Omega, \quad L = 100 \text{ mH}, \quad C = 5 \mu\text{F}$$



# Dwójnik równoległy RLC

$$\underline{E} = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{-i30} = 50\sqrt{6} - i50\sqrt{2} \text{ V}$$

$$X_L = \omega L = 1000 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 100 \ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 200 \ \Omega$$

$$\underline{Z}_L = R_1 + iX_L = 50 + i100 \ \Omega$$

$$\underline{Z}_C = R_2 - iX_C = 200 - i200 \ \Omega$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{(50 + i100) \cdot (200 - i200)}{(50 + i100) + (200 - i200)} \approx 89.65 + i75.86$$

# Dwójnik równoległy RLC

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{50\sqrt{6} - i50\sqrt{2}}{89.65 + i75.86} \approx 0,41 - i1.13 \approx 1.2e^{-i70} \text{ A}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_L} = \frac{50\sqrt{6} - i50\sqrt{2}}{50 + i100} \approx -0.08 - i1.26 \text{ A}$$

$$\underline{U}_{R1} = R_1 \cdot \underline{I}_L = 50 \cdot (-0.08 - i1.26) = -4 - i63 \text{ V}$$

$$\underline{U}_L = iX_L \cdot \underline{I}_L = i100 \cdot (-0.08 - i1.26) = 126 - i8 \text{ V}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_C} = \frac{50\sqrt{6} - i50\sqrt{2}}{200 - i200} \approx 0.48 + i0.13 \text{ A}$$

$$\underline{U}_{R2} = R_2 \cdot \underline{I}_C = 200 \cdot (0.48 + i0.13) = 96 + i26 \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = -iX_C \cdot \underline{I}_C = -i200 \cdot (0.48 + i0.13) = 26 - i96 \text{ V}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L = -0.08 - i1.26 + 0.48 + i0.13 = 0.4 - i1.13 \text{ A}$$

# Dwójnik równoległy RLC

Przebiegi wartości chwilowych napięcia i prądu

$$\underline{I} \approx 0,41 - i1,13 \text{ A}$$

$$\underline{I}_L \approx -0,08 - i1,26 \text{ A}$$

$$\underline{U}_{R1} = -4 - i63 \text{ V}$$

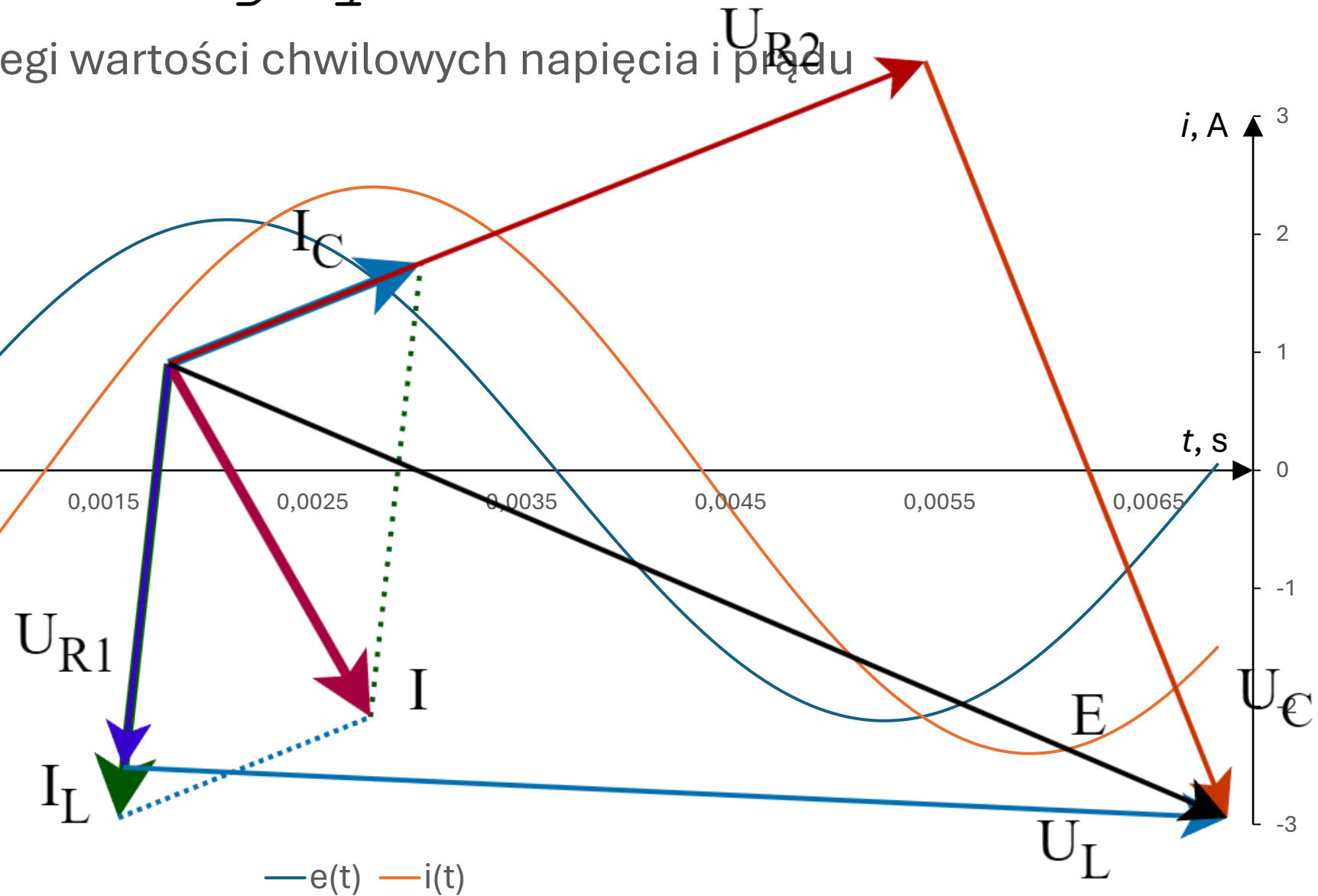
$$\underline{U}_L = 126 - i8 \text{ V}$$

$$\underline{I}_C \approx 0,48 + i0,13 \text{ A}$$

$$\underline{U}_{R2} = 96 + i26 \text{ V}$$

$$\underline{U}_C = 26 - i96 \text{ V}$$

$$\underline{E} = 50\sqrt{6} - i50\sqrt{2} \text{ V}$$



# Zadanie

Dla danego obwodu należy:

- Obliczyć rozptyw prądów
- Wyznaczyć spadki napięć
- Wyznaczyć wartości  $e(t)$  i  $i(t)$
- Narysować na wspólnym wykresie  $e(t)$  i  $i(t)$
- Narysować wykres wskazowy prądów i napięć.

Dane:

$$\underline{E} = 200 + i200\sqrt{3} \text{ V}$$

$$R_1 = X_{C2} = X_{L3} = 100 \Omega$$

$$R_2 = 50 \Omega$$

$$X_{L1} = 150 \Omega$$

